

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ОДНО- И ДВУСВЯЗНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Получено решение задачи о динамическом поведении идеальных жесткопластических одно- и двусвязных эллиптических пластин, контуры которых шарнирно оперты или защемлены, при кратковременных интенсивных динамических нагрузках. Показано, что существует несколько механизмов динамического деформирования пластин. Для каждого из них получены уравнения динамического поведения. Проанализированы условия реализации каждого механизма. Получены аналитические формулы для предельных, “высоких” и “сверхвысоких” нагрузок и для величины максимального остаточного прогиба. Приведены примеры численных решений.

Эллиптические пластины часто используются в машиностроении в качестве заглушек и защитных элементов. Расчет таких конструкций при воздействии взрывных нагрузок высокой интенсивности в литературе практически отсутствует [1]. В настоящей работе разрабатывается метод расчета остаточной повреждаемости одно- и двусвязных эллиптических пластин под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Мерой повреждаемости служит остаточный прогиб пластин.

Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала с контуром l в форме эллипса, нагруженную равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузкой интенсивности $P(t)$. Контур пластины шарнирно оперт или защемлен.

При динамическом деформировании пластины в зависимости от величины действующей нагрузки возможно несколько схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках), как и в случаях изгиба балок [2], круглых и кольцевых пластин [3–8], прямоугольных и полигональных пластин [2, 9–12], во внутренней области пластины образуется линейный пластический шарнир l_1 , движущийся поступательно (отрезок AB на схеме 1) (рис. 1). При этом вся пластина деформируется в некоторую линейчатую поверхность. При достаточно высоких нагрузках динамика эллиптической пластины, как и всех перечисленных выше конструкций,

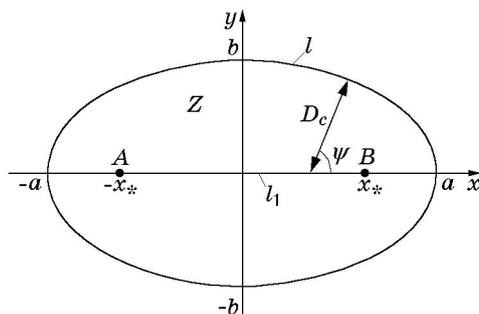


Рис. 1

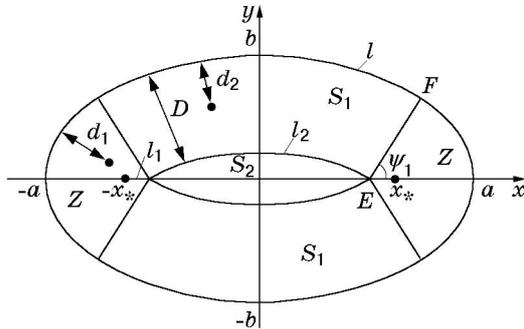


Рис. 2

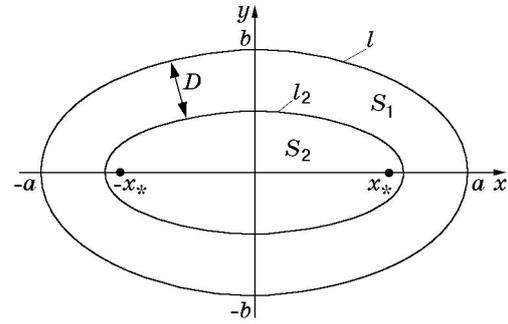


Рис. 3

может сопровождаться возникновением, развитием и исчезновением области S_2 , движущейся поступательно. При “высоких” нагрузках существуют одновременно область S_2 и часть шарнира l_1 (схема 2 на рис. 2), при “сверхвысоких” нагрузках шарнир l_1 исчезает (схема 3 на рис. 3).

Во всех указанных случаях нормали к l из любой точки этого контура попадают либо на шарнир l_1 , либо на кривую l_2 — контур области S_2 .

Уравнение эллипса l задано в параметрической форме $x_1 = a \cos \varphi$, $y_1 = b \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $b \leq a$. Обозначим через $d_1(x, y)$ расстояние от точки $(x, y) \in Z$ до шарнира l_1 по нормали к l , через $d_2(x, y)$ расстояние от точки $(x, y) \in S_1$ до кривой l_2 по нормали к l (Z — часть пластины, из любой точки которой нормаль к l попадает на l_1 ; S_1 — часть пластины, из любой точки которой нормаль к l попадает на l_2) (см. рис. 1–3).

Так как пластина симметрична относительно осей x и y и $b \leq a$, шарнир l_1 является отрезком прямой, лежащим на оси x : $-x_* \leq x \leq x_*$. Из произвольной точки контура l проведем нормаль к этому контуру до пересечения с осью x . Вычислим координаты полученной точки пересечения и определим их максимальное значение x_* .

Уравнение нормали к контуру l в точке $(x_1(\varphi), y_1(\varphi))$ имеет вид

$$-a \sin \varphi (x - a \cos \varphi) + b \cos \varphi (y - b \sin \varphi) = 0. \tag{1}$$

Угол между нормалью к контуру l и осью x равен

$$\psi = \arctg \left((a/b) \operatorname{tg} \varphi \right), \tag{2}$$

$x_l = (a - b^2/a) \cos \varphi$, где $(x_l, 0) \in l_1$; x_l — точка пересечения нормали и оси x . Тогда $x_* = \lim_{\varphi \rightarrow 0} x_l = a - b^2/a$.

Расстояние D_c от точки $(x_1(\varphi), y_1(\varphi))$ контура l до l_1 вычисляется по формуле

$$D_c = \sqrt{(x_1(\varphi) - x_l)^2 + y_1^2(\varphi)} = bL(\varphi)/a, \quad L(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \tag{3}$$

минимальное и максимальное расстояния от l до l_1 — по формулам

$$D_{\min} = \min_{0 \leq \varphi \leq \pi} D_c(\varphi) = b^2/a, \quad D_{\max} = \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} D_c(\varphi) = b.$$

Покажем, что нормаль к l является нормалью и к l_2 . Приближим контур l полигональным контуром \bar{l} . Тогда для полученной полигональной пластины контур внутренней области, движущейся поступательно, примет вид полигонального контура \bar{l}_2 . В [11] показано, что участки внутреннего контура \bar{l}_2 параллельны соответствующим участкам контура \bar{l} . Отсюда следует, что при увеличении количества сторон полигонального контура \bar{l} до бесконечности контур \bar{l}_2 приближается к l_2 , а нормаль к l в каждой точке этого контура является нормалью и к l_2 .

Для того чтобы получить уравнение контура l_2 , из точки $(x_1, y_1) \in l$ проведем нормаль к l и продолжим ее до пересечения с l_2 . Тогда расстояние между l и l_2 $D = \delta R$ ($R(\varphi)$ — радиус кривизны l ; $\delta = \delta(\varphi, t) \geq 0$ — безразмерная функция). Уравнение l_2 имеет вид

$$x_2 = a \cos \varphi - \delta(a \cos \varphi - \xi), \quad y_2 = b \sin \varphi - \delta(b \sin \varphi - \zeta),$$

где $\xi = [1 - L^2(\varphi)/a^2]a \cos \varphi$, $\zeta = [1 - L^2(\varphi)/b^2]b \sin \varphi$ — координаты центра кривизны эллипса l в точке (x_1, y_1) , и, следовательно,

$$x_2 = [1 - \delta L^2(\varphi)/a^2]a \cos \varphi, \quad y_2 = [1 - \delta L^2(\varphi)/b^2]b \sin \varphi. \quad (4)$$

Нормаль к l является нормалью и к l_2 , тогда справедливо равенство (1) при $x = x_2$, $y = y_2$ и

$$x_2'(a \cos \varphi - x_2) + y_2'(b \sin \varphi - y_2) = 0, \quad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\varphi,$$

откуда имеем

$$x_2'b \cos \varphi + y_2'a \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Дифференцируя (4) и подставляя полученные равенства в (5), получим уравнение для определения $\delta(\varphi, t)$

$$\delta' L^4(\varphi) + 3\delta L^2(\varphi)(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\delta = \delta_0 ab / L^3, \quad \delta_0 = \delta_0(t) \geq 0. \quad (6)$$

Радиус кривизны эллипса l $R(\varphi) = L^3/(ab)$. Из (6) получим

$$D = \delta(\varphi, t)R(\varphi) = \delta_0(t). \quad (7)$$

Следовательно, расстояние D между кривыми l и l_2 не зависит от параметра φ . С учетом (6), (7) уравнение (4) для l_2 примет вид

$$x_2 = [a - Db/L(\varphi)] \cos \varphi, \quad y_2 = [b - Da/L(\varphi)] \sin \varphi.$$

Контур l_2 не является эллипсом при $D > 0$. Для того чтобы у кривой l_2 не было взаимно пересекающихся участков, должны выполняться условия $y_2 > 0$ при $0 < \varphi < \pi$, $y_2 < 0$ при $\pi < \varphi < 2\pi$. Поэтому для значений D в интервале $(b^2/a, b)$ кривая l_2 определяется не для всех значений φ . Случаю $D > b$ соответствует схема 1, когда область S_2 и кривая l_2 отсутствуют; случаю $b^2/a < D \leq b$ — схема 2; случаю $D \leq b^2/a$ — схема 3. В случае круглой пластины $a = b$ и деформирование по схеме 2 отсутствует, а шарнир l_1 вырождается в точку — центр пластины.

Схема 2 соответствует общему случаю деформирования пластины. В отсутствие областей S_2 и S_1 эта схема соответствует схеме 1. Когда отсутствует область Z , схема 2 переходит в схему 3. Рассмотрим схему 2.

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальных мощностей с использованием принципа Даламбера [13]:

$$K = A - N; \quad (8)$$

$$K = \iint_S \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} ds; \quad (9)$$

$$A = \iint_S P(t) \frac{\partial u^*}{\partial t} ds; \quad (10)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m \left[\frac{\partial \theta_m^*}{\partial t} \right] dl, \quad (11)$$

где K , A — мощность инерционных и внешних сил пластины; S — площадь пластины; u — прогиб; ρ — поверхностная плотность материала пластины; N — мощность внутренних сил пластины; t — текущее время; l_m — линии разрыва угловых скоростей; M_m — изгибающий момент на l_m ; $[\partial \theta_m^* / \partial t]$ — разрыв угловой скорости на l_m . В выражении для N суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости включая границу пластины. Верхним индексом “*” обозначены допустимые скорости.

В силу непрерывности скоростей на границах области S_2 и шарнира l_1 и их поступательного движения скорость прогиба в области S_2 и на l_1 одна и та же. Обозначим ее $\dot{w}_c(t)$.

Как и в [14], мощность внутренних сил (11)

$$N = M_0(2 - \eta) \oint_l \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial n} dl, \quad (12)$$

где M_0 — предельный изгибающий момент; $\eta = 0$ при заземлении контура, $\eta = 1$ при его шарнирном опирании; $\partial \dot{u} / \partial n$ — производная от скорости прогиба по нормали к контуру l или скорость угла отклонения от горизонта поверхности пластины на контуре l ; dl — элемент контура l ; $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot) / \partial t$.

Обозначим через α угол отклонения прямой EF — границы областей Z и S_1 (см. рис. 2) — от горизонта. Тогда в области S_1 угол поворота поверхности пластины вокруг опорного контура

$$\alpha_2(t) = \alpha(t), \quad (13)$$

а в области Z этот угол равен α_1 . Поскольку часть шарнира l_1 движется поступательно с одной и той же скоростью,

$$\alpha_1(t, \varphi) = \alpha D / D_c. \quad (14)$$

Положение границы EF определяется параметром $\varphi = \varphi_1$. Из (3) следует, что длина EF равна

$$D = L(\varphi_1)b/a. \quad (15)$$

Тогда выражение (12) для N примет вид

$$N = M_0(2 - \eta) \left[\int_{\partial Z} \dot{\alpha}^* \frac{D}{D_c} dl + \int_{\partial S_1} \dot{\alpha}^* dl \right].$$

Область определения Z задана условиями $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, $\pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_1$, $2\pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq 2\pi$, а область S_1 — условиями $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$, $\pi + \varphi_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_1$. В области Z угол ψ изменяется в интервалах $0 \leq \psi \leq \psi_1$, $\pi - \psi_1 \leq \psi \leq \pi + \psi_1$, $2\pi - \psi_1 \leq \psi \leq 2\pi$, где $\psi_1 = \psi(\varphi_1)$; ψ определено в (2). С учетом (3) имеем

$$\int_{\partial Z} \dot{\alpha}^* \frac{D}{D_c} dl = 4 \int_0^{\varphi_1} (\dot{\alpha}^* D) \frac{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}}{D_c} d\varphi = 4\dot{\alpha}^* D \varphi_1 \frac{a}{b}, \quad \int_{\partial S_1} \dot{\alpha}^* dl = 4\dot{\alpha}^* \int_{\varphi_1}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi.$$

Тогда уравнение для N примет вид

$$N = 4M_0(2 - \eta)\dot{\alpha}^* \left[D\varphi_1 \frac{a}{b} + \int_{\varphi_1}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi \right]. \quad (16)$$

Скорость прогиба в точках областей Z , S_1 , S_2 равна

$$(x, y) \in Z: \dot{u} = \dot{\alpha}_1 d_1, \quad (x, y) \in S_1: \dot{u} = \dot{\alpha}_2 d_2, \quad (x, y) \in S_2: \dot{u} = \dot{w}_c. \quad (17)$$

Тогда выражения (9), (10) примут вид

$$K = \rho \left[\dot{\alpha}^* \ddot{\alpha} D^2 \iint_Z \frac{d_1^2}{D_c^2} ds + \dot{\alpha}^* \ddot{\alpha} \iint_{S_1} d_2^2 ds + \dot{w}_c^* \ddot{w}_c \iint_{S_2} ds \right]; \quad (18)$$

$$A = \dot{\alpha}^* \left[P(t) D \iint_Z \frac{d_1}{D_1} ds + P(t) \iint_{S_1} d_2 ds \right] + \dot{w}_c^* P(t) \iint_{S_2} ds. \quad (19)$$

Для вычисления двойных интегралов по областям Z , S_1 удобно перейти в криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) , связанную с декартовой системой координат соотношениями

$$x = [a - v_1 b / L(v_2)] \cos v_2, \quad y = [b - v_1 a / L(v_2)] \sin v_2.$$

Кривые семейства $v_1 = \text{const}$ удалены от контура l рассматриваемого эллипса на расстояние v_1 . Прямые $v_2 = \text{const}$ являются нормальными к контуру эллипса.

Подставляя равенства (16), (18), (19) в (8) и учитывая, что $\dot{\alpha}^*$, \dot{w}_c^* независимы, получим уравнения движения при деформировании по схеме 2

$$\rho \ddot{\alpha} D \Sigma_1 = P(t) \Sigma_2 - 12 M_0 (2 - \eta) \Sigma_3; \quad (20)$$

$$\rho \ddot{w}_c = P(t), \quad (21)$$

где

$$\Sigma_1 = (2a^2 - b^2) \varphi_1 - (a^2 - b^2) \sin 2\varphi_1 + D \frac{a}{b} \left[4 \int_{\varphi_1}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - 3D \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) \right],$$

$$\Sigma_2 = (3a^2 - b^2) \varphi_1 - 1,5(a^2 - b^2) \sin 2\varphi_1 + 2D \frac{a}{b} \left[3 \int_{\varphi_1}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - 2D \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) \right],$$

$$\Sigma_3 = \left[\varphi_1 + \frac{b}{aD} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi \right] \frac{a^2}{b^2}.$$

Из условий непрерывности скоростей на границах областей S_1 и S_2 , S_2 и Z следует

$$\dot{\alpha} D = \dot{w}_c. \quad (22)$$

Система уравнений (15), (20)–(22) описывает движение пластины в случае деформирования по схеме 2. В случае деформирования по схеме 1 области S_1 и S_2 отсутствуют и движение пластины описывается уравнениями (20), (22) при $\varphi_1 = \pi/2$, $D = b$. В случае деформирования пластины по схеме 3 отсутствует область Z и поведение пластины описывается уравнениями (20)–(22) при $\varphi_1 = 0$.

Рассмотрим движение пластины под действием нагрузки ударного типа $P(t)$, которая постепенно увеличивается от нуля до максимального значения P_{\max} , а затем монотонно убывает.

В начальный момент времени пластина покоится:

$$\alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) = w_c(t_0) = \dot{w}_c(t_0) = 0. \quad (23)$$

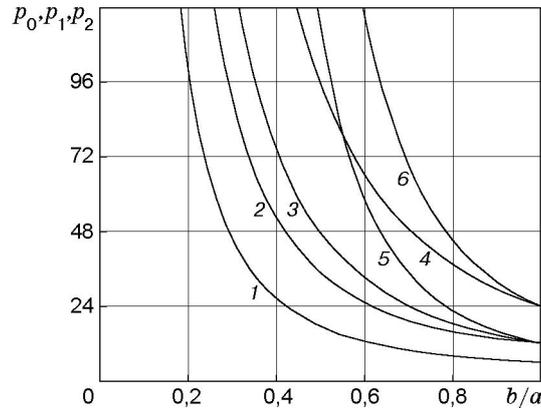


Рис. 4

Если $0 < P_{\max} \leq P_0$ (“низкие” нагрузки), где P_0 — предельная нагрузка, то пластина остается в покое. Величину P_0 определим из уравнения (20) при $\varphi_1 = \pi/2$, $D = b$, считая $\ddot{\alpha}(t_0) = 0$. Тогда

$$P_0 = 12M_0(2 - \eta)/[b^2(3 - b^2/a^2)].$$

Для круглой пластины радиусом R предельная нагрузка равна $P_0 = 6M_0(2 - \eta)/R^2$. В случае шарнирного опирания это значение равно предельной нагрузке \bar{P}_0 , полученной в [3] на основе точного решения. В случае защемленного контура предельная нагрузка, вычисленная по последней формуле, равна $2\bar{P}_0$, в работе [5] она получена в результате приближенного решения на основе условия пластичности Треска и равна $1,875\bar{P}_0$. На рис. 4 представлена зависимость предельной нагрузки p_0 от геометрических параметров эллипса ($p_0 = P_0 a^2/M_0$). Кривая 1 соответствует шарнирному опиранию контура, кривая 2 — защемлению.

Если $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ (“средние” нагрузки), где P_1 — нагрузка, при которой появляются области S_1 и S_2 , то при движении пластины реализуется схема 1. Нагрузку P_1 определим следующим образом. Дифференцируя (22) и исключая с помощью полученного равенства $\ddot{w}_c, \ddot{\alpha}$ из (20), (21), получим

$$-\rho \dot{\alpha} \dot{D} \Sigma_1 = P(t)(\Sigma_2 - \Sigma_1) - 12M_0(2 - \eta)\Sigma_3. \quad (24)$$

В момент возникновения областей S_1 и S_2 область Z занимает всю пластину и $\varphi_1 = \pi/2$, $D = b$, $\dot{D} = 0$. Тогда из (24) следует

$$P_1 = 12M_0(2 - \eta)/b^2 > P_0. \quad (25)$$

Для круглой пластины формула (25) дает $P_1 = 2P_0$. В случае шарнирного опирания этот результат совпадает с полученным в [4, 6]. В случае защемления контура получено $P_1 = 1,998P_0$ (см. [5]). На рис. 4 приведена зависимость нагрузки p_1 от геометрических параметров эллипса ($p_1 = P_1 a^2/M_0$). Кривая 3 соответствует шарнирному опиранию контура, кривая 4 — защемлению.

При “средних” нагрузках движение пластины описывается уравнениями (20), (22) при $\varphi_1 = \pi/2$, $D = b$ с начальными условиями (23), где t_0 определяется из условия $P(t_0) = P_0$. В момент $t = T$ нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции. Момент остановки пластины t_f определяется из условия

$$\dot{w}_c(t_f) = 0 \quad (26)$$

и равен

$$t_f = t_0 + \frac{1}{P_0} \int_{t_0}^T P(t) dt. \quad (27)$$

Прогибы в пластине вычисляются из (17) с учетом (13), (14). Остаточный прогиб в центре пластины вычисляется по формуле

$$w_c(t_f) = \frac{3 - b^2/a^2}{\rho(2 - b^2/a^2)} \left[\frac{1}{2P_0} \left(\int_{t_0}^T P(t) dt \right)^2 - \int_{t_0}^T (t - t_0) P(t) dt \right].$$

В случае шарнирно опертой круглой пластины этот результат совпадает с результатом, полученным в [7].

Если $P_1 < P_{\max} \leq P_2$ (“высокие” нагрузки), где P_2 — нагрузка, при которой область Z перестает существовать, то при движении пластины последовательно реализуются схема 1, схема 2 и вновь схема 1.

Первая фаза ($t_0 < t \leq t_1$). Моменты времени t_0, t_1 определяются из условий $P(t_0) = P_0, P(t_1) = P_1$. Движение пластины описывается уравнениями (20), (22) при $\varphi_1 = \pi/2, D = b$ с начальными условиями (23). В момент t_1 образуются области S_1 и S_2 . В этот момент определяются $\alpha(t_1), \dot{\alpha}(t_1), w_c(t_1), \dot{w}_c(t_1)$.

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_2$). На этом этапе движения происходит развитие областей S_1 и S_2 . Область S_2 достигает максимального размера, затем начинает сжиматься и в момент t_2 исчезает. При этом область Z уменьшается, но не исчезает. Движение пластины описывается уравнениями (15), (20)–(22) с начальными условиями, соответствующими концу первой фазы, и $\varphi_1(t_1) = \pi/2, D(t_1) = D_{\max} = b$.

В момент времени t_* , когда область S_2 достигает максимального размера, выполняется условие $\dot{D}(t_*) = 0$. При рассматриваемой нагрузке область Z продолжает существовать, поэтому $D_{\min} \leq D(t_*)$. Нагрузку P_2 определим из (24), считая $P(t_*) = P_2$ и учитывая, что область Z отсутствует, а $D(t_*) = D_{\min} = b^2/a, \varphi_1 = 0$. Используя приближенную формулу [15]

$$\int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi \approx \frac{\pi Q}{8}, \quad Q = 3(a + b) - 2\sqrt{ab}, \quad (28)$$

получим

$$P_2 = \frac{6M_0(2 - \eta)}{(b^2/a)^2 [1 - 2(b^2/a)/Q]}.$$

Для круглой пластины $P_1 = P_2$, т. е. “высокие” и “сверхвысокие” нагрузки совпадают. На рис. 4 представлена зависимость нагрузки p_2 от геометрических параметров эллипса ($p_2 = P_2 a^2 / M_0$). Кривая 5 соответствует шарнирному опиранию контура, кривая 6 — защемлению.

Вторая фаза заканчивается в момент времени t_2 , когда $D(t_2) = D_{\max} = b$. В конце фазы определяются $\alpha(t_2), \dot{\alpha}(t_2), w_c(t_2), \dot{w}_c(t_2)$.

Третья фаза ($t_2 < t \leq t_f$). Движение пластины описывается уравнениями (20), (22) при $\varphi_1 = \pi/2, D = b$ и начальных условиях, соответствующих концу второй фазы. Момент остановки пластины определяется условием (26). Все прогибы в пластине вычисляются из (13), (14), (17) с учетом всех фаз движения.

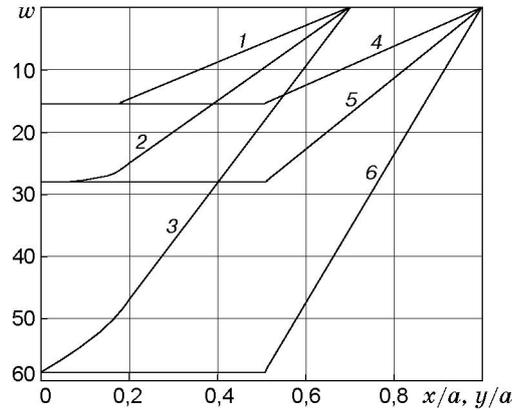


Рис. 5

Если $P_{\max} > P_2$ (“сверхвысокие” нагрузки), то при движении пластины последовательно реализуются схемы 1–3. После достижения максимального значения нагрузка монотонно убывает, и далее последовательно реализуются схемы 2 и 1.

Первая фаза ($t_0 < t \leq t_1$) соответствует первой фазе движения при “высоких” нагрузках и описывается теми же уравнениями.

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_2$). На этом этапе движения происходит развитие областей S_1 и S_2 по схеме 2, а область Z уменьшается и исчезает в момент t_2 , который определяется из соотношения $P(t_2) = P_2$. Движение пластины описывается уравнениями (15), (20)–(22) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы. В конце второй фазы вычисляются $\alpha(t_2)$, $\dot{\alpha}(t_2)$, $w_c(t_2)$, $\dot{w}_c(t_2)$.

Третья фаза ($t_2 < t \leq t_3$). На этом этапе движения происходит деформирование пластины по схеме 3. Поведение пластины описывается уравнениями (20)–(22) при $\varphi_1 = 0$ с начальными условиями, определенными в конце второй фазы. В некоторый момент времени t_{**} область S_2 достигает максимального размера, при этом $D(t_{**}) = D_{**}$, $\dot{D}(t_{**}) = 0$. Тогда из (24) при $\varphi_1 = 0$ и из (28) следует соотношение

$$P(t_{**})D_{**}^2(1 - 2D_{**}/Q) = 6M_0(2 - \eta).$$

Время t_3 определяется из условия $D(t_3) = D_{\min} = b^2/a$ и соответствует моменту появления области Z . В конце третьей фазы определяются $\alpha(t_3)$, $\dot{\alpha}(t_3)$, $w_c(t_3)$, $\dot{w}_c(t_3)$.

Четвертая фаза ($t_3 < t \leq t_4$). На этом этапе движения происходит дальнейшее сжатие области S_2 по схеме 2. В момент t_4 область S_2 исчезает, а область Z занимает всю пластину. Движение пластины описывается уравнениями (15), (20)–(22) с начальными условиями, определенными в конце третьей фазы. Время t_4 определяется из условия $D(t_4) = D_{\max} = b$. В конце четвертой фазы определяются $\alpha(t_4)$, $\dot{\alpha}(t_4)$, $w_c(t_4)$, $\dot{w}_c(t_4)$.

Пятая фаза ($t_4 < t \leq t_f$). На этом этапе движение происходит по схеме 1 до полной остановки пластины в момент t_f , определяемый из условия (26), и описывается уравнениями (20), (22) при $\varphi_1 = \pi/2$, $D = b$.

Прогибы определяются из (13), (14), (17) с учетом всех фаз движения. На рис. 5 приведены зависимости $w(x/a)$, $w(y/a)$ ($w = ua^2\rho/(M_0T^2)$) для эллиптической шарнирно опертой пластины с отношением полуосей $b/a = 0,7$, находящейся под действием “высокой” нагрузки импульсом прямоугольной формы: $P = 31,5M_0/a^2$ при $0 \leq t \leq T$, $P = 0$ при $t > T$. Кривые 1–3 соответствуют прогибам в сечении $x = 0$ в моменты времени $t = T$, $t = t_p = 1,39T$, $t = t_f = 3,34T$ соответственно (t_p — момент исчезновения области S_2). Кривые 4–6 соответствуют прогибам в сечении $y = 0$ в те же моменты времени.

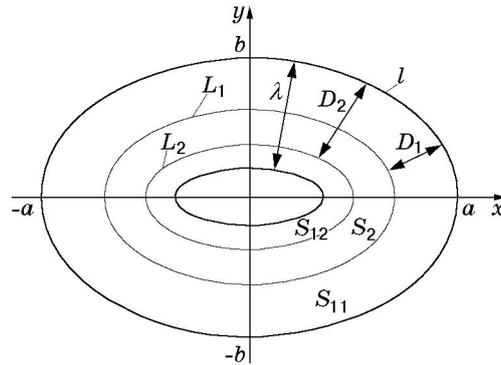


Рис. 6

Рассмотрим эллиптическую пластину с контуром l и внутренним закрепленным отверстием, заданным параметрическими уравнениями

$$x = [a - \lambda b/L(\varphi)] \cos \varphi, \quad y = [b - \lambda a/L(\varphi)] \sin \varphi,$$

где λ — расстояние от точек внешнего контура до отверстия пластины ($0 < \lambda \leq b^2/a$, $\lambda = \text{const}$) (рис. 6). В этом случае уравнения границ L_i ($i = 1, 2$) области S_2 , движущейся поступательно, аналогичны уравнению кривой l_2 пластины без отверстия:

$$x_{li} = [a - D_i b/L(\varphi)] \cos \varphi, \quad y_{li} = [b - D_i a/L(\varphi)] \sin \varphi,$$

где D_i — расстояние от контура l до границы L_i ; $0 < D_1 \leq D_2 < \lambda$ (рис. 6).

При выбранной форме внутреннего контура область S_2 , движущаяся поступательно, возникает одновременно во всех точках кривой l_1 , и на этой кривой выполняется равенство

$$D_1 = D_2. \quad (29)$$

Обозначим через S_{11} , S_{12} части пластины, касающиеся внешнего и внутреннего контуров соответственно. Пусть β_i ($i = 1, 2$) — угол поворота области S_{1i} вокруг опорного контура. Для рассматриваемой двусвязной пластины система уравнений движения, как и в случае односвязной пластины, включает уравнение (21) и

$$\rho \ddot{\beta}_1 D_1 \Sigma_{11} = P(t) \Sigma_{12} - 12M_0(2 - \eta_1) \Sigma_{13}; \quad (30)$$

$$\rho \ddot{\beta}_2 (\lambda - D_2) \Sigma_{21} = P(t) \Sigma_{22} - 12M_0(2 - \eta_2) \Sigma_{23}; \quad (31)$$

$$\dot{\beta}_1 D_1 = \dot{w}_c; \quad (32)$$

$$\dot{\beta}_2 (\lambda - D_2) = \dot{w}_c, \quad (33)$$

где $\eta_i = 0$ при защемлении контура, $\eta_i = 1$ при его шарнирном опирании; индекс $i = 1$ соответствует внешнему контуру, $i = 2$ — внутреннему,

$$\Sigma_{11}(D_1) = 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - 3D_1 \frac{\pi}{2}, \quad \Sigma_{12}(D_1) = 2 \left(3 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - D_1 \pi \right),$$

$$\Sigma_{13}(D_1) = D_1^{-2} \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi, \quad \Sigma_{21}(D_2) = 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - (\lambda + 3D_2) \frac{\pi}{2},$$

$$\Sigma_{22}(D_2) = 2 \left(3 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \frac{(\lambda + 2D_1)\pi}{2} \right), \quad \Sigma_{23}(D_2) = \frac{1}{(\lambda - D_2)^2} \left(\int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \frac{\lambda\pi}{2} \right).$$

В случае вырождения области S_2 в кривую линию должно выполняться соотношение (29). Начальные условия имеют вид

$$\beta_i(t_0) = \dot{\beta}_i(t_0) = w_c(t_0) = \dot{w}_c(t_0) = 0, \quad D_i(t_0) = D_{i0} \quad (i = 1, 2). \quad (34)$$

Значения D_{i0} определяются ниже.

Предельную нагрузку P_0^* определим из (30), (31), считая $\ddot{\beta}_i = 0$ ($i = 1, 2$) и учитывая (28). Тогда

$$P_0^* = \frac{6M_0(2 - \eta_1)}{D_0^2(3 - 8D_0/Q)},$$

где D_0 определяется из равенства

$$\frac{2 - \eta_1}{D_0^2(3 - 8D_0/Q)} = \frac{(2 - \eta_2)(1 - 4\lambda/Q)}{(\lambda - D_0)^2[3 - 4(\lambda + 2D_0)/Q]}.$$

Рассмотрим поведение пластины в случае нагружения импульсом прямоугольной формы: $P = \text{const}$ при $0 \leq t \leq T$, $P = 0$ при $t > T$. При этом функции $D_i(t)$ ($i = 1, 2$) будут постоянными во время действия нагрузки. При $0 < P \leq P_0^*$ (“низкие” нагрузки) пластина не деформируется и остается в покое. При $P_0^* < P \leq P_1^*$ (“средние” нагрузки) область S_2 отсутствует. Нагрузку P_1^* , при которой появляется область S_2 , определим следующим образом. Дифференцируя по времени (32) и (33) с учетом (21) и подставляя полученные значения в (30), (31), получим

$$P\Sigma_{11} = P\Sigma_{12} - 12M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{13}; \quad (35)$$

$$P\Sigma_{21} = P\Sigma_{22} - 12M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{23}. \quad (36)$$

В момент образования области S_2 выполняется соотношение (29). Тогда из (28), (35), (36) следует

$$P_0^* = \frac{6M_0(2 - \eta_1)}{D_p^2(1 - 2D_p/Q)},$$

где D_p — значение D_1 при $P = P_1^*$, определяемое из равенства

$$\frac{2 - \eta_1}{D_p^2(1 - 2D_p/Q)} = \frac{(2 - \eta_2)(1 - 4\lambda/Q)}{(\lambda - D_p)^2[1 - 2(\lambda + D_p)/Q]}.$$

При “средней” нагрузке движение двусвязной эллиптической пластины при $0 \leq t \leq T$ (первая фаза) описывается уравнениями (29)–(33) с начальными условиями (34), в которых величина D_{10} определяется следующим образом. Дифференцируя по времени (32), (33), исключая \ddot{w}_c и подставляя в полученное выражение равенства (28)–(31), получим уравнение для определения D_{10}

$$P\lambda\left(1 - \frac{4D_{10}}{Q}\right) = 6M_0\left[\frac{2 - \eta_1}{D_{10}^2}\left(1 - \frac{\lambda + 3D_{10}}{Q}\right) - \frac{2 - \eta_2}{(\lambda - D_{10})^2}\left(1 - \frac{4\lambda}{Q}\right)\left(1 - \frac{3D_{10}}{Q}\right)\right].$$

Тогда из уравнений движения получим

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1(t) &= \frac{tF}{\rho D_{10}}, & \dot{\beta}_2(t) &= \frac{tF}{\rho(\lambda - D_{10})}, & \dot{w}_c(t) &= \frac{tF}{\rho}, & \beta_1(t) &= \frac{t^2 F}{2\rho D_{10}}, \\ \beta_2(t) &= \frac{t^2 F}{2\rho(\lambda - D_{10})}, & w_c(t) &= \frac{t^2 F}{2\rho}, & F &= \frac{\Sigma_{12}(D_{10})}{\Sigma_{11}(D_{10})}(P - P_0^*). \end{aligned}$$

В конце первой фазы ($t = T$)

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1(T) &= \frac{TF}{\rho D_{10}}, & \dot{\beta}_2(T) &= \frac{TF}{\rho(\lambda - D_{10})}, & \dot{w}_c(T) &= \frac{TF}{\rho}, \\ \beta_1(T) &= \frac{T^2 F}{2\rho D_{10}}, & \beta_2(T) &= \frac{T^2 F}{2\rho(\lambda - D_{10})}, & w_c(T) &= \frac{T^2 F}{2\rho}.\end{aligned}\quad (37)$$

Вторая фаза ($T < t \leq t_f$). Поведение пластины описывается системой, содержащей уравнения (29), (32), (33) и

$$\rho \ddot{\beta}_1 D_1 \Sigma_{11} = -12M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{13}; \quad (38)$$

$$\rho \ddot{\beta}_2(\lambda - D_1)\Sigma_{21} = -12M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{23} \quad (39)$$

с начальными условиями (37) и $D_1(T) = D_{10}$. Дифференцируя по времени (32), (33) и исключая из них \dot{w}_c , получим

$$\ddot{\beta}_2(\lambda - D_1) = \ddot{\beta}_1 D_1 + \dot{\beta}_1 \dot{D}_1 \lambda / (\lambda - D_1),$$

откуда с учетом (38), (39) следует

$$\dot{D}_1 \frac{\dot{\beta}_1 \lambda}{\lambda - D_1} = \frac{12M_0}{\rho} \left(\frac{(2 - \eta_1)\Sigma_{13}}{\Sigma_{11}} - \frac{(2 - \eta_2)\Sigma_{23}}{\Sigma_{21}} \right). \quad (40)$$

Система (38)–(40) решается численно. Момент остановки определяется из условия (26). Из (26), (32), (38) следует, что величина $D_1(t_f) = D_f$ удовлетворяет уравнению

$$(2 - \eta_1)\Sigma_{13}(D_f)/\Sigma_{11}(D_f) = (2 - \eta_2)\Sigma_{23}(D_f)/\Sigma_{21}(D_f).$$

Прогибы двусвязной эллиптической пластины определяются из уравнений

$$(x, y) \in S_{11}: \dot{u} = \dot{\beta}_1(t)d(x, y), \quad (x, y) \in S_{12}: \dot{u} = \dot{\beta}_2(t)d(x, y), \quad (x, y) \in S_2: \dot{u} = \dot{w}_c, \quad (41)$$

где $d(x, y)$ — расстояние от точки (x, y) до опорной стороны части пластины, в которой находится эта точка.

Численные расчеты показали, что значения величин D_0 , D_p , D_{10} (при $P_0^* \leq P \leq P_1^*$), D_f различаются мало. Поэтому можно предложить приближенный аналитический метод решения задачи, основанный на предположении $D_1 = \text{const}$. Тогда система уравнений (29)–(33) заменяется системой (29), (30), (32), (33) при $D_1 = \text{const}$, из решения которой следует

$$w_c(T) = \frac{3 - 8D_1/Q}{4\rho(1 - 3D_1/Q)} T^2(P - P_0^*), \quad w_c(t_f) = \frac{3 - 8D_1/Q}{4\rho(1 - 3D_1/Q)} T^2 \frac{P^2}{P_0^*} \left(1 - \frac{P_0^*}{P}\right), \quad t_f = \frac{PT}{P_0^*}.$$

Различие значений максимального остаточного прогиба, полученных при решении системы уравнений (29)–(33) методом Рунге — Кутты и системы (29), (30), (32), (33) при $D_1 = (D_0 + D_p)/2$ аналитическим методом, составляет не более 2 %. На рис. 7 приведены зависимости $w(x/a)$ для двусвязной эллиптической пластины с отношением полуосей $b/a = 0,8$ и $\lambda = b^2/a$, шарнирно опертой по обоим контурам при “средней” нагрузке импульсом прямоугольной формы: $P = 37M_0/a^2$, полученные из аналитического решения. Кривая 1 соответствует прогибам в момент времени $t = T$, кривая 2 — в момент остановки $t = t_f = 1,97T$.

Приближенную систему уравнений (29), (30), (32), (33) при $D_1 = \text{const}$ можно решить в случае “средней” нагрузки импульсом произвольной формы: $P(t_0) = P_0^*$; $P(t) \leq P_1^*$ при

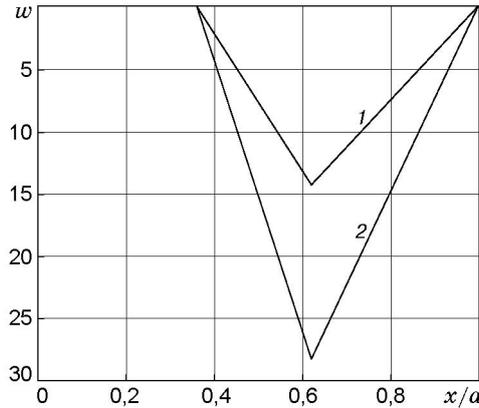


Рис. 7

$t_0 \leq t \leq T$; $P(t) = 0$ при $t > T$. Из решения этой системы следует, что время остановки пластины t_f определяется из (27), а максимальный остаточный прогиб равен

$$w_c(t_f) = \frac{3 - 8D_1/Q}{4\rho(1 - 3D_1/Q)} \left[\frac{1}{P_0} \left(\int_{t_0}^T P(t) dt \right)^2 - 2 \int_{t_0}^T (t - t_0)P(t) dt \right].$$

При “высокой” нагрузке ($P > P_1^*$) первая фаза ($0 \leq t \leq T$) движения двусвязной эллиптической пластины описывается уравнениями (21), (30)–(33) с начальными условиями (34). Значения D_{i0} ($i = 1, 2$) определяются из уравнений (35), (36). В конце первой фазы определяются значения

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1(T) &= \frac{PT}{\rho D_{10}}, & \dot{\beta}_2(T) &= \frac{PT}{\rho(\lambda - D_{20})}, & \dot{w}_c(T) &= \frac{PT}{\rho}, \\ \beta_1(T) &= \frac{PT^2}{2\rho D_{10}}, & \beta_2(T) &= \frac{PT^2}{2\rho(\lambda - D_{20})}, & w_c(T) &= \frac{PT^2}{2\rho}. \end{aligned} \tag{42}$$

Во второй фазе ($T < t \leq t_1$) происходит сжатие области S_2 , движение пластины описывается системой уравнений, содержащей уравнения (32), (33), (38), (39) и

$$\ddot{w}_c = 0 \tag{43}$$

с начальными условиями (42). Из (43) следует

$$\dot{w}_c(t) = \dot{w}_c(T) = PT/\rho, \tag{44}$$

тогда $w_c(t) = PTt/\rho$. Дифференцируя по t (32), (33), учитывая (43) и подставляя полученные выражения в (38), (39) (с учетом (32), (33), (44)), имеем

$$\dot{D}_1 = 12M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{13}D_1/(\Sigma_{11}PT), \quad \dot{D}_2 = -12M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{23}(\lambda - D_2)/(\Sigma_{21}PT). \tag{45}$$

Система (38), (39), (45) решается численно. Время t_1 сжатия области S_2 находится из условия (29). В конце второй фазы определяются значения $\dot{\beta}_i(t_1)$, $\beta_i(t_1)$ ($i = 1, 2$), $\dot{w}_c(t_1) = PT/\rho$, $w_c(t_1) = PTt_1/\rho$.

В третьей фазе ($t_1 < t \leq t_f$) движение аналогично движению во второй фазе при “средней” нагрузке.

Прогибы пластины определяются из (41) с учетом всех фаз движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мазалов В. Н., Немировский Ю. В.** Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке. 1975. Вып. 5. С. 155–247.
2. **Комаров К. Л., Немировский Ю. В.** Динамика жесткопластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
3. **Гопкинс Г., Прагер В.** Несущая способность круглых пластинок // Механика. 1955. № 3. С. 100–111.
4. **Гопкинс Г., Прагер В.** Динамика пластической круглой пластинки // Там же. С. 112–122.
5. **Флоренс А. Л.** Поведение защемленной круговой жесткопластической пластинки под действием взрывного давления // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1966. № 2. С. 11–17.
6. **Perzyna P.** Dynamic load carrying capacity of circular plate // Arch. Mech. Stos. 1958. V. 10, N 5. P. 635–647.
7. **Youngdahl C. K.** Influence of pulse on the final plastic deformation of a circular plate // Intern. J. Solids Struct. 1971. V. 7, N 9. P. 1127–1142.
8. **Флоренс А. Л.** Кольцевая пластинка под действием поперечного линейного импульса // Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 9. С. 202–211.
9. **Вирма Э.** Динамика пластических прямоугольных пластин // Учен. зап. Тарт. ун-та, 1972. Вып. 305. С. 289–299.
10. **Jones N., Uran T. O., Tekin S. A.** The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates // Intern. J. Solids Struct. 1970. V. 6, N 2. P. 1499–1512.
11. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамический изгиб пластических полигональных плит // ПМТФ. 1988. № 4. С. 149–157.
12. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 5. С. 52–59.
13. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
14. **Ржаницын А. Р.** Строительная механика. М.: Высш. шк., 1982.
15. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. С. 202.

Поступила в редакцию 10/VII 2001 г.
