СФЕРИЧЕСКОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

А. К. Ребров, С. Ф. Чекмарев

(Новосибирск)

Численно на основе уравнений Навье — Стокса исследуется сферическое истечение газа в пространство с ненулевым давлением. Решение краевой задачи проводится методом установления. Метод позволяет проанализировать влияние числа Рейнольдса, отношения давлений на звуковой сфере и в окружающем пространстве, а также температуры в окружающем пространстве на распределение параметров в области течения. Показывается, в частности, что для постоянного числа Рейнольдса и различных отношений давления линия расширения вязкого теплопроводного газа в вакуум будет огибающей для распределений параметров в сверхзвуковой области. Результаты расчета сравниваются с данными других авторов.

Влияние вязкости и теплопроводности на сферическое истечение газа в затопленное пространство рассматривалось в ряде теоретических работ. В большинстве из них для изучения уравнений Навье — Стокса использовался метод малого параметра [1, 2]. Метод позволяет провести качественные, а в некоторых случаях и количественные рассмотрения для больших чисел Рейнольдса R_*.

Вопросы истечения вязкого теплопроводного газа в вакуум рассматривались М. Д. Ладыженским [3].

По-видимому, впервые в достаточно полном виде решение задачи было получено В. Н. Гусевым и А. В. Жбаковой [4]. Идея использованного авторами метода состоит в замене возникающей краевой задачи задачей Коши. Для нахождения начальных условий использовалось разложение в окрестности бесконечно удаленной точки $r = \infty$, и последующее интегрирование проводилось вверх по потоку.

Метод, очевидно, не имеет существенных ограничений на величины числа R_* и отношения давления p_*/p_∞. Однако каждое конкретное в смысле коэффициентов разложение устанавливает определенную связь между R_* и p_*/p_∞, и расчет, например, для неизменного числа R_* и различных p_* / p_∞ потребует различных разложений, причем подбор коэффициентов для каждого p_* / p_∞ не очевиден. Последнее вносит затруднение в анализ влияния числа Рейнольдса и отношения давлений на структуру течения.

В данной работе предлагается иной подход: при переходе к термодинамическим переменным указанной особенности при $r \to \infty$ не возникает и краевая задача может быть решена стандартным методом, в частности методом установления. Анализ картины течения при таком подходе значительно упрощается.

Как и в большинстве предыдущих работ, рассмотрения проводятся для случая, когда давление торможения истекающего газа много больше давления в окружающем пространстве. Случай этот представляется наиболее интересным как в теоретическом, так и в практическом отношении [2, 4].

Сферическое расширение газа при большом отношении давлений может быть реализовано и на практике [5], однако имеющейся экспериментальной информации пока недостаточно, чтобы провести сравнение результатов теории и эксперимента.

Постановка задачи. Сферическое течение вязкого теплопроводного газа описывается системой уравнений

$$\rho u \frac{du}{dr} + \frac{1}{M_*^2} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{R_*} \left\{ \frac{4}{3} \frac{d}{dr} \left[\frac{\mu}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] - \frac{4u}{r} \frac{d\mu}{dr} \right\} \tag{1}$$

$$\rho u \frac{dT}{dr} - (\gamma - 1) u \frac{dp}{dr} = \frac{1}{R_*} \left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\mu r^2 \frac{dT}{dr} \right) - \frac{4}{3} (\gamma - 1) \mu M_*^2 \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{u^2}{r} \right) - \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \right] \right\} \tag{2}$$

$$\rho u r^2 = 1, \qquad p = \frac{1}{\gamma} \rho T \tag{3}$$

Здесь σ — число Прандтля, $\mu = \mu(T)$ — некоторая зависимость вязкости от температуры. Параметры течения в (1) — (3) являются безразмерными

$$r = \frac{r'}{r_*'}, \quad u = \frac{u'}{u_*'}, \quad T = \frac{T'}{T_*'}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_*'}, \quad p = \frac{p'}{\rho_*' u_*'^2} \tag{4}$$

$$\mu = \frac{\mu'}{\mu_*'}, \quad R_* = \frac{\rho_*' u_*' r_*'}{\mu_*'}, \quad M_* = \frac{u_*'}{\sqrt{\gamma' R' T_*'}}, \quad \sigma = \frac{\mu_*' c_p'}{k_*'}$$

Число Прандтля σ и отношение теплоемкостей γ предполагаются постоянными.

Пусть газ истекает в пространство с ненулевым давлением и конечной температурой. В этом случае всегда имеется поверхность с некоторым $r = r_1$, за которой течение газа будет существенно дозвуковым, $M_1^2 \ll 1$. Из рассмотрения уравнения переноса тепла (2) для $r > r_1$ следует, что для сферического истечения условие ограниченности температуры газа при $r \to \infty$, $dT / dr = 0$ не является достаточным и температура на бесконечности должна быть задана. Следовательно, на бесконечности, т. е. в окружающем пространстве могут быть заданы произвольными значения двух термодинамических параметров.

На поверхности источника также могут быть заданы параметры состояния газа. При этом задание R_* и M_* определит величину расхода и r_*'.

Использование краевого условия по скорости неудобно, так как точка $u(\infty)$ является особой [2].

Запишем граничные условия в виде

$$\rho = 1,\ T = 1 \ \text{ при } \ r = 1,\ \rho \to \rho_\infty,\ T \to T_\infty \ \text{при}\ r \to \infty \tag{5}$$

Метод решения. Исключая из (1) — (3) скорость и давление и вводя преобразования типа $r = 1 + \alpha\, \mathrm{tg}\, (^1/_2\, \pi y)$, запишем систему в форме, удобной для последующей линеаризации

$$A_1 \frac{d^2\rho}{dy^2} + B_1 \frac{d\rho}{dy} + C_1\rho = D_1 \tag{6}$$

$$A_2 \frac{d^2T}{dy^2} + B_2 \frac{dT}{dy} + C_2T = D_2 \tag{7}$$

$$\rho = 1,\ T = 1 \ \text{при}\ y = 0, \quad \rho = \rho_\infty,\ T = T_\infty \quad \text{при}\ y = 1$$

Здесь α — некоторая констана, а A_k, B_k, C_k, D_k — выражения, остающиеся после выделения линейной части и зависящие в общем случае от y, ρ, T, $d\rho / dy$, dT / dy и R_*, σ, M_*, γ, α.

Решение задачи (6) — (7) проводилось методом установления с использованием неявной схемы. Сетка по пространству y выбиралась равномерной с числом разбиений N и шагом h.

Линеаризованная система

$$\rho_i^j \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_i^{j+1} + A_{1i}^j \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^{j+1} + B_{1i}^j \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_i^{j+1} + C_{1i}^j \rho_i^{j+1} = D_{1i}^j$$

$$\rho_i^j \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{j+1} + A_{2i}^j \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_i^{j+1} + B_{2i}^j \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_i^{j+1} + C_{2i}^j T_i^{j+1} = D_{2i}^j$$

$$\rho_0^j = 1, \quad \rho_N^j = \rho_\infty, \qquad T_0^j = 1, \quad T_N^j = T_\infty$$

где

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^{j+1} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i^{j+1} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i^{j+1} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}}{2h}$$

на каждой $j + 1$ итерации решалась методом прогонок [6, 7]. Величина итерационного параметра τ в процессе установления не менялась.

Начальное приближение $\rho_i^\circ = \varphi_1(i)$, $T_i^\circ = \varphi_2(i)$, как правило, выбиралось следующим образом: плотность для $0 \leqslant i \leqslant i_0$ вычислялась по изэнтропическим формулам и для $i_0 < i \leqslant N$ полагалась равной ρ_∞ (i_0 — максимальный номер точки, где плотность, соответствующая изэнтропическому расширению, не меньше ρ_∞)

$$T_i^\circ = T_\infty - (\gamma - 1) / 2\, (\rho_i^\circ r_i^2)^2$$

для

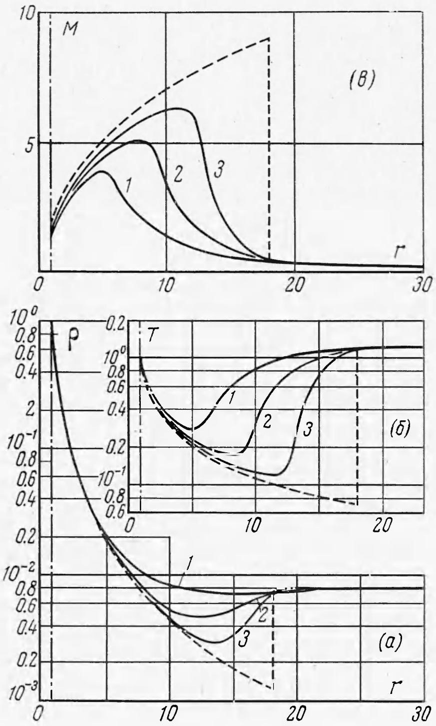
$$0 \leqslant i \leqslant N$$

Счет прекращался при достижении

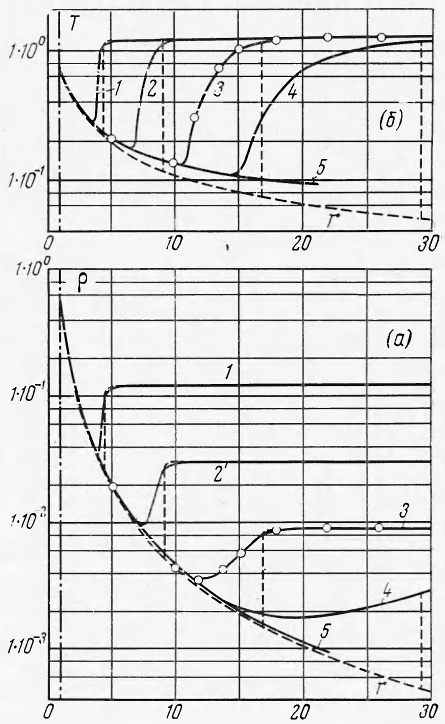
$$\max_i \left[\, \left|\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)_i^{j+1}\right|, \ \left|\left(\frac{\partial \ln T}{\partial t}\right)_i^{j+1}\right| \,\right] \leqslant \varepsilon_0$$

Величины τ, h, ε_0 подбирались путем контрольных просчетов. Например, при $R_* = 100$ и $p_* / p_\infty = 92.7$ было получено $h = 2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 5 \cdot 10^{-2}$ и процесс устанавливался за 500 итераций.

Обсуждение результатов. При сферическом истечении идеального газа в пространство с ненулевым давлением $p_\infty < p_{0*}$ реализуется следующая характерная структура: газ, изэнтропически расширяясь с некоторой звуковой или сверхзвуковой поверхности, перерасширяется до давления, меньшего p_∞. Затем происходит торможение газа в ударной волне, сопровождающееся восстановлением давления, и дальнейшее, уже изэнтропическое, торможение до параметров затопленного пространства. Положение ударной волны определяется отношением p_{0*}/p_∞. Заметим, что идеальное решение может быть построено лишь в случае $T_\infty = T_{0*}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1—3 представлены типичные результаты расчетов, иллюстрирующие истечение вязкого теплопроводного газа со звуковой поверхности, $M_* = 1$. В качестве зависимости вязкости от температуры использовалась формула Сазерленда

$$\mu = T^{3/2}\frac{1 + T_s}{T + T_s}$$

Расчеты проводились для воздуха ($\gamma = 1.4$, $T'_s = 104°$ K) с температурой торможения на звуковой сфере $T_{0*}' = 293°$ K.

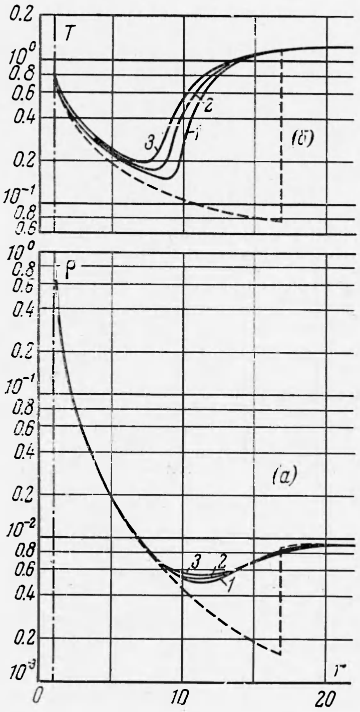
Распределение параметров потока p, T, M для $p_*/p_\infty = 109$, $T_\infty/T_* = 1.2$, $\sigma = 0.7$ приведено на фиг. 1 (кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $R_* = 50$, 100, 200; штриховая кривая — решение для идеального газа). Кроме очевидных закономерностей следует отметить, что кривые плотности пересекаются в малой окрестности точки, соответствующей значению плотности за ударной волной при идеальном рассмотрении.

Отход полученных распределений параметров потока от изэнтропических начинается практически от звуковой поверхности.

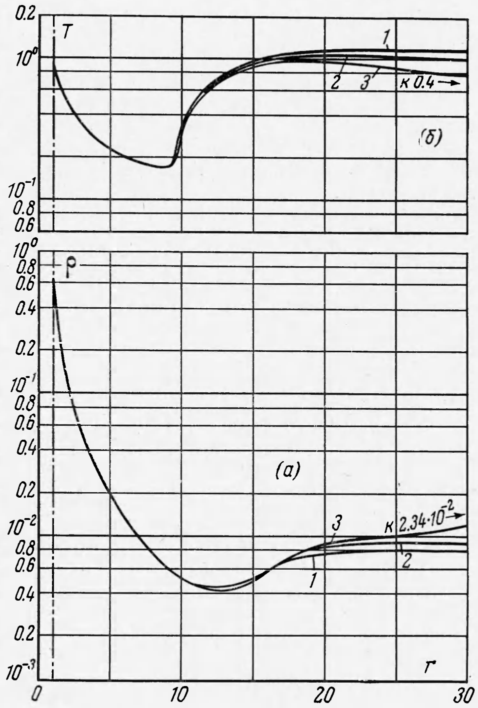
Расчеты, проведенные для постоянных чисел R_* и различных значений p_* / p_∞ (в частности, для значений $R_* = 161.83$, $T_\infty / T_* = 1.2$ и $\sigma = 0.7$ приведены на фиг. 2, где кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют значениям $p_*/ p_\infty = 6.94$, 27.8, 92.7, 278), показывают, что величина отхода в значительной части сверхзуковой области не связана с положением ударной волны и определяется только числом R_*, т. е. собственное влияние ударной волны на течение вверх по потоку локализовано (на фиг. 2 штриховые кривые — решение для идеального газа, кружочки — результаты работы [4]).

Отнесем расстояние от идеального положения ударной волны до точки с минимумом температуры к длине свободного пробега в последней. На исследованных режимах это отношение было порядка $6 \div 9$ и имело тенденцию к повышению с возрастанием числа M «перед» ударной волной. Отношение в известной мере может служить характеристикой толщины ударной волны в длинах свободного «набегающего потока».

Очевидно, что влияние ударной волны вверх по потоку определяется еще и величиной числа σ. Это можно видеть по данным фиг. 3, где кривые *1*, *2*, *3* соответствуют течениям $\sigma = 1.0, 0.7, 0.5$. Вычисления проведены для $R_* = 100$, $T_\infty / T_* = 1.2$, $p_* / p_\infty = 92.7$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, при постоянном σ распределение параметров в области, прилегающей к звуковой сфере и ограниченной для каждого p_* / p_∞ началом влияния ударной волны, определяется только числом R_* и не зависит от величины давления в окружающем пространстве. Результаты, представленные на фиг. 4 (где кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $T_\infty / T_* = 1.2, 1.0, 0.4$, а расчеты проведены при значениях $R_* = 100$, $p_* / p_\infty = 109$, $\sigma = 0.7$), показывают, что и влияние температуры в окружающем пространстве не распространяется на эту область. Можно предполагать, что ситуация сохранится при $p_\infty \to 0$ ($p_* / p_\infty \to \infty$ для $R_* = \mathrm{const}$). Тогда огибающие распределений параметров (кривые *5* на фиг. 2) будут соответствовать начальному участку расширения вязкого теплопроводного газа в вакуум.

Замечание относительно температуры, вообще говоря, существенно, потому что при истечении в вакуум можно задать при $r \to \infty$ только отсутствие обмена импульсом и потока тепла в окружающее пространство за счет теплового взаимодействия молекул и T_∞ может оказаться не равной T_{0*}. Действительно, из анализа работы [3] следует, что при сферическом истечении в вакуум при $r \to \infty$ $u \to 0$ и, следовательно, $T_{0\infty} \to T_\infty$. При конечных числах R_* температура торможения в области течения не сохраняется и $T_{0\infty}$ может отличаться от T_{0*}; последнее хорошо видно на примере цилиндрического источника [8].

Расчеты для $R_* = 161.83$, например, проводились до $p_* / p_\infty \sim 10^8$, практически это соответствует истечению в глубокий вакуум.

Положение огибающих (назовем их кривыми вязкого расширения в вакуум) определяется условиями на звуковой сфере и величинами чисел R_* и σ. Зависимость от числа σ, как это видно на фиг. 3, проявляется довольно слабо.

Аналогичные кривые были получены ранее в работе [2]. Однако независимость распределений в области до ударной волны от условий окружающего пространства не следовала из анализа, а постулировалась, чтобы иметь возможность построить решение во всей области течения.

При распространении уравнений Навье — Стокса на случай истечения газа в вакуум, практически в пространство с очень низким давлением, естественно, возникает вопрос о правомерности их использования. Вопрос этот подробно обсуждался в [3].

Авторы благодарят М. А. Гольдштика и Б. Г. Кузнецова за полезные обсуждения.

Поступила 2 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Sakurai A. Three-dimensional steady radial flow of viscous, heat-conducting compressible fluid. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 3.
2. Sherman F. S. A source-flow model of viscous effects in hypersonic axisymmetric free jets. Arch. Mech. Stosowanej, 1964, vol. 16, No. 2.
3. Ладыженский М. Д. Об истечении вязкого газа в пустоту. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
4. Gusev V. N., Zhbakova A. V. The flow of a viscous heat-conducting compressible fluid into a constant presure medium. Rarefied Gas Dynamics, New York — London, Acad. Press., 1969, vol. 1.
5. Бочкарев А. А., Ребров А. К., Чекмарев С. Ф. О гиперзвуковом сферическом расширении газа со стационарной ударной волной. ПМТФ, 1969, № 5.
6. Яненко Н. Н., Неуважаев В. Е. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 74, ч. 1.
7. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 5.
8. Levey H. C. Two dimensional source flow of viscous fluid. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 1.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ГЛАДКИХ И ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАДИЕНТАХ ДАВЛЕНИЯ

А. Г. Марченко

(Киев)

Излагаются результаты экспериментального исследования установившегося плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на непроницаемой стенке. Рассматриваются случаи течения у гладкой и шероховатой поверхности при наличии продольного градиента давления. Приведены результаты измерения турбулентной структуры течения на различных расстояниях от входа в канал. Дан подробный анализ кинематических и динамических характеристик потока. Особое внимание уделено пристеночной области течения. Предложен универсальный закон изменения местного коэффициента сопротивления вдоль пограничного слоя.

Обозначения: U, V — продольная и поперечная составляющие осредненной скорости; u, v — компоненты пульсаций скорости; P — осредненная величина давления; τ — касательное напряжение; u_* — динамическая скорость; C_f — местный коэффициент поверхностного трения; ρ — плотность; ν — кинематическая молекулярная вязкость; ε — эффективная вязкость; δ — толщина пристенного подслоя; s — толщина области действия закона стенки; h — толщина пограничного слоя; x, y — координаты пространства; T — время осреднения скорости при фотосъемке.

Индексы означают условия: 0 — на стенке, δ — на внешней границе пристенного подслоя, s — на границе области действия закона стенки, ∞ — на внешней границе пограничного слоя.

1. Экспериментальная установка. Эксперимент выполнен на гидродинамическом стенде периодического действия с вертикальным расположением рабочей части (фиг. 1).