УДК 539.3

СВЕДЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ДВУМЕРНОЙ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА

Ю. М. Волчков, Л. А. Дергилева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Построены уравнения теории оболочек в ортогональной криволинейной системе координат с использованием аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра. Порядок полученной системы дифференциальных уравнений не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях оболочки напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Это позволяет с использованием условий сопряжения перемещений и напряжений на контактных поверхностях построить систему дифференциальных уравнений слоистых оболочек.

Ключевые слова: уравнения теории оболочек, полиномы Лежандра, упругий криволинейный слой.

Введение. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера [1], либо разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций [2–5]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние, поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение, а именно: сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций в пространстве $L_2[-1,1]$, именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек.

В данной работе на основе подходов, изложенных в [3, 4, 6–8], построены дифференциальные уравнения упругих слоистых оболочек в первом приближении.

1. Уравнения трехмерной задачи теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат. Запишем уравнения плоской задачи теории упругости в области $\omega = \{\alpha_1, \alpha_2, x_3\colon \alpha_i \in [l_i^-, l_i^+],\ x_3 \in [-h/2, h/2],\ i = 1, 2\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00728) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-648.2006.1).

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\hat\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{13}}{\partial x_3}+\hat\sigma_{21}A_{12}+\hat\sigma_{31}A_1'-\hat\sigma_{22}A_{21}+q_1H_1H_2=0 \quad (1\rightleftarrows 2),$$
$$\frac{\partial\hat\sigma_{31}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{33}}{\partial x_3}-\hat\sigma_{11}A_1'-\hat\sigma_{22}A_2'+q_3H_1H_2=0, \tag{1.1}$$

где

$$\hat\sigma_{11}=H_2\sigma_{11},\qquad \hat\sigma_{12}=H_1\sigma_{12},\qquad \hat\sigma_{13}=H_1H_2\sigma_{13},\qquad \hat\sigma_{31}=H_2\sigma_{31},$$
$$H_1=A_1\Big(1+\frac{x_3}{R_1}\Big),\qquad A_1'=\frac{A_1}{R_1},\qquad A_{12}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\quad(1\leftrightarrows 2),$$
$$\hat\sigma_{33}=H_1H_2\sigma_{33},$$

σ_{ij} — напряжения; q_i — объемные силы; A_1, A_2, R_1, R_2 — коэффициенты Ламе и радиусы главных кривизн поверхности $x_3=0$. Здесь и ниже запись $1\rightleftarrows 2$ подразумевает наличие уравнений и соотношений, которые получаются из предыдущих заменой индекса 1 на 2, а индекса 2 на 1.

В линейной теории упругости компоненты тензора деформаций e_{ij} выражаются через компоненты вектора перемещения $\boldsymbol{U}(u_1,u_2,u_3)$ по формулам

$$e_{11}=\frac{1}{H_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+u_2A_{12}+u_3A_1'\Big),$$
$$2e_{12}=\frac{1}{H_1}\Big(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-u_1A_{12}\Big)+\frac{1}{H_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-u_2A_{21}\Big), \tag{1.2}$$
$$2e_{31}=2e_{13}=\frac{1}{H_1}\Big(\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}-u_1A_1'\Big)+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\quad(1\leftrightarrows 2),\qquad e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций запишем в виде

$$\sigma_{ij}=a_{ijmn}e_{mn},\qquad i,j=1,2,3. \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.3) коэффициенты a_{ijmn} удовлетворяют условиям

$$a_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}-c\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\geqslant 0,\qquad a_{ijmn}=a_{jimn}=a_{ijnm},$$

где c — неотрицательная постоянная; по немым индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Предполагается, что краевые условия для напряжений и перемещений заданы в виде

$$\big[a_{im}^{\pm}u_i+(1-a_{im}^{\pm})\hat\sigma_{im}\big]_{\alpha_m=x_m^{\pm}}=\varphi_{im}^{\pm},\qquad m=1,2,$$
$$\big[a_{i3}^{\pm}u_i+(1-a_{i3}^{\pm})\hat\sigma_{i3}\big]_{x_3=x_3^{\pm}}=\varphi_{i3}^{\pm},\qquad i=1,2,3, \tag{1.4}$$

где $a_{i3}^{\pm}$ — заданные кусочно-постоянные функции переменных α_1,α_2, равные нулю или единице; $\varphi_{i3}^{\pm}$ — заданные кусочно-непрерывные функции переменных α_1,α_2; $a_{im}^{\pm}$ — постоянные, равные нулю или единице.

Заметим, что уравнения равновесия элемента среды, размер которого в направлении оси x_3 равен $h=x_3^+-x_3^-$, а размеры в направлениях α_1 и α_2 бесконечно малы, можно записать в виде

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial\hat\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{13}}{\partial x_3}+\hat\sigma_{21}A_{12}+\hat\sigma_{31}A_1'-\hat\sigma_{22}A_{21}+q_1H_1H_2\Big)P_k\,d\zeta=0$$

$$(1\leftrightarrows 2),\qquad k=0,1, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial\hat\sigma_{31}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{33}}{\partial x_3}-\hat\sigma_{11}A_1'-\hat\sigma_{22}A_2'+q_3H_1H_2\Big)\,d\zeta=0,$$

где $P_k(\zeta)$ — полиномы Лежандра; $\zeta=(2/h)(x_3-(x_3^+ + x_3^-)/2)$.

2. Сведение трехмерной задачи к двумерной. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной уравнения (1.1) заменяются системой уравнений

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial\hat\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{13}}{\partial x_3}+\hat\sigma_{21}A_{12}+\hat\sigma_{31}A_1'-\hat\sigma_{22}A_{21}+q_1H_1H_2\Big)P_k\,d\zeta$$

$$(1\leftrightarrows 2),\quad k=0,1,\dots,N; \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial\hat\sigma_{31}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{33}}{\partial x_3}-\hat\sigma_{11}A_1'-\hat\sigma_{22}A_2'+q_3H_1H_2\Big)P_k\,d\zeta=0,$$

$$k=0,1,\dots,N-1. \tag{2.2}$$

В (2.1), (2.2) величины $\hat\sigma_{ij}$ при построении уравнений оболочки в N-м приближении аппроксимируются полиномами Лежандра (для некоторых величин используется две аппроксимации), так чтобы все слагаемые в подынтегральных выражениях являлись разложениями по полиномам Лежандра одной и той же степени:

$$\hat\sigma_{11}'=\sum_{k=0}^{k=N}\hat\sigma_{11}^kP_k,\qquad \hat\sigma_{12}'=\sum_{k=0}^{k=N}\hat\sigma_{12}^kP_k,\qquad \hat\sigma_{13}'=\sum_{k=0}^{k=N+1}\hat\sigma_{13}^kP_k,$$

$$\hat\sigma_{31}'=\sum_{k=0}^{k=N}\hat\sigma_{31}^kP_k,\qquad \hat\sigma_{33}'=\sum_{k=0}^{k=N}\hat\sigma_{33}^kP_k, \tag{2.3}$$

$$\hat\sigma_{31}''=\sum_{k=0}^{k=N-1}\hat\sigma_{31}^kP_k,\qquad \hat\sigma_{11}''=\sum_{k=0}^{k=N-1}\hat\sigma_{11}^kP_k\qquad (1\leftrightarrows 2).$$

Здесь

$$\hat\sigma_{11}^k=\frac12\,(1+2k)\int\limits_{-1}^{1}H_2\sigma_{11}P_k\,d\zeta,\qquad \hat\sigma_{12}^k=\frac12\,(1+2k)\int\limits_{-1}^{1}H_1\sigma_{12}P_k\,d\zeta,$$

$$\hat\sigma_{13}^k=\frac12\,(1+2k)\int\limits_{-1}^{1}H_1H_2\sigma_{13}P_kd\zeta,\qquad \hat\sigma_{31}^k=\frac12(1+2k)\int\limits_{-1}^{1}H_2\sigma_{31}P_k\,d\zeta, \tag{2.4}$$

$$\hat\sigma_{33}^k=\frac12(1+2k)\int\limits_{-1}^{1}H_1H_2\sigma_{33}P_k\,d\zeta\qquad (1\leftrightarrows 2),\quad k=0,1,\dots,N+1.$$

С учетом (2.3), (2.4) уравнения (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \hat\sigma'_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat\sigma'_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat\sigma'_{13}}{\partial x_3} + \hat\sigma'_{21} A_{12} + \hat\sigma'_{31} A'_1 - \hat\sigma'_{22} A_{21} + \hat q_1 = 0 \quad (1 \leftrightarrows 2); \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \hat\sigma''_{31}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat\sigma''_{32}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat\sigma''_{33}}{\partial x_3} - \hat\sigma''_{11} A'_1 - \hat\sigma''_{22} A'_2 + \hat q_3 = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\hat q_1 = \sum_{k=0}^{k=N} \hat q_1^k P_k \quad (1 \leftrightarrows 2), \qquad \hat q_3 = \sum_{k=0}^{k=N-1} \hat q_3^k P_k,$$

$$\hat q_i^k = \frac{1}{2}\,(1+2k) \int\limits_{-1}^{1} q_i H_1 H_2 P_k \, d\zeta, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Компоненты вектора смещений u_i аппроксимируются полиномами Лежандра u'_i, так чтобы полиномы $\hat\sigma'_{11}$, $\hat\sigma'_{12}$, $\hat\sigma'_{13}$, $\hat\sigma''_{31}$ $(1 \leftrightarrows 2)$, $\hat\sigma'_{33}$ и полиномы $\partial u'_1/\partial\alpha_1$, $\partial u'_1/\partial\alpha_2$, $\partial u''_1/\partial x_3$, $\partial u'_3/\partial\alpha_1$ $(1 \leftrightarrows 2)$, $\partial u''_3/\partial x_3$ имели одинаковую степень соответственно. Поэтому для перемещений принимаются следующие аппроксимации:

$$\begin{gathered} u'_1 = \sum_{k=0}^{k=N} u_1^k P_k, \qquad u''_1 = \sum_{k=0}^{k=N+2} u_1^k P_k \qquad (1 \leftrightarrows 2), \\ u'_3 = \sum_{k=0}^{k=N-1} u_3^k P_k, \qquad u''_3 = \sum_{k=0}^{k=N+1} u_3^k P_k. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Умножая уравнения (2.5) на u'_i, уравнение (2.6) на u'_3, складывая полученные равенства и интегрируя по области ω, получаем

$$\int\limits_{\omega} \Big(\frac{\partial \hat\sigma'_{\gamma\delta}}{\partial \alpha_\delta}\, u'_\gamma + \frac{\partial \hat\sigma'_{\gamma 3}}{\partial x_3}\, u'_\gamma + (\hat\sigma'_{21} A_{12} + \hat\sigma'_{31} A'_1 - \hat\sigma'_{22} A_{21}) u'_1 + (\hat\sigma'_{12} A_{21} + \hat\sigma'_{32} A'_2 - \hat\sigma'_{11} A_{12}) u'_2 + {}$$
$$+ \frac{\partial \hat\sigma'_{33}}{\partial x_3}\, u'_3 + \frac{\partial \hat\sigma''_{3\gamma}}{\partial \alpha_\gamma}\, u'_3 - (\hat\sigma''_{11} A'_1 + \hat\sigma''_{22} A'_2) u'_3 + \hat q_i u'_i \Big) d\omega = 0. \tag{2.8}$$

Так как $\partial\hat\sigma'_{\gamma 3}/\partial x_3$ $(\gamma = 1, 2)$ — разложения по полиномам Лежандра до степени N, то с учетом ортогональности полиномов Лежандра коэффициенты u'_γ в подынтегральном выражении можно заменить на u''_γ. Величина $\partial\hat\sigma'_{33}/\partial x_3$ — разложение по полиномам Лежандра до степени $N-1$, поэтому коэффициент u'_3 можно заменить на u''_3. С учетом этих замечаний (2.8) можно записать в виде

$$\int\limits_{\omega} \Big(\hat\sigma'_{\delta\gamma} \frac{\partial u'_\delta}{\partial \alpha_\gamma} + \hat\sigma''_{3\gamma} \frac{\partial u'_3}{\partial \alpha_\gamma} + \hat\sigma'_{i3} \frac{\partial u''_i}{\partial x_3} - (\hat\sigma'_{21} A_{12} + \hat\sigma'_{31} A'_1 - \hat\sigma'_{22} A_{21}) u'_1 - {}$$
$$- (\hat\sigma'_{12} A_{21} + \hat\sigma'_{32} A'_2 - \hat\sigma'_{11} A_{12}) u'_2 + (\hat\sigma''_{11} A'_1 + \hat\sigma''_{22} A'_2) \Big) \, d\omega =$$
$$= \int\limits_{\omega} \Big(\frac{\partial}{\partial \alpha_\delta}\, (\hat\sigma'_{\gamma\delta} u'_\gamma + \hat\sigma''_{3\delta} u'_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}\, (\hat\sigma'_{i3} u''_i) + \hat q_i u'_i \Big) d\omega. \tag{2.9}$$

В подынтегральном выражении левой части равенства (2.9), которую обозначим через E, в силу ортогональности полиномов Лежандра разложения $\hat{\sigma}'_{ij}$, $\hat{\sigma}''_{ij}$ можно заменить разложениями

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sigma_{ij}^k P_k(\zeta).$$

Тогда

$$E = \int\limits_{\omega} \Big(\hat{\sigma}_{11} \Big(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + A_{12} u'_2 + A'_1 u'_3 \Big) + \hat{\sigma}_{22} \Big(\frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + A_{21} u'_1 + A'_2 u'_3 \Big) + \\ + \hat{\sigma}_{12} \Big(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2} - A_{21} u'_2 \Big) + \hat{\sigma}_{21} \Big(\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} - A_{12} u'_1 \Big) + \hat{\sigma}_{13} \frac{\partial u''_1}{\partial x_3} + \hat{\sigma}_{31} \Big(\frac{\partial u'_3}{\partial x_1} - A'_1 u'_1 \Big) + \\ + \hat{\sigma}_{23} \frac{\partial u''_2}{\partial x_3} + \hat{\sigma}_{32} \Big(\frac{\partial u'_3}{\partial x_2} - A'_2 u'_2 \Big) + \hat{\sigma}_{33} \frac{\partial u''_3}{\partial x_3} \Big) \, d\omega.$$

Если для деформаций e_{ij} в (1.2) принять аппроксимацию

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \Big(\frac{\partial u'_1}{\partial \alpha_1} + u'_2 A_{12} + u'_3 A'_1 \Big),$$
$$2e_{12} = \frac{1}{H_1} \Big(\frac{\partial u'_2}{\partial \alpha_1} - u'_1 A_{12} \Big) + \frac{1}{H_2} \Big(\frac{\partial u'_1}{\partial \alpha_2} - u'_2 A_{21} \Big), \tag{2.10}$$
$$2e_{31} = 2e_{13} = \frac{1}{H_1} \Big(\frac{\partial u'_3}{\partial \alpha_1} - u'_1 A'_1 \Big) + \frac{\partial u''_1}{\partial x_3} \quad (1 \leftrightarrows 2), \qquad e_{33} = \frac{\partial u''_3}{\partial x_3},$$

то

$$E = \int\limits_{\omega} \sigma_{ij} e_{ij} H_1 H_2 \, d\omega. \tag{2.11}$$

Будем считать, что напряжения σ_{ij} связаны с деформациями (2.10) уравнениями

$$\sigma_{ij} = a_{ijks} e_{ks}, \qquad i, j, k, s = 1, 2, 3. \tag{2.12}$$

Так как в подынтегральное выражение в правой части равенства (2.9) входят производные от произведений полиномов $\hat{\sigma}'_{\gamma\delta} u'_{\gamma}$, $\hat{\sigma}''_{3\delta} u'_3$, $\hat{\sigma}'_{i3} u''_i$, граничные условия (1.4) заменяются условиями

$$\big[a^{\pm}_{\gamma m} u'_{\gamma} + (1 - a^{\pm}_{\gamma m}) \hat{\sigma}'_{\gamma m} \big]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}^{\pm}_{\gamma m}, \qquad \big[a^{\pm}_{3m} u'_3 + (1 - a^{\pm}_{3m}) \hat{\sigma}''_{3m} \big]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}^{\pm}_{3m}, \\ \gamma = 1, 2, \; m = 1, 2; \tag{2.13}$$

$$\big[a^{\pm}_{i3} u''_i + (1 - a^{\pm}_{i3}) \hat{\sigma}'_{i3} \big]_{x_3 = x_3^{\pm}} = \varphi^{\pm}_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.14}$$

где

$$\hat{\varphi}^{\pm}_{\gamma m} = \sum_{k=0}^{k=N} (\varphi^{\pm}_{\gamma m})^k P_k, \quad \gamma = 1, 2, \qquad \hat{\varphi}^{\pm}_{3m} = \sum_{k=0}^{k=N-1} (\varphi^{\pm}_{3m})^k P_k,$$

$$(\varphi^{\pm}_{im})^k = \frac{1}{2} (1 + 2k) \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{\pm}_{im} P_k \, d\zeta, \qquad i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2.$$

Условия (2.13) при $N = 1$ означают, что на боковых поверхностях оболочки заданы векторы сил, изгибающего и крутящего моментов либо соответствующие перемещения и углы поворота.

Двумерная задача N-го приближения состоит в нахождении функций σ'_{ij}, σ''_{ij}, u'_i, u''_i, удовлетворяющих уравнениям (2.3)–(2.7), (2.10)–(2.14).

Функции $\hat\sigma'_{ij}$, $\hat\sigma''_{ij}$, u'_i, u''_i, производные по α_i от которых содержатся в (2.5), (2.6), (2.10), будем называть основными, остальные функции $\hat\sigma^k_{ij}$, u^k_i — дополнительными. Соответственно коэффициенты при полиномах $P_k(\zeta)$ в разложениях

$$\hat\sigma'_{11}, \quad \hat\sigma'_{12}, \quad \hat\sigma''_{31} \quad (1 \leftrightarrows 2), \qquad u'_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.15}$$

будем называть основными функциями переменных α_1, α_2 (основных функций $9N + 6$), а в разложениях

$$\sigma'_{31} - \sigma''_{31}, \quad \hat\sigma'_{32} - \hat\sigma''_{32}, \quad \hat\sigma'_{i3}, \quad u''_i - u'_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ —} \tag{2.16}$$

дополнительными (дополнительных функций $3N + 13$).

Из (2.3), (2.4), (2.12) следует

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat\sigma'_{13} - H_1 H_2 a_{13ij} e_{ij}) P_k \, d\zeta = 0 \quad (1 \leftrightarrows 2), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N + 1,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat\sigma'_{33} - H_1 H_2 a_{33ij} e_{ij}) P_k \, d\zeta = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat\sigma'_{31} - H_2 a_{31ij} e_{ij}) P_N \, d\zeta = 0 \quad (1 \leftrightarrows 2).$$

Уравнения (2.14), (2.17) образуют замкнутую систему уравнений относительно дополнительных функций (2.16). При

$$u'_i = \frac{\partial u'_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial u'_i}{\partial \alpha_2} = \varphi^{\pm}_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.18}$$

любое решение этой системы удовлетворяет равенствам

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat\sigma'_{i3} u''_i) \, d\zeta = 0, \qquad \int\limits_{-1}^{1} u''_i \frac{\partial \hat\sigma'_{i3}}{\partial x_3} \, d\zeta = 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \hat\sigma'_{i3} \frac{\partial u''_i}{\partial x_3} \, d\zeta = \int\limits_{-1}^{1} a_{ijks} e_{ks} H_1 H_2 \, d\zeta = 0, \qquad e_{11} = e_{12} = 0,$$

$$2e_{31} = e_{13} = \frac{\partial u''_i}{\partial x_3} \quad (1 \leftrightarrows 2), \qquad e_{13} = \frac{\partial u''_3}{\partial x_3}.$$

Таким образом, при выполнении равенств (2.18) нулевое решение системы (2.14), (2.17) единственно и эта система разрешима относительно функций (2.16). Из решения системы (2.14), (2.17) дополнительные функции выражаются через $\varphi^{\pm}_{i3}$ и коэффициенты при полиномах u'_i, $\partial u'_i/\partial \alpha_1$, $\partial u'_i/\partial \alpha_2$ ($i = 1, 2, 3$). Используя эти выражения, уравнения двумерной задачи можно сформулировать только относительно основных функций (2.15).

Из (2.3), (2.4), (2.12) следует

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat{\sigma}'_{11} - H_2 a_{11ij} e_{ij}) P_k \, d\zeta = 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat{\sigma}'_{12} - H_1 a_{12ij} e_{ij}) P_k \, d\zeta = 0 \quad (1 \leftrightarrows 2), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (\hat{\sigma}''_{31} - H_2 a_{31ij} e_{ij}) P_k \, d\zeta = 0 \quad (1 \leftrightarrows 2), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Выражая содержащиеся в уравнениях (2.2), (2.6), (2.19) дополнительные функции через основные, получим замкнутую систему уравнений относительно основных функций. Эта система с краевыми условиями (2.13) представляет собой краевую задачу для $9N+6$ основных функций (2.15). Зная эти функции, можно определить дополнительные функции и, следовательно, найти деформации по формулам (2.10) и напряжения по формулам (2.12) в любой точке оболочки.

3. Уравнения упругого слоя в первом приближении. При построении двумерных уравнений слоя в первом приближении потребуем выполнения следующих условий.

1. Требование, чтобы напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия бесконечно малого элемента, заменяется менее строгим, а именно: напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия элемента, размеры которого бесконечно малы в направлениях α_1, α_2 и конечны в направлении x_3. Таким образом, напряжения должны удовлетворять уравнениям (1.5).

2. Если толщина слоя мала, то в силу принципа Сен-Венана краевые условия на его боковых поверхностях (2.13) можно разделить на две группы: условия, влияющие на решение во всей области, занятой слоем (будем называть их основными), и условия, влияющие на решение лишь в окрестности торцевых сечений. При построении двумерных уравнений потребуем, чтобы краевая задача была разрешима для любого вида основных краевых условий (2.13) и порядок системы дифференциальных уравнений не зависел от того, задаются ли на лицевых поверхностях слоя напряжения, смещения или их линейная комбинация.

3. Решение двумерных уравнений слоя должно удовлетворять энергетическому тождеству (2.9), что позволяет доказать единственность некоторого класса контактных задач [6].

Уравнения слоя, построенные на основе представлений для напряжений (2.3) и смещений (2.7), при $N = 1$ удовлетворяют перечисленным выше требованиям. В уравнениях первого приближения основными функциями являются используемые в теории оболочек усилия, моменты и соответствующие им осредненные по толщине слоя перемещения и углы поворотов поперечных сечений.

В общем случае напряженно-деформированного состояния система дифференциальных уравнений упругого слоя в первом приближении представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка и решения краевых задач можно получить лишь численными методами. Коэффициенты разложений (2.3) и (2.7) являются функциями переменных α_1 и α_2. Заменяя эти функции в единичном квадрате $\{-1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1, \; -1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1\}$ отрезками полиномов Лежандра по переменным α_1 и α_2, можно построить конечный моментный элемент [9]. В работе [10] с использованием аналогичных конечных элементов предложен итерационный алгоритм решения плоских задач теории упругости и решена задача о растяжении плоскости с трещиной. Из результатов сравнения численного решения с аналитическим следует, что уравнения слоя в первом приближении могут быть эффективно использованы при решении задач, имеющих особенности в напряженном состоянии.

В случае одномерного напряженно-деформированного состояния система уравнений упругого слоя в первом приближении является системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка (в общем случае — с переменными коэффициентами). Для цилиндрической оболочки с круговым поперечным сечением и для плоского слоя эта система становится системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, для которой можно построить общее решение. Приведем эти уравнения для цилиндрического слоя. В этом случае нужно положить

$$R_1 = R, \quad A_1 = R, \quad H_1 = R(1 + x_3/R), \quad R_2 = \infty, \quad A_2 = 1, \quad H_2 = 1,$$
$$\hat\sigma_{11} = \sigma_{11}, \quad \hat\sigma_{13} = R(1 + x_3/R)\sigma_{13}, \quad \hat\sigma_{31} = \sigma_{31}, \quad \hat\sigma_{33} = R\sigma_{33}.$$

Усилия и моменты вычисляются по формулам

$$T_{11} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\,dx_3 = \frac{h}{2}\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{11}\,d\zeta, \qquad M_{11} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}x_3\,dx_3 = \frac{h^2}{4}\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{11}\zeta\,d\zeta,$$
$$T_{31} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31}\,dx_3 = \frac{h}{2}\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{31}\,d\zeta.$$

В первом приближении разложения для напряжений имеют вид

$$\hat\sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_{11}^0 P_0 + \sigma_{11}^1 P_1, \qquad \hat\sigma_{31} = \sigma_{31} = \sigma_{31}^0 P_0 + \sigma_{31}^1 P_1,$$
$$\hat\sigma_{13} = R\Big(\sigma_{13}^0 + \frac{h}{6R}\,\sigma_{13}^1\Big)P_0 + R\sigma_{13}^1 P_1 + R\sigma_{13}^2 P_2. \qquad (3.1)$$

Усилия и моменты выражаются через коэффициенты разложений для напряжений по формулам

$$T_{11} = h\sigma_{11}^0, \qquad M_{11} = (h^2/6)\sigma_{11}^1, \qquad T_{31} = h\sigma_{31}^0.$$

При этом уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial\sigma_{11}^0}{R\,\partial\varphi} + \frac{2}{h}\,\sigma_{31}^1 + \frac{\sigma_{31}^0}{R} + q_1^0 = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{11}^1}{R\,\partial\varphi} + \frac{6}{h}\,\sigma_{13}^2 + \frac{\sigma_{13}^1}{R} + q_1^1 = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{13}^1}{R\,\partial\varphi} + \frac{2}{h}\,\sigma_{33}^1 - \frac{\sigma_{11}^0}{R} + q_3^0 = 0. \qquad (3.2)$$

Соотношения закона Гука представим в виде

$$\sigma_{11} = \alpha(e_{11} + \gamma e_{33}), \qquad \sigma_{33} = \alpha(e_{33} + \gamma e_{11}), \qquad \sigma_{13} = 2me_{13}, \qquad (3.3)$$

где $\alpha = 2/(1-\gamma)$; $\gamma = \nu/(1-\nu)$ для случая плоской деформации и $\gamma = \nu$ для случая плоского напряженного состояния. В соотношениях (3.3) напряжения отнесены к модулю сдвига μ.

Перемещения аппроксимируются следующими разложениями по полиномам Лежандра:

$$
\begin{aligned}
u_1' &= u_1^0 P_0 + u_1^1 P_1, \qquad u_3' = u_3^0 P_0,\\
u_1'' &= u_1^0 P_0 + u_1^1 P_1 + u_1^2 P_2 + u_1^3 P_3, \qquad u_3'' = u_3^0 P_0 + u_3^1 P_1 + u_3^2 P_2.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

В соответствии с (3.4) для деформаций получаем представления

$$
e_{11} = e_{11}^0 P_0 + e_{11}^1 P_1, \quad e_{33} = e_{33}^0 P_0 + e_{33}^1 P_1, \quad e_{13} = e_{13}^0 P_0 + e_{13}^1 P_1 + e_{13}^2 P_2, \tag{3.5}
$$

где

$$
e_{11}^0 = \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial u_1^0}{\partial\varphi} + u_3^0\Big), \qquad e_{11}^1 = \frac{1}{R}\,\frac{\partial u_1^1}{\partial\varphi},
$$

$$
2e_{13}^0 = \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial u_3^0}{\partial\varphi} - u_1^0 + \frac{2R}{h}\,(u_1^1 + u_1^3)\Big), \qquad 2e_{13}^1 = \frac{1}{R}\,u_1^3 + \frac{6}{h}\,u_1^2,
$$

$$
2e_{13}^2 = \frac{10}{h}\,u_1^3, \qquad e_{33}^0 = \frac{2}{h}\,u_3^1, \qquad e_{33}^1 = \frac{6}{h}\,u_3^2.
$$

Из (3.1), (3.4), (3.5) получаем

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}^0 &= \alpha\Big[\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial u_1^0}{\partial\varphi} + u_3^0\Big) + \gamma\,\frac{2}{h}\,u_3^1\Big], \qquad \sigma_{11}^1 = \alpha\Big(\frac{1}{R}\,\frac{\partial u_1^1}{\partial\varphi} + \gamma\,\frac{6}{h}\,u_3^2\Big),\\
\sigma_{33}^0 &= \alpha\Big[\gamma\,\frac{2}{h}\,u_3^1 + \gamma\,\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial u_1^0}{\partial\varphi} + u_3^0\Big)\Big], \qquad \sigma_{33}^1 = \alpha\Big(\frac{6}{h}\,u_3^2 + \gamma\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial u_1^1}{\partial\varphi}\Big),\\
\sigma_{13}^0 &= m\,\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial u_3^0}{\partial\varphi} - u_1^0 + \frac{2R}{h}\,(u_1^1 + u_1^3)\Big), \quad \sigma_{13}^1 = m\Big(\frac{u_1^3}{R} + \frac{6}{h}\,u_1^2\Big), \quad \sigma_{13}^2 = m\,\frac{10}{h}\,u_1^3.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Десять уравнений (3.2), (3.6) и четыре условия на лицевых поверхностях слоя

$$
\begin{aligned}
\alpha(u_1^0 + u_1^1 + u_1^2 + u_1^3) + (1-\alpha)(\sigma_{13}^0 + (1 + 1/(6R))\sigma_{13}^1 + \sigma_{13}^2) &= \varphi_{13}^+(\xi),\\
\alpha(u_1^0 - u_1^1 + u_1^2 - u_1^3) + (1-\alpha)(\sigma_{13}^0 - (1 + 1/(6R))\sigma_{13}^1 + \sigma_{13}^2) &= \varphi_{13}^-(\xi),\\
\alpha(u_3^0 + u_3^1 + u_3^2) + (1-\alpha)R(\sigma_{33}^0 + \sigma_{33}^1) &= \varphi_{33}^+(\xi),\\
\alpha(u_3^0 - u_3^1 + u_3^2) + (1-\alpha)R(\sigma_{33}^0 - \sigma_{33}^1) &= \varphi_{33}^-(\xi)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

образуют замкнутую систему уравнений относительно шести основных функций

$$
u_1^0, \quad u_1^1, \quad u_3^0, \quad \sigma_{11}^0, \quad \sigma_{11}^1, \quad \sigma_{13}^0
$$

и восьми дополнительных функций

$$
u_1^2, \quad u_1^3, \quad u_3^1, \quad u_3^2, \quad \sigma_{13}^2, \quad \sigma_{11}^3, \quad \sigma_{33}^0, \quad \sigma_{33}^1.
$$

Введем безразмерные переменные:

$$
\bar\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \bar\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\mu}, \quad \bar u_i = \frac{2u_i}{h\varepsilon_0},
$$

$$
\xi = \frac{x_1}{L_0}, \quad \zeta = \frac{2x_3}{h}, \quad \eta = \frac{h}{2R}, \quad \bar q_i^0 = \frac{q_i^0 h}{2\sigma_0}
$$

(σ_0, L_0 — характерные величины, имеющие размерности напряжения и длины соответственно; ε_0 — характерная деформация). Черта над безразмерными величинами в дальнейшем опускается.

В безразмерных переменных аппроксимации напряжений (3.1) и смещений (3.4) записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\sigma'_{11} = t_{11} + m_{11}P_1, \qquad \sigma'_{13} = t_{13} + m_{13}P_1 + r_{13}P_2,\\
\sigma'_{31} = t_{31}, \qquad \sigma'_{33} = t_{33} + m_{33}P_1,\\
u'_1 = u_0 + u_1P_1, \quad u'_3 = v_0, \quad u''_1 = u_0 + u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3, \quad u''_3 = v_0 + v_1P_1 + v_2P_2,
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

где

$$
\begin{gathered}
t_{11} = \frac{T_{11}}{h\sigma_0}, \qquad t_{31} = t_{13} = \frac{T_{21}}{h\sigma_0}, \qquad m_{11} = \frac{6M_{11}}{h^2\sigma_0},\\
u_0 = \frac{1}{h\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{u_1}{h}\,dx_3, \qquad u_1 = \frac{6}{h^2\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{u_1}{h}\,x_3\,dx_3, \qquad v_0 = \frac{1}{h\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{u_3}{h}\,dx_3.
\end{gathered}
$$

Система дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений (3.8) в безразмерных переменных записывается в виде

$$
\begin{gathered}
\eta(t'_{11} + t_{13}) + (\sigma^+_{13} - \sigma^-_{13})/2 + q^0_1 = 0, \qquad \eta(t'_{13} + t_{11}) + (\sigma^+_{33} - \sigma^-_{33})/2 + q^0_3 = 0,\\
\eta m'_{11} - 3t_{13} + 3(\sigma^+_{13} + \sigma^-_{13})/2 + q^1_1 = 0,\\
t_{11} = \alpha(\eta(u'_0 + v_0) + \gamma v_1), \qquad t_{33} = \alpha(\gamma\eta(u'_0 + v_0) + v_1),\\
m_{11} = \alpha(\eta u'_1 + 3\gamma_1 v_2), \qquad m_{33} = \alpha(\gamma\eta u'_1 + 3v_2),\\
t_{13} = (\eta(v'_0 - u_0) + u_1 + u_3), \qquad m_{13} = 3(u_2 + v_1), \qquad r_{12} = 5mu_3.
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Из уравнений (3.7) дополнительные величины можно выразить через основные и через величины, заданные на поверхностях слоя. Подставляя эти выражения в уравнения (3.9), получим систему дифференциальных уравнений шестого порядка относительно основных величин, порядок которой не зависит от вида краевых условий на лицевых поверхностях слоя.

Если ввести вектор

$$
\boldsymbol{Z} = [u_0,\ u_1,\ v_0,\ t_{11},\ m_{11},\ t_{13}]^{\text{т}},
$$

то систему уравнений цилиндрического слоя в первом приближении можно записать в виде

$$
\boldsymbol{Z}' = H\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}, \tag{3.10}
$$

где H — квадратная матрица размера 6×6; $\boldsymbol{F}$ — вектор с шестью компонентами.

При $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$ для системы (3.10) ставятся краевые условия вида

$$
A\boldsymbol{X} + B\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C},
$$

где

$$
\boldsymbol{X} = \begin{Vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{Vmatrix} t_{11} \\ m_{11} \\ t_{12} \end{Vmatrix},
$$

A, B — заданные матрицы размера 3×3; $\boldsymbol{C}$ — заданный вектор с тремя компонентами.

Если в уравнениях (3.7), (3.9) величину $1/R$ заменить величиной $\eta = h/L_0$, то они перейдут в уравнения упругого плоского слоя [7]. В работе [7] выписаны общие решения уравнений упругого плоского слоя для различных условий на его лицевых поверхностях.

С использованием уравнений плоского упругого слоя и их общих решений, приведенных в [7], решен ряд контактных задач и задач со смешанными краевыми условиями на лицевых поверхностях слоя [10–13].

4. Уравнения слоистых оболочек. Если оболочка состоит из нескольких упругих слоев, то для каждого слоя можно записать уравнения, приведенные в пп. **1–3**. К полученной системе уравнений необходимо добавить условия сопряжения для напряжений и смещений на поверхностях, разделяющих слои. Эти условия формулируются в терминах следующих отрезков полиномов Лежандра:

$$\hat{\sigma}'_{13}, \quad \hat{\sigma}'_{23}, \quad \hat{\sigma}''_{33}$$

для напряжений и

$$u''_1, \quad u''_2, \quad u''_3$$

для смещений.

При определении напряженно-деформированного состояния в слоистых оболочках возможны различные варианты численных алгоритмов построения решения. Используя условия сопряжения для напряжений и смещений на границах между слоями, можно построить систему дифференциальных уравнений для слоистой оболочки. Однако такой вариант оказывается недостаточно эффективным, если число слоев в пакете велико. В этом случае для решения задачи может быть использован итерационный алгоритм [10].

Заключение. Уравнения, построенные в данной работе, допускают постановку смешанных условий на лицевых поверхностях оболочки, что позволяет использовать их при решении контактных задач с неизвестной границей, разделяющей области с различными краевыми условиями. Кроме того, эти уравнения учитывают конечную сдвиговую жесткость. Изложенный в работе подход может быть использован для построения уравнений оболочек и в других криволинейных системах координат [14–16]. Алгоритм построения уравнений оболочек не изменится, если коэффициенты a_{ijks} в соотношениях (2.10) будут являться функциями переменных α_1, α_2, x_3. Поэтому предложенный подход может быть использован для построения уравнений неоднородных анизотропных оболочек [17], а также в случае нелинейных определяющих соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
2. **Солер А.** Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
4. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980.
5. **Пелех Б. Л.** Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. Киев: Наук. думка, 1982.
6. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.
7. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.

8. **Vajeva D. V., Volchkov Yu. M.** The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells // Proc. of the 9th Russian-Korean symp. on sci. and technol., Novosibirsk, 26 June — 2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.
9. **Волчков Ю. М.** Конечные элементы с условиями сопряжения на их гранях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 175–180.
10. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В.** Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
11. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 189–195.
12. **Алексеев А. Е.** Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.
13. **Алексеев А. Е., Демешкин А. Г.** Об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 151–158.
14. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
15. **Алексеев А. Е., Алехин В. В., Аннин Б. Д.** Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 136–141.
16. **Алексеев А. Е., Аннин Б. Д.** Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 157–163.
17. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Уравнения упругого анизотропного слоя // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 188–198.

Поступила в редакцию 30/X 2006 г.