УДК 539.3

ДИНАМИКА АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

В нелинейной постановке в актуальных переменных исследована динамическая антиплоская деформация несжимаемого цилиндрического тела. Получено представление скорости и ускорения через перемещение. Задача о деформировании тела с учетом геометрической и физической нелинейностей сведена к начально-краевой задаче для перемещения. По найденному перемещению определены давление и напряжения. Для тела с квадратичным упругим потенциалом исследованы плоские волны и автомодельное движение. С использованием линейного потенциала изучена деформация полого эллиптического цилиндра, для которого найдены аналитические выражения для перемещения и напряжений и определена внешняя нагрузка. Показано, что при вырождении внутренней полости тела в плоский разрез нагрузка на разрезе остается ограниченной.

Ключевые слова: динамика, антиплоская деформация, задача для перемещения, нагрузка, нелинейность, тип уравнения, упругий потенциал, условие совместности.

DOI: 10.15372/PMTF20150414

Рассмотрим в актуальных переменных процесс динамического антиплоского деформирования несжимаемого упругого цилиндрического тела. Полагая упругий потенциал и актуальную форму тела заданными, а объемные силы отсутствующими, исследуем задачу в рамках нелинейной модели упругости, учитывающей геометрическую и физическую нелинейности. Модель включает представление ускорения, деформации, ее базисных инвариантов через перемещение, связь напряжений Коши с деформациями Альманси, выражение потенциала деформаций через инварианты деформаций и уравнения неразрывности и движения [1]. Уравнения модели позволяют получить задачу для перемещения.

Представим соотношения модели при динамическом антиплоском деформировании в актуальных переменных. Сначала выразим скорость и ускорение точки тела через перемещение. Скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$, определяемые индивидуальными производными по времени соответственно от перемещения $\boldsymbol{u}$ и скорости, в актуальных переменных $\boldsymbol{x}$, t (радиус-вектор и время) можно представить в виде сумм локальных и конвективных составляющих [2]

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{u}; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \tag{2}$$

где $\partial/\partial t$ — обозначение локальной производной; ∇ — обозначение градиента. Равенство (1) можно рассматривать в качестве уравнения для скорости. Вводя градиент деформации $C = d\boldsymbol{x}_0/d\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}$ — исходный и актуальный радиус-векторы точки, и учитывая зависимость этого градиента от перемещения

$$C = \frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\boldsymbol{x}} = \frac{d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{x}} = \delta - \nabla\boldsymbol{u}, \qquad \delta = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{x}}, \qquad \nabla\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}} \tag{3}$$

(δ — единичный тензор), равенство (1) можно записать в виде неоднородного линейного уравнения для скорости

$$\boldsymbol{v}\cdot(\delta - \nabla\boldsymbol{u}) = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{v}\cdot\delta = \boldsymbol{v}), \tag{4}$$

где матрица коэффициентов и свободный член являются функциями перемещения. С учетом выражения для градиента деформации (3) соотношение (4) можно представить в виде

$$\boldsymbol{v}\cdot C = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}. \tag{5}$$

Обычно принимается, что векторное уравнение движения точки $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t)$ обратимо: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$, т. е. отличен от нуля якобиан:

$$\det\Big(\frac{d\boldsymbol{x}_0}{d\boldsymbol{x}}\Big) = \det C \neq 0.$$

Следовательно, тензор C имеет обратный тензор C': $CC' = \delta$, который также определяется перемещением. Скалярно умножая равенство (5) на обратный тензор, устанавливаем, что скорость выражается через перемещение:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\cdot C'. \tag{6}$$

Зависимость обратного тензора от исходного тензора и в силу (3) от перемещения можно получить в явном виде. Действительно, для тензора C с базисными инвариантами C_1, C_2, C_3 тождество Гамильтона — Кели [3]

$$\begin{gathered} C^3 - C_1C^2 + C_2C - C_3\delta = 0, \\ C_1 = C_{kk}, \qquad C_2 = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \qquad C_3 = |C_{kl}| \neq 0 \end{gathered} \tag{7}$$

(буквенные индексы принимают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование) можно представить в виде

$$C(1/C_3)(C^2 - C_1C + C_2\delta) = \delta. \tag{8}$$

Сравнение равенств $CC' = \delta$ и (8) позволяет сделать вывод, что обратный тензор является квадратичной функцией исходного тензора:

$$C' = (1/C_3)(C^2 - C_1C + C_2\delta). \tag{9}$$

Из соотношений (2), (3), (6), (9) следует, что и скорость, и ускорение определяются перемещением:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\cdot C', \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}. \tag{10}$$

Рассмотрим процесс антиплоского деформирования цилиндрического тела, при котором перемещение направлено вдоль продольной оси x_3 тела и зависит только от поперечных координат $x_1 = x$, $x_2 = y$ и времени t. В этом случае рассматриваемые величины имеют значения

$$\boldsymbol{u} = (0, 0, u), \qquad u = u(x, y, t), \qquad \partial\boldsymbol{u}/\partial t = (0, 0, u_t),$$

$$\nabla\boldsymbol{u} = (\partial_k u_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_x \\ 0 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta = (\delta_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(буквенный индекс у перемещения обозначает производную по соответствующему аргументу; δ_{kl} — символ Кронекера).

В соответствии с (3), (7), (11) степени градиента деформации и его инварианты выражаются через перемещение:

$$C = (C_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^2 = (C_{kn}C_{nl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2u_x \\ 0 & 1 & -2u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = 3, \qquad C_2 = 3, \qquad C_3 = 1.$$

При использовании этих формул обратный тензор (9) имеет вид

$$C' = (C'_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, скорость (10) и градиент скорости соответственно равны

$$\boldsymbol{v} = \Big(\frac{\partial u_k}{\partial t}\, C'_{kl}\Big) = \Big(0, 0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big), \qquad \nabla\boldsymbol{v} = \Big(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{tx} \\ 0 & 0 & u_{ty} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда выражения для локального и конвективного ускорений записываются в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = \Big(\frac{\partial v_k}{\partial t}\Big) = \Big(0, 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big), \qquad \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \Big(v_k\,\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\Big) = (0, 0, 0),$$

т. е. при антиплоском деформировании конвективное ускорение равно нулю и полное ускорение (10) совпадает с локальным ускорением:

$$\boldsymbol{a} = \Big(\frac{\partial v_k}{\partial t}\Big) = \Big(0, 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big). \tag{12}$$

Компоненты E_{kl} и инварианты E_k тензора деформации Альманси, определяемые соотношениями

$$2E_{kl} = \nabla_k u_l + \nabla_l u_k - \nabla_k u_m \nabla_l u_m,$$

$$E_1 = E_{nn}, \qquad 2E_2 = E_{nn}E_{mm} - E_{nm}E_{mn}, \qquad E_3 = |E_{kl}|,$$

при антиплоской деформации (11) выражаются через перемещение по нелинейным формулам (геометрическая нелинейность) и являются функциями поперечных координат и времени:

$$\begin{gathered} 2E_{11} = -u_x^2, \qquad 2E_{22} = -u_y^2, \qquad 2E_{33} = 0, \\ 2E_{12} = -u_x u_y, \qquad 2E_{31} = u_x, \qquad 2E_{32} = u_y, \qquad E_{kl} = E_{kl}(x, y, t); \end{gathered} \tag{13}$$

$$2E_1 = -(u_x^2 + u_y^2), \qquad 4E_2 = -(u_x^2 + u_y^2), \qquad 8E_3 = 0. \tag{14}$$

Из (13) следует, что от перемещения линейно зависят только сдвиговые деформации E_{31}, E_{32}. Инварианты (14) не положительны, могут быть представлены через линейный инвариант E_1 (обозначаемый далее E) и удовлетворяют условию несжимаемости

$$E_1 \leqslant 0, \quad E_2 \leqslant 0, \quad E_3 = 0, \qquad E_1 = E, \quad 2E_2 = E, \quad 2E_1 - 4E_2 + 8E_3 = 0,$$

т. е. при антиплоском деформировании тело является несжимаемым, что обусловливает выбор модели несжимаемого тела. В этом случае уравнение неразрывности сводится к уравнению

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 - 2E_1 + 4E_2 - 8E_3} = \rho_0 = \text{const}$$

(ρ_0, ρ — исходная и актуальная плотности). Постоянная плотность далее принимается равной единице: $\rho = \rho_0 = 1$.

Для несжимаемого тела модифицированный закон Мурнагана определяет напряжения Коши через деформации Альманси:

$$P_{kl} = -q_0\delta_{kl} + (\delta_{kn} - 2E_{kn})\,\frac{\partial U}{\partial E_{ln}}$$

(q_0 — лагранжев множитель; U — упругий потенциал). В случае однородного изотропного тела потенциал является функцией базисных инвариантов тензора деформации. При антиплоской деформации в силу свойств инвариантов потенциал зависит только от линейного инварианта: $U(E_1, E_2, E_3) = U(E)$. Используя соотношения

$$E = E_{ln}\delta_{nl}, \qquad \frac{\partial E}{\partial E_{ln}} = \delta_{nl}, \qquad \frac{\partial U}{\partial E_{ln}} = U'(E)\delta_{nl} \quad \Big(U' = \frac{dU}{dE}\Big),$$

напряжения можно представить в виде квазилинейной функции деформаций (физическая нелинейность)

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'(E)E_{kl}, \qquad q = q_0 - U'(E),$$

где q — гидростатическое давление. С учетом формул (13) напряжения можно выразить через давление и перемещение:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q + U'u_x^2, \qquad P_{22} = -q + U'u_y^2, \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = U'u_xu_y, \qquad P_{31} = -U'u_x, \qquad P_{32} = -U'u_y, \\ U' = U'(E), \qquad 2E = -(u_x^2 + u_y^2). \end{gathered} \tag{15}$$

Предположим, что давление, так же как перемещение, не меняется вдоль тела: $q = q(x, y, t)$. Тогда с учетом (15) можно установить, что напряжения являются функциями времени и поперечных координат $P_{kl}(x, y, t)$. В этом случае динамические уравнения движения тела

$$\rho a_k = \rho f_k + \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l}$$

(f_k — плотность массовых сил) в отсутствие сил ($\rho f_k = 0$) и при постоянной плотности ($\rho = 1$) с учетом представлений ускорения в виде (12) и напряжений в виде (15) являются дифференциальными уравнениями для перемещения и давления, определенными в сечении S тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[U'\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big], \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[U'\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big] + \frac{\partial}{\partial x}\Big[U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big]; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big), \tag{17}$$

где

$$U' = U'(E), \qquad E = -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Уравнение (17), не содержащее давления, является нелинейным уравнением второго порядка для перемещения. С учетом выражений для градиентов от производной упругого потенциала

$$U'_x = U''E_x = -U''(u_x u_{xx} + u_y u_{yx}), \qquad U'_y = U''E_y = -U''(u_x u_{xy} + u_y u_{yy})$$

это уравнение можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Big[U''\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 - U'\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2U''\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \Big[U''\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 - U'\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ U' = U'(E), \qquad U'' = U''(E), \qquad E = -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big].\end{gathered} \tag{18}$$

При выполнении накладываемых на упругий потенциал условий

$$U'(E) < 0, \qquad U''(E) \geqslant 0 \tag{19}$$

квадратичная форма переменных r, s, соответствующая правой части уравнения (18) [4], положительно определенная:

$$(U''u_x^2 - U')r^2 + 2U''u_x u_y rs + (U''u_y^2 - U')s^2 = U''(ru_x + su_y)^2 - U'(r^2 + s^2) > 0,$$

следовательно, (18) является уравнением гиперболического типа [5. С. 303]. Вместе с условиями внутри объема и на поверхности тела

$$u = f(x,y), \qquad u_t = g(x,y) \qquad \text{при} \quad t = 0, \quad (x,y) \in S,$$
$$u = s(x,y,t) \qquad \text{при} \quad t > 0, \quad (x,y) \in L$$

(L — контур сечения S) это уравнение представляет собой начально-краевую задачу для перемещения.

При известном перемещении уравнения (16) используются для нахождения давления. Эти уравнения, представленные в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x} &= \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial x} + U'\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\Big),\\ \frac{\partial q}{\partial y} &= \Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(U'\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial y} + U'\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Big),\end{aligned}$$

при использовании уравнения движения (17) упрощаются и могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + U'\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} + U'\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}.$$

Используя выражение (17) для инварианта тензора деформации и следующие из него зависимости

$$E = -\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2}, \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2},$$

$$U'\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = -\frac{dU}{dE}\,\frac{\partial E}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U'\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = -\frac{dU}{dE}\,\frac{\partial E}{dy} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

уравнения для давления можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial (q+U)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial (q+U)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{20}$$

Условием совместности уравнений (20) служит равенство смешанных производных $(q+U)_{xy} = (q+U)_{yx}$, из которого следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$

или (после упрощения) равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x} = \frac{\partial (u, u_{tt})}{\partial (x, y)} = 0.$$

Полученное соотношение означает зависимость ускорения от перемещения. Запишем эту зависимость в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{dw(u)}{du}, \tag{21}$$

где $w'(u)$ — произвольная функция.

При выполнении условия (21) правые части уравнений для давления (20) принимают вид градиентов функции $w(u)$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y},$$

что позволяет записать эти уравнения в виде, удобном для интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(q+U+w) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\,(q+U+w) = 0.$$

В результате интегрирования давление определяется в зависимости от потенциала U и функции w с точностью до аддитивной функции времени $h(t)$:

$$q + U + w = h(t). \tag{22}$$

Определим функцию $h(t)$ в предположении, что на торцах цилиндра $S^{\pm}$ задана продольная составляющая $P_3(t)$ результирующих нагрузок:

$$P_3^{\pm} = \int\limits_S p_3^{\pm}\, dS.$$

На торцах $S^{\pm}$ с внешними нормалями $\boldsymbol{n}^{\pm} = (0, 0, \pm 1)$ продольные компоненты плотностей нагрузок $p_3^{\pm}$ выражаются через компоненты напряжений и нормалей:

$$p_3^{\pm} = P_{3l} n_l^{\pm} = \pm P_{33}.$$

Отсюда, используя выражения для напряжений (15) и давления (22), получаем

$$p_3^{\pm} = \mp q = \pm (U + w - h), \qquad P_3 = \int\limits_S (U + w)\, dS - hS.$$

Из последнего равенства определяется искомая функция h:

$$h = \frac{1}{S}\Big[\int\limits_S (U + w)\, dS - P_3\Big].$$

В частности, в отсутствие результирующей продольной нагрузки ($P_3 = 0$) значение этой функции равно среднему значению суммы функций $U + w$ в сечении тела:

$$h = \frac{1}{S}\int\limits_S (U + w)\, dS, \tag{23}$$

а давление (см. (22)) равно отклонению этой суммы от ее среднего значения.

Следует отметить, что при известном перемещении уравнение (21) определяет произвольную функцию $w(u)$. Действительно, умножая левую и правую части уравнения (21) на $2u_t$, получаем уравнение $\partial_t\,(u_t^2 - 2w) = 0$. В результате интегрирования этого уравнения находим

$$u_t^2 - 2w = u_{t0}^2 - 2w(u_0), \tag{24}$$

где u_0, u_{t0} — начальные значения перемещения и скорости.

При не зависящем от времени перемещении $u = u(x, y)$ ускорение равно нулю ($u_{tt} = 0$), а уравнения (20) для суммы функций $q + U$ упрощаются и становятся совместными: $(q+U)_x = 0$, $(q+U)_y = 0$. В результате интегрирования эта сумма оказывается постоянной, не содержащей w [6, 7]: $q+U = h = \mathrm{const}$, т. е. $w(u) = 0$ при $u = u(x, y)$. При изменяющемся со временем перемещении $u = u(x, y, t)$ функция w, вообще говоря, отлична от нуля, но согласно сказанному выше обращается в нуль в начальный момент:

$$t = 0: \qquad w(u_0) = w(u(x, y, 0)) = 0.$$

При этом условии соотношение (24) упрощается и определяет функцию w через актуальную и начальную скорости:

$$w = (u_t^2 - u_{t0}^2)/2. \tag{25}$$

Полагая продольное торцевое усилие отсутствующим ($P_3 = 0$), а упругий потенциал квадратичным, согласующимся с ограничениями (19):

$$\begin{aligned} &U = aE^2 - bE + c' \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c' > 0, \quad E < 0), \\ &U' = 2aE - b < 0, \qquad U'' = 2a > 0, \qquad 2E = -(u_x^2 + u_y^2), \end{aligned} \tag{26}$$

рассмотрим процесс распространения плоских волн в условиях динамического антиплоского деформирования. Решение нелинейного уравнения для перемещения (18), представленного с учетом (26) в форме квазилинейного уравнения второго порядка

$$u_{tt} = (3au_x^2 + au_y^2 + b)u_{xx} + 4au_xu_yu_{xy} + (au_x^2 + 3au_y^2 + b)u_{yy}, \tag{27}$$

будем искать в виде функции одной переменной

$$u = u(s), \quad s = k_1x + k_2y - ct, \quad k_1^2 + k_2^2 = 1, \quad k_1 = \mathrm{const}, \quad k_2 = \mathrm{const}, \quad c = \mathrm{const}. \tag{28}$$

Эта функция описывает распространение плоской волны: координаты точек, находящихся в одной фазе, удовлетворяют уравнению $k_1x + k_2y - ct = m$, $m = \mathrm{const}$, которое определяет плоскость (фронт волны), ортогональную волновому вектору $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, 0)$. В текущий момент времени эта плоскость удалена от начала отсчета на расстояние $d = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k} = ct+m$ и со временем перемещается со скоростью c параллельно самой себе в направлении волнового вектора.

Производные от перемещения (28) по координатам и времени и инвариант деформации (26) имеют значения

$$\begin{gathered} u_x = k_1u_s, \qquad u_y = k_2u_s, \qquad u_t = -cu_s, \qquad E = -u_s^2/2, \\ u_{xx} = k_1^2u_{ss}, \qquad u_{xy} = k_1k_2u_{ss}, \qquad u_{yy} = k_2^2u_{ss}, \qquad u_{tt} = c^2u_{ss}. \end{gathered}$$

Подставляя эти соотношения в (27), получаем уравнение

$$u_{ss}(c^2 - b - 3au_s^2) = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при одном из следующих постоянных значений производной u_s:

$$u_s = g = \text{const},$$
$$u_s = \sqrt{c^2 - b}/\sqrt{3a} = \text{const} \qquad (c^2 > b, \quad a > 0).$$

В обоих этих случаях для перемещения получаем линейные зависимости

$$u = gs + f, \qquad s = k_1x + k_2y - ct, \qquad f = \text{const},$$
$$u = s\sqrt{c^2 - b}/\sqrt{3a} + d', \qquad d' = \text{const}\,.$$

Таким образом, при квадратичном потенциале возможно распространение плоской волны, в которой перемещение линейно зависит от координат и времени.

Для рассматриваемой плоской волны величины u_x, u_y, u_t, E, U, U' выражаются через постоянную производную u_s:

$$u_x = k_1u_s, \qquad u_y = k_2u_s, \qquad u_t = -cu_s,$$
$$E = -u_s^2/2, \qquad U = u_s^2(au_s^2 + 2b)/4 + c', \qquad U' = -(au_s^2 + b)$$

и поэтому также являются постоянными. Следовательно, в этой волне функция w (25) равна нулю, величина h (23) совпадает с потенциалом, давление q (22) обращается в нуль:

$$w = \frac{c^2}{2}\,(u_s^2 - u_{s0}^2) = 0, \qquad h = \frac{1}{S}\int\limits_S (U + w)\,dS = U, \qquad q = h - U - w = 0,$$

а напряжения (15) постоянны:

$$P_{11} = -(au_s^2 + b)k_1^2u_s^2, \qquad P_{22} = -(au_s^2 + b)k_2^2u_s^2, \qquad P_{33} = 0,$$
$$P_{12} = -(au_s^2 + b)k_1k_2u_s^2, \qquad P_{31} = (au_s^2 + b)k_1u_s, \qquad P_{32} = (au_s^2 + b)k_2u_s.$$

Если плоская волна рассматривается при произвольном упругом потенциале, то уравнение (18) сводится не к (27), а к уравнению

$$u_{tt}(2EU_{EE} + U_E + c^2) = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при равенстве нулю одного из множителей. Случай $u_{tt} = 0$, соответствующий квадратичному потенциалу, рассмотрен выше. В случае равенства нулю второго множителя для потенциала $U(E)$ имеем уравнение $2EU_{EE} + U_E + c^2 = 0$. При антиплоском деформировании $E < 0$. Переходя в потенциале к положительному аргументу $J = -E$, для функции $U(J)$ получаем уравнение $2JU_{JJ} + U_J - c^2 = 0$, имеющее общее решение $U(J) = 2A\sqrt{J} + c^2J + B$, $A = \text{const} \geqslant 0$, $B = \text{const} \geqslant 0$. Возвращаясь в выражении для потенциала к прежней переменной и вычисляя его производные, имеем

$$U(E) = 2A\sqrt{-E} - c^2E + B, \qquad U_E = -\big[A(-E)^{-1/2} + c^2\big], \qquad U_{EE} = -(A/2)(-E)^{-3/2}.$$

Полученный потенциал удовлетворяет условиям (19) при $A = 0$:

$$U(E) = B - c^2E, \qquad U'_E = -c^2 < 0, \qquad U''_{EE} = 0,$$

т. е. плоская волна реализуется также при линейно-упругом потенциале. Таким образом, распространение плоской волны при антиплоском деформировании обусловлено квадратичностью (или линейностью) упругого потенциала.

Уравнение для перемещения (27) допускает также автомодельное решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$u(x, y, t) = (t + e)f(z), \qquad z = (x + y)/(t + e), \qquad e = \text{const}\,. \tag{29}$$

Тогда производные перемещения по координатам и времени записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
z_x = z_y = 1/(t+e), \qquad z_t = -z/(t+e), \\
u_x = u_y = f_z, \quad u_t = f - z f_z, \quad u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = f_{zz}/(t+e), \quad u_{tt} = z^2 f_{zz}/(t+e).
\end{gathered} \tag{30}
$$

Используя эти выражения в уравнении (27), получаем уравнение второго порядка для функции $f(z)$:

$$
f_{zz}(z^2 - 12af_z^2 - 2b) = 0.
$$

Это уравнение распадается на два уравнения первого порядка

$$
f_z = k \quad (k = \mathrm{const}), \qquad f_z = \frac{\sqrt{z^2 - 2b}}{2\sqrt{3a}}. \tag{31}
$$

Интегрируя первое из этих уравнений, для $f(z)$ получаем выражение $f = kz + m$, $m = \mathrm{const}$, которое определяет перемещение (29) в виде плоской волны:

$$
u = k(x+y) + m(t+e)
$$

и в котором, как установлено выше, напряжения постоянны. Интегрируя второе уравнение в (31), находим [8]

$$
f = \frac{1}{4\sqrt{3a}} \left(z\sqrt{z^2 - 2b} - 2b \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 2b} \right| \right).
$$

С использованием этого выражения для инварианта деформации и упругого потенциала, а также для производной потенциала получаем формулы

$$
\begin{gathered}
u = \frac{t+e}{4\sqrt{3a}} \left(z\sqrt{z^2 - 2b} - 2b \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 2b} \right| \right), \qquad z = \frac{x+y}{t+e}, \\
E = -\frac{z^2 - 2b}{12a}, \qquad U = \frac{z^2 - 2b}{144a}(z^2 + 10b) + c', \qquad U' = -\frac{z^2 + 4b}{6}.
\end{gathered} \tag{32}
$$

Представлениям (30), (32) соответствуют переменные напряжения (см. (15)):

$$
\begin{gathered}
P_{11} = P_{22} = -q - \frac{z^2 + 4b}{72a}(z^2 - 2b), \qquad P_{33} = -q, \\
P_{12} = -\frac{z^2 + 4b}{72a}(z^2 - 2b), \qquad P_{31} = P_{32} = \frac{z^2 + 4b}{12\sqrt{3a}}\sqrt{z^2 - 2b}, \qquad z = \frac{x+y}{t+e}.
\end{gathered}
$$

Здесь давление определяется формулами (22), (25).

В случае линейно-упругого потенциала рассмотрим другие виды антиплоской деформации, отличные от плоской волны и автомодельного движения. При линейном потенциале

$$
U = c' - bE \quad (b > 0,\ c' > 0,\ E < 0), \qquad U' = -b < 0, \qquad U'' = 0,
$$

следующем из квадратичного потенциала (26) при $a = 0$, уравнение для перемещения (27) упрощается и становится линейным уравнением второго порядка

$$
u_{tt} = b(u_{xx} + u_{yy}). \tag{33}
$$

Это уравнение допускает разделение переменных. Действительно, полагая перемещение равным произведению двух функций различных переменных: $u(x,y,t) = T(t)H(x,y)$ и подставляя его в уравнение (33), можно показать, что функция $T(t)$ удовлетворяет гармоническому уравнению, а $H(x,y)$ — уравнению Гельмгольца:

$$
T_{tt} + k^2 T = 0 \quad (k^2 = \mathrm{const}), \qquad H_{xx} + H_{yy} + m^2 H = 0 \quad (m^2 = k^2/b).
$$

Здесь k^2 — константа разделения переменных.

Решением первого уравнения является периодическая функция времени, определяющая колебания с постоянной частотой, амплитудой и начальной фазой:

$$T = G\sin(kt + e), \qquad G = \text{const}, \qquad e = \text{const},$$

второе уравнение имеет ограниченное решение

$$H = R\sin(m_1x + m_2y + f), \qquad m_1^2 + m_2^2 = m^2,$$
$$R = \text{const}, \quad m_1 = \text{const}, \quad m_2 = \text{const}, \quad f = \text{const}\,.$$

Таким образом, выражение для перемещения, удовлетворяющее исходному уравнению (33), имеет вид

$$\begin{gathered} u(x,y,t) = F\sin(kt + e)\sin(m_1x + m_2y + f), \\ F = GR = \text{const}, \qquad m_1^2 + m_2^2 = m^2. \end{gathered} \tag{34}$$

При упрощающих предположениях

$$P_3 = 0, \qquad c' = 0, \qquad e = 0, \qquad f = 0 \tag{35}$$

из (34) получаем

$$\begin{gathered} u(x,y,t) = F\sin(kt)\sin(m_1x + m_2y), \\ u_x = m_1F\sin(kt)\cos(m_1x + m_2y), \quad u_y = m_2F\sin(kt)\cos(m_1x + m_2y), \\ u_t = kF\cos(kt)\sin(m_1x + m_2y), \\ E = -(m^2F^2/2)\sin^2(kt)\cos^2(m_1x + m_2y), \\ w = -(bm^2F^2/2)\sin^2(kt)\sin^2(m_1x + m_2y), \\ U = (bm^2F^2/2)\sin^2(kt)\cos^2(m_1x + m_2y), \qquad U' = -b. \end{gathered} \tag{36}$$

Следовательно, выражения для напряжений (15) и давления (22) принимают вид

$$\begin{gathered} P_{11} = -q + 2Eb\,\frac{m_1^2}{m^2}, \qquad P_{22} = -q + 2Eb\,\frac{m_2^2}{m^2}, \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = 2Eb\,\frac{m_1m_2}{m^2}, \qquad P_{31} = b\sqrt{2(-E)}\,\frac{m_1}{m}, \qquad P_{32} = b\sqrt{2(-E)}\,\frac{m_2}{m}, \\ q = h(t) - (bm^2F^2/2)\cos(2m_1x + 2m_2y)\sin^2(kt), \end{gathered} \tag{37}$$

где функция $h(t)$ при заданной форме сечения тела определяется выражением (23).

Рассмотрим процесс динамического антиплоского деформирования полого эллиптического цилиндра, имеющего сечение в форме эллиптического кольца с внешним и внутренним эллипсами L, L', оси симметрии которых совпадают с декартовыми осями, а центры — с началом отсчета. Обозначим полуоси эллипсов L и L' через l_1, l_2 ($l_1 > l_2$) и l_1', l_2' ($l_1' > l_2'$), полагая $l_1' < l_2$.

Пусть в условиях антиплоского деформирования в цилиндре перемещение представляется в виде (34), а напряжения — в виде (37). Определим в этом случае вид боковых нагрузок. При упрощающих условиях (35) из (34), (36) следует

$$U + w = (bm^2F^2/2)\sin^2(kt)\cos(2m_1x + 2m_2y).$$

Подставляя это выражение в (23), находим

$$h(t) = \frac{bm^2F^2}{2}\,\frac{J_S}{S}\,\sin^2(kt), \qquad J_S = \int\limits_S \cos(2m_1x + 2m_2y)\,dS = \text{const}\,. \tag{38}$$

Для того чтобы вычислить постоянную J_S, представим площадь S эллиптического кольца в виде разности площадей D, D' внешнего и внутреннего эллипсов:

$$S = D - D' = \pi(l_1 l_2 - l_1' l_2'),$$

а двойной интеграл в (38) — в виде разности интегралов:

$$J_S = J_D - J_{D'},$$
$$J_D = \int\limits_D \cos(2m_1 x + 2m_2 y)\, dD, \qquad J_{D'} = \int\limits_{D'} \cos(2m_1 x + 2m_2 y)\, dD'. \tag{39}$$

Полудуги внешнего эллипса L $(x^2/l_1^2 + y^2/l_2^2 = 1)$ определяются уравнениями $y^\pm = \pm(l_2/l_1)\sqrt{l_1^2 - x^2}$. При учете этих формул двойной интеграл по площади внешнего эллипса сводится к повторному интегралу

$$J_D = \frac{1}{2m_2} \int\limits_{-l_1}^{l_1} (\sin(2m_1 x + 2m_2 y^+) - \sin(2m_1 x + 2m_2 y^-))\, dx$$

или (после замены $x = l_1 u$ и введения обозначений $r_1 = 2m_1 l_1$, $r_2 = 2m_2 l_2$) к разности интегралов

$$J_D = \frac{l_1 l_2}{r_2} (J^+ - J^-),$$
$$J^+ = \int\limits_{-1}^{1} \sin(r_1 u + r_2\sqrt{1-u^2}\,)\, du, \qquad J^- = \int\limits_{-1}^{1} \sin(r_1 u - r_2\sqrt{1-u^2}\,)\, du. \tag{40}$$

Два последних интеграла могут быть приведены к одному и тому же виду. Действительно, первый интеграл путем преобразования переменной интегрирования

$$v = r_1 u + r_2\sqrt{1-u^2} \qquad (u = r^{-2}(r_1 v + r_2\sqrt{r^2 - v^2}\,), \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2)$$

сводится к интегралу

$$J^+ = \frac{1}{r^2} \int\limits_{-r_1}^{r_1} \sin v \left(r_1 - \frac{r_2 v}{\sqrt{r^2 - v^2}}\right) dv = -\frac{r_2}{r^2} \int\limits_{-r_1}^{r_1} \sin v \, \frac{v\, dv}{\sqrt{r^2 - v^2}}. \tag{41}$$

Второй интеграл с помощью преобразования

$$-w = r_1 u - r_2\sqrt{1-u^2} \qquad (u = r^{-2}(-r_1 w + r_2\sqrt{r^2 - w^2}\,), \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2)$$

принимает аналогичный (41) вид

$$J^- = \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{-r_1} \sin w \left(r_1 + \frac{r_2 w}{\sqrt{1 - w^2}}\right) dw = -\frac{r_2}{r^2} \int\limits_{-r_1}^{r_1} \sin w \, \frac{w\, dw}{\sqrt{r^2 - w^2}}. \tag{42}$$

Таким образом, интегралы (41), (42) равны, следовательно, интеграл по площади внешнего эллипса (40) обращается в нуль:

$$J^+ = J^-, \qquad J_D = \frac{l_1 l_2}{r_2} (J^+ - J^-) = 0.$$

Аналогично можно установить, что интеграл по площади внутреннего эллипса также равен нулю ($J_{D'} = 0$). В результате согласно (39) интеграл по эллиптическому кольцу равен нулю ($J_S = 0$). Следовательно, в соответствии с (38) функция $h(t)$ также обращается в нуль:

$$h(t) = \frac{bm^2F^2}{2}\,\frac{J_S}{S}\sin^2(kt) = 0.$$

Таким образом, выражение для давления (37) в данном случае имеет вид

$$q = -\frac{bm^2F^2}{2}\cos(2m_1x + 2m_2y)\sin^2(kt). \tag{43}$$

Для эллиптического кольца уравнения граничных эллипсов L, L' запишем в параметрической форме:

$$x = l_1\cos j, \quad y = l_2\sin j, \qquad x' = l_1'\cos j', \quad y' = l_2'\sin j'.$$

Для компонент n_r, n_r' внешних нормалей к боковым поверхностям цилиндра (контурам L, L') получаем

$$\begin{gathered}
n_1 = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{l_2}{s}\cos j, \qquad n_2 = \frac{-dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{l_1}{s}\sin j,\\
n_3 = 0, \qquad s = \sqrt{l_1^2\sin^2 j + l_2^2\cos^2 j}\,,\\
n_1' = \frac{-dy'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}} = -\frac{l_2'}{s'}\cos j', \qquad n_2' = \frac{dx'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}} = -\frac{l_1'}{s'}\sin j',\\
n_3' = 0, \qquad s' = \sqrt{l_1'^2\sin^2 j' + l_2'^2\cos^2 j'}\,.
\end{gathered} \tag{44}$$

Следовательно, на этих поверхностях нагрузка определяется компонентами $p_k = P_{kr}n_r$, $p_k' = P_{kr}'n_r'$ или (с учетом (37)–(39)) формулами

$$\begin{gathered}
p_1 = -q\,\frac{l_2}{s}\cos j + 2EM\,\frac{bm_1}{sm^2}, \qquad p_2 = -q\,\frac{l_1}{s}\sin j + 2EM\,\frac{bm_2}{sm^2},\\
p_3 = \sqrt{-2E}\,\frac{bM}{sm},\\
p_1' = q'\,\frac{l_2'}{s'}\cos j' - 2E'M'\,\frac{bm_1}{s'm^2}, \qquad p_2' = q'\,\frac{l_1'}{s'}\sin j' - 2E'M'\,\frac{bm_2}{s'm^2},\\
p_3' = -\sqrt{-2E'}\,\frac{bM'}{s'm},\\
M = m_2l_1\sin j + m_1l_2\cos j, \qquad M' = m_2l_1'\sin j' + m_1l_2'\cos j'.
\end{gathered} \tag{45}$$

Здесь величины E, E', q, q' вычисляются по формулам (36), (37) для контуров L, L'.

Представим боковую нагрузку в базисе естественных осей граничных контуров: касательных t_k, t_k', главных нормалей g_k, g_k' и бинормалей b_k, b_k'. Компоненты этих ортов выражаются через компоненты внешних нормалей граничных эллипсов:

$$\begin{gathered}
(t_k) = (-n_2, n_1, 0), \qquad (g_k) = (-n_1, -n_2, 0), \qquad (b_k) = (0, 0, 1),\\
(t_k') = (n_2', -n_1', 0), \qquad (g_k') = (n_1', n_2', 0), \qquad (b_k') = (0, 0, 1).
\end{gathered}$$

Естественные касательные p_t, p'_t, нормальные p_g, p'_g и бинормальные p_b, p'_b компоненты боковой нагрузки определяют соответственно усилия кручения, сжатия и сдвига на внешнем и внутреннем контурах:

$$\begin{gathered}
p_t = p_k t_k = -2E\,\frac{bMN}{s^2m^2}, \quad p_g = p_k g_k = q - 2E\,\frac{bM^2}{s^2m^2}, \\
p_b = p_k b_k = \sqrt{-2E}\,\frac{bM}{sm}, \\
p'_t = p'_k t'_k = 2E'\,\frac{bM'N'}{s'^2m^2}, \quad p'_g = p'_k g'_k = -q' + 2E'\,\frac{bM'^2}{s'^2m^2}, \\
p'_b = p'_k b'_k = -\sqrt{-2E'}\,\frac{bM'}{s'm}, \\
N = m_1 l_1 \sin j - m_2 l_2 \cos j, \qquad N' = m_1 l'_1 \sin j' - m_2 l'_2 \cos j'
\end{gathered} \tag{46}$$

(величины s, s' определены в (44), M, M' — в (45), а значения E, E', q, q' вычисляются по формулам вида (36), (37)). Таким образом, перемещению (27) соответствует боковая нагрузка (46), при действии которой тело подвергается кручению, сжатию и сдвигу. Из формул (46) также следует, что давление влияет на сжатие и не влияет на кручение и сдвиг.

В частном случае, когда внутренняя полость цилиндра вырождается в плоскость (а внутренний контур сечения — в прямолинейный разрез), имеем $l'_2 = 0$. Переходя в формулах (46) к пределу при $l'_2 \to 0$, получаем нагрузку на разрезе

$$\begin{gathered}
p'_t = 2E'b\,\frac{m_1m_2}{m^2}, \qquad p'_g = -q' + 2E'b\,\frac{m_2^2}{m^2}, \qquad p'_b = -b\sqrt{-2E'}\,\frac{m_2}{m}, \\
2E' = -m^2F^2\sin^2(kt)\cos^2(m_1x'), \qquad 2q' = -bm^2F^2\cos(2m_1x')\sin^2(kt).
\end{gathered} \tag{47}$$

Из (47) следует, что нагрузка на разрезе конечна и изменяется в зависимости от координаты и времени по периодическим законам.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
3. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Петровский Н. Г.** Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Физматгиз, 1961.
5. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1968.
6. **Аннин Б. Д., Бондарь В. Д.** Антиплоская деформация нелинейно-упругого несжимаемого тела // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 93–101.
7. **Бондарь В. Д.** Упругопластическое антиплоское деформирование несжимаемого тела // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 1. С. 27–39.
8. **Смолянский М. Л.** Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 25/VII 2014 г.