

AMS subject classification: 65M60, 65M12, 65M15

## Априорный анализ ошибки устойчивой схемы конечных элементов для эллиптического уравнения с зависящими от времени граничными условиями

Н. Абу Джаме, Т. Ел Арвади, С. Диб

Department of Mathematics, Faculty of Science, Beirut Arab University, P.O. Box 11-5020, Beirut, Lebanon

E-mails: nouraboujmeih@hotmail.com (Абу Джаме Н.), t.elarwadi@bau.edu.lb (Ел Арвади Т.), s.dib@bau.edu.lb (Диб С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 14, 2021.

Абу Джаме Н., Ел Арвади Т., Диб С. Априорный анализ ошибки устойчивой схемы конечных элементов для эллиптического уравнения с зависящими от времени граничными условиями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 345–363.

Цель данного исследования — реализация численной схемы для нахождения собственных значений полугруппы Дирихле–Неймана. Она может использоваться для проверки ее положительности для некруговых областей. Анализ этой обобщенной схемы проводится после изучения случая единичного шара, где явное представление полугруппы было получено Питером Лаксом. После анализа обобщенной схемы мы проверили ее сходимость при помощи численного моделирования, выполненного с использованием программного обеспечения FreeFem++.

DOI: 10.15372/SJNM20210401

**Ключевые слова:** конечно-элементная схема, априорный анализ ошибки, динамические граничные условия, полугруппа Дирихле–Неймана.

Abou Jmeih N., El Arwadi T., Dib S. A priori error analysis of a stabilized finite-element scheme for an elliptic equation with time-dependent boundary conditions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 345–363.

This study aims to implement a numerical scheme in order to find the eigenvalues of the Dirichlet-to-Neumann semigroup. This can be used to check its positivity for non-circular domains. This generalized scheme is analyzed after studying the case of the unit ball, in which an explicit representation for the semigroup was obtained by Peter Lax. After analyzing the generalized scheme, we checked its convergence through numerical simulations that were performed using FreeFem++ software.

**Keywords:** finite element scheme, a priori error analysis, dynamical boundary conditions, Dirichlet-to-Neumann semigroup.

---

## 1. Введение

В своей статье “Неположительность полугруппы, генерируемой оператором Дирихле–Неймана” Даниэль Дэнерс исследовал положительность и неположительность полугруппы, генерируемой оператором Дирихле–Неймана (ДН) в одномерном и двумерном единичных шарах [8]. Он использовал базис Фурье для явного представления оператора ДН и его полугруппы. Однако в некруговых областях, где трудно найти явное представление для базиса области, эта методология не может быть использована для оператора или его

полугруппы. Чтобы преодолеть эту проблему нужна численная схема для проверки положительности полугруппы ДН для некруговых областей. Цель данного исследования — реализация такой схемы.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная открытая область в  $\mathbb{R}^2$  с непрерывной по Липшицу связной границей  $\Gamma$ , и пусть  $]0, T[$  — интервал в  $\mathbb{R}$ , где  $T \in (0, +\infty)$  — фиксированное конечное время. Мы будем работать со следующей зависящей от времени линейной эллиптической задачей с динамическими граничными условиями:

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x) = 0 & \text{в } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + n(x) \nabla u(t, x) = 0 & \text{на } ]0, T[ \times \Gamma, \\ u(0, x) = u_0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $n(x)$  — единичный вектор внешней нормали в  $x \in \Gamma$ , а  $u_0$  — начальное условие во время  $t = 0$ . След  $u$  на границе — это именно полугруппа Дирихле–Неймана, действующая на  $u_0$ . Начнем с определения оператора Дирихле–Неймана  $D_\lambda$ . Пусть  $w$  является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta w + \lambda w = 0 & \text{в } \Omega, \\ w = \phi & \text{на } \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

Эта задача имеет единственное решение  $w$  в  $H^1(\Omega)$ , если  $\lambda$  не является собственным значением  $(-\Delta)$  с граничными условиями Дирихле и  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Если  $w$  достаточно гладкое, мы определим полугруппу Дирихле–Неймана следующим образом:

$$D_\lambda \phi = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma.$$

Если ее часть в  $L^2(\partial\Omega)$  мы опять обозначим  $D_\lambda$ , то  $-D_\lambda$  генерирует  $C_0$  полугруппу  $e^{-tD_\lambda}$  на  $L^2(\partial\Omega)$ . Этот оператор был темой многочисленных статей, описывающих такую полугруппу (см., например, [4, 6, 10, 11]). Эллиптическая задача с динамическими граничными условиями изучалась во многих публикациях (см., например, [1, 9]).

В данном исследовании мы предлагаем и анализируем полную дискретную численную схему для аппроксимации решения задачи. Устанавливаются некоторые априорные оценки ошибки. В качестве приложения мы численно вычисляем собственные значения оператора ДН для  $-\Delta + \lambda I$  в двух измерениях для определения собственных значений полугруппы ДН. Впоследствии мы сравниваем вычисленные собственные значения с точными собственными значениями, полученными Даниэлем Дэнерсом [8].

Остальная часть статьи организована следующим образом. В пункте 2 мы изучаем непрерывную задачу. В п. 3 рассматривается дискретная задача и ее основные свойства. В п. 4 изучаются априорные оценки ошибки. Наконец, в п. 5 представлены некоторые примеры численного моделирования.

## 2. Анализ модели

Чтобы записать вариационную формулировку задачи (1.2), напомним пространство Соболева:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\},$$

имеющее следующие полунорму и норму:

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad \|v\|_{H^m(\Omega)} = \left\{ \sum_{k \leq m} |v|_{k,\Omega}^2 \right\}^{1/2}.$$

Как обычно, обозначим при помощи  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$  (см. [2]).

Для существования и единственности решения задачи (1.2) обратимся к теореме, представленной в книге И. Врание [16, с. 169].

Перед введением вариационного подхода к задаче нам нужно представить лемму, которая поможет нам доказать эквивалентность между этими двумя задачами.

**Лемма 1** [2]. Пусть  $\Omega$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^N$ ,  $g(x)$  — непрерывная функция в  $\Omega$ . Если для каждой функции  $\phi$  из  $C^\infty(\Omega)$  с компактным носителем в  $\Omega$  мы имеем

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx = 0,$$

то функция  $g$  является нулевой в  $\Omega$ .

Введем вариационную, в смысле распределений, задачу, а затем покажем эквивалентность между основной и вариационной задачами.

**Определение–предложение.** Предположим, что  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$  и  $\lambda \geq 0$ . Введем следующую вариационную, в смысле распределений, задачу на  $]0, T[$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{найти } u \in L^2(0, T, H^2(\Omega)), \quad u_\Gamma \in C^0([0, T], L^2(\Gamma)), \quad u_\Gamma^t \in L^2(0, T, H^{-1/2}(\Gamma)), \\ \text{такие что} \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{на } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) v(t, s) ds = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

**Доказательство.**

- Предположим, что  $u$  является решением краевой задачи (1.1), которое достаточно регулярно. Нам нужно показать, что  $u$  также является решением вариационной задачи (2.1). Умножим уравнение на тестовую функцию  $v(t) \in H^1(\Omega)$  и интегрируем по  $\Omega$ :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx = 0 \quad \text{в } ]0, T[ \times \Omega.$$

Теперь применим формулу Грина для всех  $v \in H^1(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx - \int_{\Gamma} n(x) \nabla u(x, t) v(t, x) ds = 0.$$

Используя граничное условие в (1.2) для всех  $v \in H^1(\Omega)$ , получим

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) v(t, s) ds = 0,$$

которая является той же формулой, что и вариационная задача, приведенная ранее.

- Наоборот, если  $u$  является решением вариационной задачи (2.1), то мы должны показать, что оно также является решением основной задачи (1.1) для каждого  $v \in D(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Gamma} \frac{du}{dt}(t, s) v(t, s) ds = 0.$$

Поскольку  $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , мы можем сказать, что

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx = 0.$$

Наоборот, применив формулу Грина для каждого  $v(t) \in D(\Omega)$ , мы получим

$$- \int_{\Omega} (\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x)) v(t, x) ds = 0.$$

В смысле двойственности мы имеем

$$\langle -\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x), v(t, x) \rangle = 0.$$

Поэтому получается

$$-\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x) = 0 \quad \text{в } D'(\Omega).$$

Однако, поскольку мы добавили условие, что  $u(t)$  находится в  $H^2(\Omega)$ , мы можем переписать приведенное выше уравнение следующим образом:

$$-\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x) = 0 \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

Используя предыдущую лемму, можно заключить, что  $-\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x) = 0$  для всех  $x \in \Omega$ . Кроме того, поскольку  $u \in H^1(\Omega)$ , мы восстановим граничное условие  $u = 0$  на  $\Gamma$ , т.е.  $u$  также является решением основной краевой задачи. Нам все еще необходимо доказать следующее граничное условие:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + n(x) \nabla u(t, x) = 0 \quad \text{на } ]0, T[ \times \Gamma.$$

Применив формулу Грина к вариационной формулировке для всех  $v(t) \in H^1(\Omega)$  и используя тот факт, что  $-\Delta u + \lambda u = 0$ , получим

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx + \\ \int_{\Gamma} (\nabla u(t, x) n(x)) v(t, x) ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) v(t, s) ds = 0. \end{aligned}$$

Мы можем вывести, что

$$\int_{\Gamma} \left( \nabla u(t, x) n(x) + \frac{du}{dt}(t, s) \right) v(t, x) ds = 0 \quad \forall v(t) \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Поскольку  $H^{1/2}(\Gamma)$  плотное в  $L^2(\Gamma)$  (см. [2]), мы можем записать

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + n(x) \nabla u(t, x) = 0 \quad \text{на } ]0, T[ \times \Gamma.$$

Поэтому  $u$  является решением основной задачи (1.1), что завершает доказательство.  $\square$

Используя стандартные методы, легко показать, что вариационная задача (2.1) имеет единственное решение. После того, как установлена эквивалентность между основной и вариационной задачами, наша цель заключается в том, чтобы найти некоторые важные границы, которые позднее помогут нам найти оценку ошибки.

**Предложение 1.** Пусть  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$  и пусть  $u$  — единственное решение задачи (2.1). Тогда задача (1.2) эквивалентна вариационной задаче (2.1). Кроме того, для  $\lambda > 0$  мы имеем следующие границы:

$$\|\nabla u(t, x)\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (2.2)$$

$$\|u(t, x)\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (2.3)$$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (2.4)$$

**Доказательство.** Из доказательства предыдущего определения–предложения для всех  $v \in H^1(\Omega)$  имеем

$$\int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(t, x) dx + \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v(t, x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) v(t, s) ds = 0.$$

Учитывая случай действительного  $u$ , заменим  $v$  на  $u$ . Отметим, что в комплексном случае мы заменяем  $v$  на функцию  $\bar{u}$ , которая является сопряженной к  $u$ . Тогда уравнение принимает вид

$$\int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^2}{\partial t}(t, s) ds = 0.$$

Интегрируя приведенное выше уравнение по  $]0, t[ \subset ]0, T[$ , мы в конечном счете получим

$$\|\nabla u\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

И также можем получить следующие границы:

$$\|\nabla u\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

$$\|u\|_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad \square$$

### 3. Дискретная задача

Чтобы ввести дискретную неявную схему, напомним следующее определение конечномерного пространства  $X_h$ :

$$X_h = \left\{ v_n^h \in C^0(\bar{\Omega}), v_n^h|_{\kappa} \text{ аффинно } \forall \kappa \in T_h \right\}$$

для фиксированного  $n \in N$  с данной триангуляцией  $T_h$  и  $h > 0$  (см. [2]).

В пунктах 3 и 4 мы предполагаем, что  $\Omega$  является выпуклым многоугольником в  $\mathbb{R}^2$  и что триангуляция  $T_h$  точно покрывает  $\Omega$  (см., например, [12]). Также предположим, что  $\lambda > 0$ .

Отметим, что для каждого  $n$  и  $h$ ,  $X_h \subset H^1(\Omega)$ . Более того, существует оператор аппроксимации, называемый оператором интерполяции,  $I_h \in L(H^2(\Omega); X_h)$ , такой что для  $m = 0, 1$ :

$$\forall v \in H^2(\Omega) \quad |I_h(v) - v|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{2-m} |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Поэтому мы должны сначала определить оператор интерполяции для конечного элемента.

**Определение 1** [2]. Линейное отображение  $I_h : H^1(\Omega) \rightarrow X_h$  определяется для каждого  $v \in H^2(\Omega)$  следующим образом:

$$(I_h v)(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j) \varphi_j(x),$$

которое называется оператором  $\mathbb{P}_1$ -интерполяции путем разложения  $u_h$  в базисе  $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ . Кроме того, для каждого  $v \in H^2(\Omega)$  есть оператор интерполяции, такой что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

$\mathbb{P}_1$ -интерполяция функции  $v$  является единственной кусочно-аффинной функцией, которая совпадает с  $v$  в вершинах  $x_j$  сетки.

**Предложение 2.** Полная дискретная неявная схема, связанная с задачей (2.1), является следующей схемой: если дано  $u_h^n \in X_h$ , найти  $u_h^{n+1}$  со значениями в  $X_h$  в виде решения

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx + \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{\tau} (u_h^{n+1} - u_h^n)(x) v_h(x) d\sigma = 0 \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.1)$$

при предположении, что  $u_h^0 = I_h(u(0))$  — аппроксимация  $u(0)$  в  $X_h$ . Тогда неявную схему можно переписать следующим образом: если дано  $u_h^n \in X_h$ , найти  $u_h^{n+1}$  со значениями в  $X_h$  в виде решения

$$a(u_h^{n+1}, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in X_h,$$

где билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  и линейная форма  $l(\cdot)$  определяются следующим образом:

$$a(u_h^{n+1}, v_h) = \tau \int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx + \tau \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx + \int_{\Gamma} u_h^{n+1}(x) v_h(x) d\sigma, \quad (3.2)$$

$$l(v_h) = \int_{\Gamma} u_h^n(x) v_h(x) d\sigma. \quad (3.3)$$

Существование и единственность решения могут быть получены прямым применением теоремы Лакса–Мильграма.

**Лемма 2.** Билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  и линейная форма  $l(\cdot)$  являются непрерывными на  $X_h$ .

**Доказательство.** Билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  задается следующим образом:

$$a(u_h^{n+1}, v_h) = \tau \int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx + \tau \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx + \int_{\Gamma} u_h^{n+1}(x) v_h(x) d\sigma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |a(u_h^{n+1}, v_h)| &\leq \left| \tau \int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx \right| + \left| \tau \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx \right| + \left| \int_{\Gamma} u_h^{n+1}(x) v_h(x) d\sigma \right| \\ &\leq |\tau| \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x)| dx + |\tau \lambda| \int_{\Omega} |u_h^{n+1}(x) v_h(x)| dx + \\ &\quad \int_{\Gamma} |u_h^{n+1}(x) v_h(x)| d\sigma. \end{aligned}$$

Теперь, используя неравенство Гельдера и теорему о следах, получим

$$|a(u_h^{n+1}, v_h)| \leq C_1 \|u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.4)$$

где  $C$  и  $C_1$  — положительные постоянные.

Аналогично линейная форма  $l$  непрерывна на  $X_h$ :

$$|l(v_h)| \leq \left| \int_{\Gamma} u_h^n(x) v_h(x) d\sigma \right| \leq \int_{\Gamma} |u_h^n(x) v_h(x)| d\sigma.$$

Используя неравенство Гельдера и теорему следа, получим

$$|l(v_h)| \leq \widetilde{C}_1 \|v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.5)$$

где  $\widetilde{C}_1$  — положительная постоянная.  $\square$

Следующий шаг — показать коэрцитивность билинейной формы  $a$  с использованием следующей леммы.

**Лемма 3.** *Билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  является коэрцитивной на  $X_h \times X_h$ .*

**Доказательство.** Чтобы показать, что  $a$  коэрцитивно на  $X_h \times X_h$ , мы должны показать, что

$$\exists \alpha > 0 : \quad \forall v_h \in X_h \quad a(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= \tau \int_{\Omega} |\nabla v_h(x)|^2 dx + \tau \lambda \int_{\Omega} |v_h(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} |v_h(x)|^2 d\sigma \\ &\geq \min(\tau, \tau \lambda) \left[ \int_{\Omega} |\nabla v_h(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v_h(x)|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$a(v_h, v_h) \geq \min(\tau, \tau \lambda) \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

и мы получим коэрцитивность  $a$ .  $\square$

Согласно предыдущим леммам, мы находимся в рамках теоремы Лакса–Мильграма, поэтому существует единственная функция  $u_h^{n+1} \in X_h$  для всех  $v_h \in X_h$ , такая что

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx + \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{\tau} (u_h^{n+1} - u_h^n)(x) v_h(x) d\sigma = 0. \quad (3.6)$$

Цель следующей теоремы — показать, что схема дискретной задачи является непрерывной.

**Теорема 1.** *Решение  $u_h^n$  имеет для всех  $n = 0, \dots, N - 1$  следующую оценку:*

$$\|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tau\lambda \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_h^0\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Мы уже показали, что эта задача допускает единственное решение  $u_h^{n+1}$ . Поэтому для каждого  $v_h \in X_h$  выполняется следующее уравнение для  $u_h^{n+1}$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1}(x) \nabla v_h(x) dx + \int_{\Omega} \lambda u_h^{n+1}(x) v_h(x) dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} u_h^{n+1}(x) v_h(x) d\sigma = \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} u_h^n(x) v_h(x) d\sigma.$$

Для  $v_h(\cdot) = u_h^{n+1}$  и  $\lambda > 0$  приведенное выше уравнение можно переписать в виде

$$|u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\tau} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} u_h^n u_h^{n+1}(s) d\sigma.$$

Применив неравенство Гельдера, получим

$$|u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\tau} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{\tau} \|u_h^n\|_{L^2(\Gamma)} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Умножив обе части на  $\tau$  и используя тот факт, что  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ , получим

$$\tau |u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \tau\lambda \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_h^n\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Переместив некоторые члены в приведенном выше уравнении в левую часть, получим

$$\tau |u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \tau\lambda \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_h^n\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Умножив обе части на 2 и суммируя это последнее уравнение от  $n = 0$  до  $N - 1$ , получим

$$2\tau \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\tau\lambda \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Отсюда выводим следующую оценку и получаем устойчивость схемы:

$$\|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2\tau \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\tau\lambda \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_h^0\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad \square$$

#### 4. Априорная оценка ошибки

Чтобы получить априорные оценки ошибки, предположим, что шаг  $\tau$  по времени и сетка  $T_h$  не меняются в течение итераций по времени. Пусть  $k$  — шаг по времени,  $h$  — параметр сетки, а  $X_h$  — дискретное пространство. Начнем со следующей теоремы и ее доказательства.

**Теорема 2.** Если  $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$  и  $u^t \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$ , то для всех  $m = 0, \dots, N - 1$  мы имеем следующую границу:

$$\|I_h(u(t_{m+1})) - u_h^{m+1}\|_{0,\Gamma}^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1}\|_{1,\Omega}^2 \leq C(h^2 + k^2), \quad (4.1)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вариационную задачу (1.2) для  $t \in ]t_n, t_{n+1}]$ ,  $v_h = v_h^{n+1}$ . Проинтегрируем эту задачу во времени между  $t_n$  и  $t_{n+1}$ :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \lambda u(t, x) v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \int_{\Gamma} (u(t_{n+1}, s) - u(t_n, s)) v_h^{n+1}(s) \, ds = 0.$$

Применив эти же критерии для дискретной задачи (3.1) и взяв разницу этих двух задач для  $v_h = v_h^{n+1}$ , получим

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla (u(t) - u_h^{n+1}) \nabla v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \lambda (u(t) - u_h^{n+1}) v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \int_{\Gamma} ((u(t_{n+1}) - u(t_n)) - (u_h^{n+1} - u_h^n)) v_h^{n+1}(s) \, ds = 0.$$

Вставив  $\pm \nabla(I_h(u(t_{n+1})))$  и  $\pm \nabla(u(t_{n+1}))$  в первый член,  $\pm I_h(u(t_{n+1}))$  и  $\pm u(t_{n+1})$  — во второй член, а  $\pm I_h(u(t_{n+1}))$  и  $\pm I_h(u(t_n))$  — в третий член, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} ((I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1}) - (I_h(u(t_n)) - u_h^n))(s) v_h^{n+1}(s) \, ds + \\ & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla (I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1})(x) \nabla v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \\ & \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1})(x) v_h^{n+1}(x) \, dx dt \\ & = \int_{\Gamma} ((I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1})) - (I_h(u(t_n)) - u(t_n)))(s) v_h^{n+1}(s) \, ds + \\ & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla (u(t_{n+1}) - u(t))(x) \nabla v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \\ & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla (I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}))(x) \nabla v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \\ & \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (u(t_{n+1}) - u(t))(x) v_h^{n+1}(x) \, dx dt + \\ & \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}))(x) v_h^{n+1}(x) \, dx dt. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть  $a_n = I_h(u(t_n)) - u_h^n$ . Возьмем  $v_h^n = a_n$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n) a_{n+1}(s) ds + k |a_{n+1}|_{1,\Omega}^2 + \\
 & \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left( I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1} \right) (x) a_{n+1}(x) dx dt \\
 & = \int_{\Gamma} \left( \left( I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}) \right) - \left( I_h(u(t_n)) - u(t_n) \right) \right) (s) a_{n+1}(s) ds + \\
 & \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla \left( I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}) \right) (x) \nabla a_{n+1}(x) dx dt + \\
 & \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla \left( u(t_{n+1}) - u(t) \right) (x) \nabla a_{n+1}(x) dx dt + \\
 & \quad \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left( u(t_{n+1}) - u(t) \right) (x) a_{n+1}(x) dx dt + \\
 & \quad \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left( I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}) \right) (x) a_{n+1}(x) dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Пусть  $T_1, T_2$  и  $T_3$  обозначают первый, второй и третий члены в левой части уравнения, и пусть  $T_4, T_5, T_6, T_7$  и  $T_8$  обозначают члены в правой части уравнения (4.3). Член  $T_1$  можно записать в виде

$$T_1 = \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n) a_{n+1}(s) ds = \int_{\Gamma} (a_{n+1}^2 - a_{n+1} a_n)(s) ds.$$

По правилу полного квадрата это уравнение эквивалентно

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_{n+1}^2(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n)^2(s) ds.$$

Кроме того, как было определено ранее, имеем

$$T_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \nabla a_{n+1}(x) \nabla a_{n+1}(x) dx dt = k |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Член  $T_3$  задается следующим образом:

$$T_3 = \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} a_{n+1}(x) a_{n+1}(x) dx dt = k \lambda \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Для члена  $T_4$  мы имеем

$$T_4 = \int_{\Gamma} \left( \left( I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1}) \right) - \left( I_h(u(t_n)) - u(t_n) \right) \right) (s) a_{n+1}(s) ds.$$

Из определения оператора интерполяции получим

$$T_4 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma} \left( I_h(u(\tau)) - u(\tau) \right)^t a_{n+1} ds d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера, теорему о следах и приведенное выше свойство оператора интерполяции, получим

$$T_4 \leq C_1 h \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Мы используем неравенство  $ab \leq \frac{1}{2\epsilon_1} a^2 + \frac{\epsilon_1}{2} b^2$  для каждого  $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ , где

$$a = C_1 h \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}, \quad b = \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Наконец, мы имеем

$$T_4 \leq \frac{C_1^2 h^2}{2\epsilon_1} \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{\epsilon_1}{2} \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Аналогичным образом, для членов  $T_5$  и  $T_6$ , используя те же критерии, что и приведенные выше, мы получим

$$T_5 \leq \frac{k^3}{2\epsilon_2} \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_2}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2,$$

$$T_6 \leq \frac{C_2^2 h^2 k}{2\epsilon_3} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_3}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Для члена  $T_7$ :

$$T_7 = k\lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (u(t_{n+1}) - u(t)) a_{n+1} dx dt.$$

Используя определение интегрирования от  $t$  до  $t_{n+1}$  и неравенство Гельдера, мы получим

$$T_7 \leq \frac{k^3 \lambda}{2\epsilon_4} \|u^t\|_{L^\infty}^2 + \frac{k\epsilon_4 \lambda}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Наконец, член  $T_8$  можно ограничить следующим образом:

$$T_8 = \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (I_h(u(t_{n+1})) - u(t_{n+1})) a_{n+1} dx dt.$$

Используя предположение оператора интерполяции, имеем

$$T_8 \leq C_3 h \sqrt{k} \lambda \|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} \sqrt{k} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \frac{C_3^2 h^2 k \lambda}{2\epsilon_5} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_5 \lambda}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Используя предыдущую границу, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_{n+1}^2(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n)^2(s) ds + k |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + k\lambda \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{C_1^2 h^2 k}{2\epsilon_1} \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_1}{2} \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k^3}{2\epsilon_2} \|u^t\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_2}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ & \frac{C_2^2 h^2 k}{2\epsilon_3} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_3}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{k^3 \lambda}{2\epsilon_4} \|u^t\|_{L^\infty}^2 + \frac{k\epsilon_4 \lambda}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ & \frac{C_3^2 h^2 k \lambda}{2\epsilon_5} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \frac{k\epsilon_5 \lambda}{2} |a_{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Теперь возьмем

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8T}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_4 = \epsilon_5 = \frac{1}{2\lambda},$$

где  $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$  и  $u^t \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$ . Тогда мы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_{n+1}^2(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n)^2(s) ds + k\lambda \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C_4(h^2 + k^2) + \frac{k}{16T} \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $C_4$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ .

Используя тот факт, что  $\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (a_{n+1} - a_n)^2(s) ds$  — положительный член и  $a_0 = 0$ , и суммируя последнее уравнение от  $n = 0$  до  $n = m$  для  $m = 0, \dots, N - 1$ , получим

$$\frac{1}{2} \|a_{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + k\lambda \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_4(h^2 + k^2) \sum_{n=0}^m k + \frac{k}{16T} \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Однако мы имеем  $\sum_{n=0}^m k \leq T$ . Тогда  $C_5 = C_4 T$ , и мы получим

$$\frac{1}{2} \|a_{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \lambda \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_5(h^2 + k^2) + \frac{k}{16T} \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (4.5)$$

Теперь предположим, что  $A_m = \|a_{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2$ ,  $C_m = 4(h^2 + k^2)$ ,  $B_m = \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

Поскольку  $k < T$ , то  $\frac{k}{16T} < \frac{1}{4}$ . Поэтому уравнение (4.5) можно записать в виде

$$\frac{1}{4} A_m + \frac{1}{4} B_m \leq \frac{1}{4} C_m + \frac{k}{16T} \sum_{n=0}^{m-1} A_n.$$

Отметим, что взяв  $m = 0$  в (4.5), мы получим  $A_0 \leq C(h^2 + k^2)$ . Умножив обе части на 4, получим

$$A_m + B_m \leq C_m + \sigma \sum_{n=0}^{m-1} A_n \quad \forall m \geq 1,$$

где  $\sigma = \frac{k}{4T}$ .

Члены  $A_m, B_m, C_m$  удовлетворяют условиям леммы Гронуолла (см. [13]), и мы получим

$$A_m + B_m \leq C_m e^{m\sigma} \quad \forall m \geq 0$$

при  $m\sigma = \frac{mk}{4T} \leq \frac{1}{4}$ . Отсюда мы имеем неравенство

$$\|a_{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|a_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_6 (h^2 + k^2), \quad (4.6)$$

где  $C_6 = 4C_5 e^{1/4}$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ . □

**Следствие.** Если  $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$  и  $u^t \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$ , то для каждого  $m = 0, \dots, N - 1$  мы имеем следующую оценку ошибки:

$$\|u(t_{m+1}) - u_h^{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(h^2 + k^2), \quad (4.7)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ .

**Доказательство.** Для каждого  $m = 0, \dots, N - 1$  имеем

$$\begin{aligned} & \|u(t_{m+1}) - u_h^{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \|u(t_{m+1}) - I_h(u(t_{m+1}))\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1}) - I_h(u(t_{n+1}))\|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ & \|I_h(u(t_{m+1})) - u_h^{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|I_h(u(t_{n+1})) - u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Согласно предыдущей теореме, мы можем заменить вторую строку в правой части неравенства на  $C_1(h^2 + k^2)$ , где  $C_1$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ . Кроме того, используя свойство оператора интерполяции, мы можем записать

$$\begin{aligned} & \|u(t_{m+1}) - u_h^{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq C_2 h^2 \|u(t_{m+1})\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{C_3 h^2}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1})\|_{H^2(\Omega)}^2 + C_1 (h^2 + k^2) \\ & \leq C_4 h^2 + \frac{C_5 h^2 k}{\lambda} + C_1 (h^2 + k^2). \end{aligned}$$

Поскольку  $k \leq T$ , мы заключаем, что

$$\|u(t_{m+1}) - u_h^{m+1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{\lambda} \sum_{n=0}^m \|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(h^2 + k^2),$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $k$ . □

## 5. Вычисление точных и численных собственных значений полугруппы ДН

Для подтверждения теоретических результатов, полученных в предыдущих пунктах, мы выполнили несколько численных экспериментов, используя программное обеспечение FreeFem++. Данный пункт разделен на два подпункта. В первом из них обсуждается численное вычисление собственных значений оператора ДН и его полугруппы, а также представлено сравнение этих и точных значений вместе с относительной ошибкой между ними. Во втором подпункте рассматривается точное решение данной задачи, ее численное решение и оценка  $L2$  ошибки между ними.

### 5.1. Численные алгоритмы для собственных значений $e^{-tD\lambda}$

Для вычисления собственных значений оператора ДН и его полугруппы мы создали два алгоритма, которые будут рассмотрены здесь. Сначала мы вычислили точные собственные значения оператора ДН, используя следующую формулу (см. [8]), которую мы получили из представленной ранее леммы:

$$d_k(\lambda) = k - \frac{\sqrt{\lambda} J_{k+1}(\sqrt{\lambda})}{J_k(\sqrt{\lambda})}. \quad (5.1)$$

Собственное значение  $d_k(\lambda)$  связано с комплекснозначным собственным вектором  $e^{ik\theta}$ ,  $J_k$  — функция Бесселя. Мы использовали приведенную выше формулу для вычисления точных собственных значений полугруппы ДН (см. [8]):

$$e^{-tD\lambda} = e^{-td_k(\lambda)} e^{ik\theta}. \quad (5.2)$$

Фиксируя  $\lambda = 2$ ,  $t = 0.1$ , и взяв  $k$  от 1 до 20, последующий код использовался для извлечения первых 20 собственных значений полугруппы. Эти точные собственные значения будут использоваться позднее для сравнения с численными собственными значениями двух сгенерированных алгоритмов. Первый алгоритм для вычисления численных собственных значений оператора ДН и его полугруппы состоит из трех основных шагов. Первый шаг состоит в решении следующей задачи (используются те же значения  $\lambda$ ,  $t$ ,  $n$  и  $k$ , что и приведенные выше):

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \lambda u_n = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_n = e^{in\theta} & \text{на } \Gamma. \end{cases} \quad (5.3)$$

Второй шаг состоит в вычислении собственных значений оператора ДН с использованием следующей формулы:

$$d_n(\lambda) = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \lambda |u_n|^2.$$

Наконец, подставив эти значения в формулу полугруппы ДН, мы можем получить численные собственные значения полугруппы. После выполнения этих расчетов мы вычислили относительную погрешность каждой пары полученных точных и численных собственных значений первого алгоритма для гарантии того, что наши реализованные коды верны и ошибка очень мала. Относительную ошибку нужно было вычислить с использованием следующей формулы:

$$\text{err} = \frac{|d_n - d_k|}{d_k} 100.$$

В следующей таблице приведены значения полученных собственных значений с соответствующей ошибкой для каждой пары значений.

**Таблица 1.** Точное и численное вычисление 1-м методом первых 20 собственных значений полугруппы ДН

$k$	Точное вычисление	Численное вычисление	Относительная ошибка
1	(0.752615, 0)	(0.752613, 0)	$2.49 E - 06$
2	(0.354218, 0)	(0.354235, 0)	$4.86 E - 05$
3	(0.178391, 0)	(0.178415, 0)	0.00013175
4	(0.0920472, 0)	(0.09207, 0)	0.000247714
5	(0.0480458, 0)	(0.0480649, 0)	0.000396648
6	(0.0252397, 0)	(0.0252543, 0)	0.000578578
7	(0.0133114, 0)	(0.0133219, 0)	0.000793474
8	(0.00703862, 0)	(0.00704595, 0)	0.00104127
9	(0.00372851, 0)	(0.00373344, 0)	0.00132185
10	(0.00197765, 0)	(0.00198088, 0)	0.00163506
11	(0.00104999, 0)	(0.00105207, 0)	0.00198069
12	(0.000557886, 0)	(0.000559201, 0)	0.00235848
13	(0.000296592, 0)	(0.000297413, 0)	0.0027681
14	(0.000157752, 0)	(0.000158259, 0)	0.00320916
15	$(8.39377 e - 005, 0)$	$(8.42467 e - 005, 0)$	0.00368118
16	$(4.46759 e - 005, 0)$	$(4.48628 e - 005, 0)$	0.00418361
17	$(2.3785 e - 005, 0)$	$(2.38971 e - 005, 0)$	0.00471581
18	$(1.26656 e - 005, 0)$	$(1.27324 e - 005, 0)$	0.00527703
19	$(6.74574 e - 006, 0)$	$(6.78532 e - 006, 0)$	0.00586643
20	$(3.59338 e - 006, 0)$	$(3.61667 e - 006, 0)$	0.00648307

Аналогичным образом для второго алгоритма, используя те же критерии, мы используем задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 & \text{в } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + n(x) \nabla u(t, x) = 0 & \text{на } ]0, T[ \times \Gamma, \\ u(0) = e^{ik\theta} & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (5.4)$$

где  $n(x)$  — единичный вектор внешней нормали в  $x \in \Gamma$ . Первый шаг состоит в реализации схемы этой задачи, которую мы уже подробно обсуждали в предыдущем пункте. Вариационная схема задается следующим образом:

$$\begin{cases} \text{найти } u(t) \in H^1(\Omega), \text{ такое что} \\ u(0) = e^{ik\theta} \text{ на } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \lambda uv \, dx + \int_{\Gamma} \frac{du}{dt} v \, ds = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.5)$$

Здесь полугруппа ДН — это именно след решения  $u$  приведенной выше задачи на границе, которая задается следующим образом:

$$e^{-tD\lambda} e^{ik\theta} = u_{\Gamma}. \quad (5.6)$$

Для вычисления ее собственных значений возьмем решение  $u(1, 0)$  и рассмотрим  $\lambda = 1$ . Теперь снова вычислим относительную ошибку между собственными значениями, полученными с использованием этого алгоритма и точных собственных значений. Таблица результатов приведена ниже. В табл. 2 (как и в табл. 1) приведены результаты, полученные с использованием второго метода.

**Таблица 2.** Точное и численное вычисление 2-м методом первых 20 собственных значений полугруппы ДН

$k$	Точное вычисление	Численное вычисление	Относительная ошибка
1	(0.955776, 0)	(0.95156, 1.83792 $e - 008$ )	0.00441048
2	(0.847743, 0)	(0.835088, 3.05968 $e - 008$ )	0.0149276
3	(0.760068, 0)	(0.742507, 4.44511 $e - 008$ )	0.0231038
4	(0.684096, 0)	(0.66372, 6.3766 $e - 008$ )	0.0297852
5	(0.616849, 0)	(0.59511, 9.08267 $e - 008$ )	0.0352417
6	(0.55678, 0)	(0.534732, 1.26821 $e - 007$ )	0.0396
7	(0.502876, 0)	(0.481285, 1.72288 $e - 007$ )	0.0429344
8	(0.454378, 0)	(0.433796, 2.27124 $e - 007$ )	0.0452956
9	(0.410675, 0)	(0.391487, 2.9086 $e - 007$ )	0.046721
10	(0.371252, 0)	(0.353714, 3.62751 $e - 007$ )	0.0472394
11	(0.335666, 0)	(0.319932, 4.41816 $e - 007$ )	0.0468737
12	(0.303526, 0)	(0.289673, 5.26886 $e - 007$ )	0.0456422
13	(0.27449, 0)	(0.262533, 6.16659 $e - 007$ )	0.0435594
14	(0.24825, 0)	(0.238162, 7.097 $e - 007$ )	0.0406365
15	(0.224532, 0)	(0.216251, 8.04437 $e - 007$ )	0.0368817
16	(0.20309, 0)	(0.19653, 8.99325 $e - 007$ )	0.0323008
17	(0.183703, 0)	(0.178762, 9.9292 $e - 007$ )	0.0268968
18	(0.166172, 0)	(0.162737, 1.08401 $e - 006$ )	0.0206705
19	(0.150319, 0)	(0.148272, 1.17142 $e - 006$ )	0.0136207
20	(0.135982, 0)	(0.135201, 1.25387 $e - 006$ )	0.00574375

## 5.2. Вычисление точного и численного решений задачи

В данном подпункте опишем некоторые тестовые расчеты для модельной задачи, представленной в нашей статье. Сначала представим тест известной модели решения, представив таблицу изменений точных и численных решений при изменении временного шага, а также относительную оценку ошибки между ними. Затем дадим некоторые рисунки для решений, ошибки и их соответствия.

Цель первого теста — подтвердить реализованный метод. Выберем следующую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) + \lambda u(t, x) = f & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{на } \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

где  $f$  и  $g$  задаются как:

$$f = (-4 + \lambda(x^2 + y^2))t, \quad g = x^2 + y^2 + 2t\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Точное решение этой модельной задачи задается следующим образом:

$$u_{ex} = (x^2 + y^2)t.$$

С использованием программного обеспечения FreeFem++, изменяя временной шаг от 0.1 до 1, вычислены результаты. Некоторые результаты решений и ошибки представлены на рисунках 1–3.

Рисунок 4 показывает в логарифмическом масштабе график ошибки между точным и численным решением для различных значений шага сетки. При  $k = h$  и  $\Delta t = h$  ошибка, задаваемая как  $= h^2 + \Delta t^2$ , должна быть эквивалентна  $h^2$ . Теперь, взяв логарифм в обеих частях, мы получим прямую линию с наклоном порядка 2. Рис. 4 показывает результаты, полученные в нашей работе. Мы получили прямую линию с наклоном 1.96, который приблизительно равен желательному значению, и это подтверждает теорию.

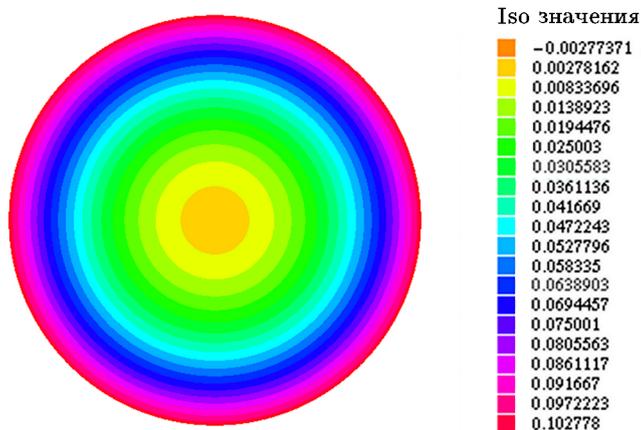


Рис. 1. Точное решение модельной задачи.

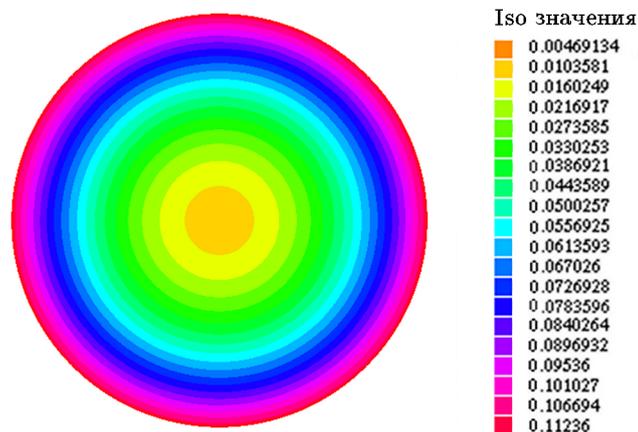


Рис. 2. Численное решение модельной задачи.

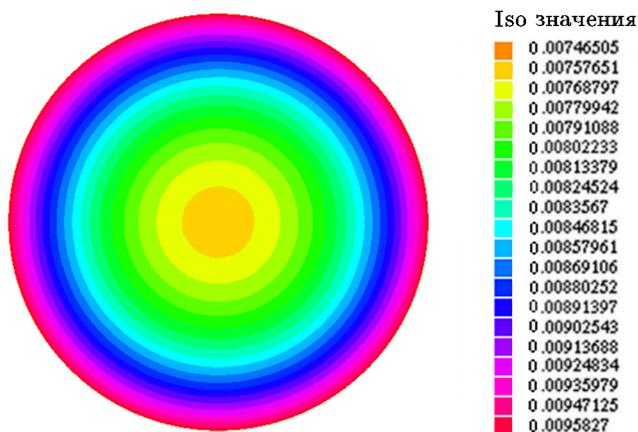


Рис. 3. Относительная ошибка модельной задачи.

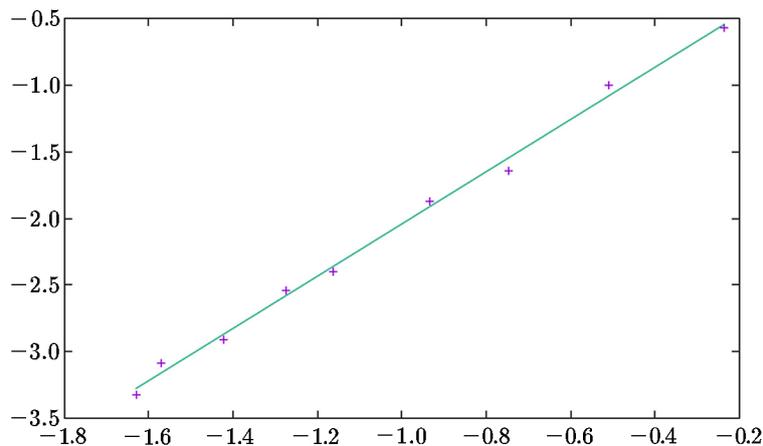


Рис. 4. График априорной ошибки.

## 6. Выводы

В этой статье мы обсудили устойчивую конечно-элементную схему для эллиптического уравнения с зависящими от времени граничными условиями. Эта обобщенная схема была проанализирована после изучения случая единичного шара, в котором явное представление для полугруппы было получено Питером Лаксом. Мы реализовали численную схему для нахождения собственных значений полугруппы ДН, чтобы проверить ее положительность для некруговых областей. Проанализировав обобщенную схему, мы проверили ее сходимость с использованием численных экспериментов, выполненных с помощью программного обеспечения FreeFem++ и априорных оценок ошибки.

## Литература

1. **Ahmad R.A., El Arwadi T., Chrayteh H. and Sac-Epee J.-M.** A priori and a posteriori error estimates for a Crank Nicolson type scheme of an elliptic problem with dynamical boundary conditions // J. Math. Research. — 2016. — Vol. 8, № 2. — DOI: 10.5539/jmr.v8n2p1.
2. **Allaire G.** Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation // Numerical Mathematics and Scientific Computation. — Oxford University Press, 2007.
3. **Banasiak J. and Arlotti L.** Perturbations of Positive Semigroups with Applications // Springer Monographs in Mathematics. — Springer-Verlag, 2006.
4. **Brezis H.** Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. — Springer, 2011.
5. **Chavel I.** Poincare metrics on real projective space // Indiana Univ. Math. J. — 1973. — Vol. 23, № 1. — P. 95–101.
6. **Cherif M.A., El Arwadi T., Emamirad H. and Sac-Epee J.M.** Dirichlet-to-Neumann semigroup acts as a magnifying glass // Semigroup Forum. — 2014. — Vol. 88, № 3. — P. 753–767.
7. **Courant R. and Hilbert D.** Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. — New York: Interscience Publ., 1953.
8. **Daners D.** Non-Positivity of the Semigroup Generated by the Dirichlet-to-Neumann Operator. — Australia, NSW: The University of Sydney, 2006.

9. **El Arwadi T., Dib S. and Sayah T.** A priori and a posteriori estimations of a linear elliptic problem with dynamical boundary condition // Appl. Math. Inf. Sci. — 2015. — Vol. 9, № 6. — P. 3305–3317.
10. **Emamirad H. and Laadnani I.** An approximating family for the Dirichlet-to-Neumann semigroup // Adv. Differ. Equ. — 2006. — Vol. 11. — P. 241–257.
11. **Emamirad H. and Mokhtarzadeh M.-R.** Dirichlet-to-Neumann operator on the perturbed unit disk // Electron. J. Diff. Equations. — 2012. — Vol. 6, № 159.
12. **Ern A. and Guermond J.L.** Theory and Practice of Finite Elements. — Springer Verlag, 2004.
13. **Heywood J.G. and Rannacher R.** Finite-element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. Part IV: error analysis for second-order time discretization // SIAM J. Numer. Anal. — 1990. — Vol. 27, № 2. — P. 353–384.
14. **Ismail M.E.H.** Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — Vol. 98.
15. **Lax P.D.** Functional Analysis. — New York: Wiley, 2002.
16. **Vrabie I.I.**  $C_0$ -semigroups and Applications. — Amsterdam, Boston: Elsevier Science, 2003.
17. **Watson G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Vol. 2. — Cambridge: Cambridge University Press, 1944.

*Поступила в редакцию 17 июля 2019 г.  
После исправления 17 февраля 2021 г.  
Принята к печати 14 июля 2021 г.*

