в среде показывает, что диапазон линейности характеристики $\Delta\Phi = \varphi(\langle n'^2\rangle^{1/2})$ для источника света конечных размеров существенно больший, чем это имеет место для точечного источника.

Четвертым звеном в оптическом приборе, как в системе преобразования информации, можно считать фотоприемник, который обычно используется в линейном режиме. Таким образом, линейность по отношению к величине $\langle n'^2\rangle^{1/2}$ прослеживается го всех звеньях прибора.

Поступила 5 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянко Н. Ф., Трохан А. М. Исследование турбулентности оптическими методами. ПМТФ, 1968, № 4.
2. Холдер Д., Норт Р. Теневые методы в аэродинамике. М., «Мир», 1966.
3. Душин Л. А., Павличенко О. С., Исследование плазмы с помощью лазеров, М., Атомиздат, 1968.
4. Uberoi M. S., Kovasznay L. S. G. Analysis of turbulent density fluctuations by the shadow method. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 1.
5. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
6. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 1.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
8. Гурвич А. С. Определение характеристик турбулентности из экспериментов по распространению света. Изв. АН СССР, Сер. физ. атмосферы и океана, 1968, т. 4, № 2.
9. Weiner M. M. Atmospheric turbulence in optical surveillance systems. Appl. Optics, 1967, vol. 6., No. 11.
10. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
11. Кабанов М. В. Оптическая передаточная функция для рассеивающих сред. Изв. АН СССР, Сер. физ. атмосферы и океана, 1968, т. 4, № 8.
12. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
13. Колчинский И. Г. Оптическая нестабильность земной атмосферы по наблюдениям звезд. Киев, «Наукова думка», 1967.

О ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. Сизонов

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается диссипация энергии при неустановившихся ламинарных течениях несжимаемой вязкой жидкости.

Показано, что в зависимости от условий движения диссипируется от 50 до 100% энергии, затраченной на тангенциальное перемещение твердой поверхности в жидкости. Рассмотрен также вопрос об оценке полей скоростей, найденных решением приближенных уравнений движения жидкости.

Имеет место следующее предложение: при внезапном приведении в тангенциальное движение твердых границ, скорость перемещения которых в дальнейшем остается постоянной, на вовлечение в движение вязкой жидкости, заключенной внутри движущихся границ в отсутствие инерционных ускорений, расходуется половина всей затраченной работы, вторая половина работы диссипируется в тепло, причем это отношение не зависит ни от физических свойств жидкости, ни от скорости перемещения границ.

На основании теорем сравнения Гельмгольца и Рэлея можно утверждать, что при таких же движениях границ, но с наличием инерционных ускорений в жидкости, доля диссипированной энергии превышает $1/2$.

Ограничимся рассмотрением лишь наиболее интересных частных случаев.

1. Для случая движения бесконечной трубы вдоль своей оси, возникшего в момент $t = 0$ с постоянной скоростью U, можно получить следующее выражение для скорости частиц жидкости, находящихся внутри трубы

$$u = U\left[1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{0k}r/a)}{\alpha_{0k}J(\alpha_{0k})}\exp\left(-\frac{\alpha_{0k}^2}{a^2}\nu t\right)\right]$$

Здесь a — радиус трубы, r — текущий радиус, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, α_{0k} — корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$, ν — коэффициент кинематической вязкости, t — время.

Удельная (на единицу длины трубы) мощность, диссипируемая в жидкости при движении трубы, равна

$$D = 4\pi\mu U^2 \sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-2\frac{\alpha_{0k}^2}{a^2}\nu t\right)$$

а удельная мощность внешних сил, затрачиваемая на движение трубы, равна

$$N = 4\pi\mu U^2 \sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\alpha_{0k}^2}{a^2}\nu t\right)$$

Отношение удельной энергии, диссипированной в жидкости за время t от начала движения

$$A_d = 2\pi a^2\rho U^2\left[\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{0k}^2}\exp\left(-2\frac{\alpha_{0k}^2}{a^2}\nu t\right)\right]$$

к удельной работе внешних сил за это же время

$$A = 4\pi a^2\rho U^2\left[\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{0k}^2}\exp\left(-\frac{\alpha_{0k}^2}{a^2}\nu t\right)\right] \to \frac{1}{2} \text{ при } t\to\infty$$

Таким образом, половина затраченной работы диссипируется в тепло, половина же расходуется на вовлечение жидкости в движение.

2. Для случая вращения бесконечно длинного цилиндра радиуса a вокруг своей оси, приведенного во вращение в момент $t = 0$ с постоянной угловой скоростью ω, можно получить следующее выражение для окружной скорости жидкости [1]:

$$u = \omega a\left[\frac{r}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_{1k}r/a)}{\alpha_{1k}J_0(\alpha_{1k})}\exp\left(-\frac{\alpha_{1k}^2}{a^2}\nu t\right)\right]$$

Здесь J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, α_{1k} — корни уравнения $J_1(\alpha) = 0$.

Скорость диссипации энергии в единице объема жидкости равна

$$E = 4\mu\xi^2 - 4\mu\frac{\partial u}{\partial r}\frac{u}{r}, \quad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (\xi \text{ — вихрь})$$

Мощность, диссипируемая в жидкости (на единицу длины цилиндра), равна

$$D = 4\pi\mu\omega^2 a^2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-2\frac{\alpha_{1k}^2}{a^2}\nu t\right)$$

Подводимая мощность

$$N = 4\pi\mu\,\omega^2 a^2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\alpha_{1k}^2}{a^2}\nu t\right)$$

И в этом случае отношение удельной диссипированной энергии

$$A_d = 2\pi\rho\,\omega^2 a^4 \left[\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{1k}^2} \exp\left(-2\frac{\alpha_{1k}^2}{a^2}\nu t\right)\right]$$

к удельной работе внешних сил

$$A = 4\pi\rho\omega^2 a^4 \left[\frac{1}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{1k}^2} \exp\left(-\frac{\alpha_{1k}^2}{a^2}\nu t\right)\right] \to \frac{1}{2} \text{ при } t \to \infty$$

Для цилиндра конечной длины, а также эллипсоида, шара и т. п. на основании теоремы Гельмгольца это отношение будет превышать $^1/_2$, причем чем больше скорость движения границ, тем при прочих равных условиях будет больше доля диссипированной энергии.

3. Характерной особенностью задачи является условие ограниченности жидкости движущимися поверхностями.

Если твердая поверхность совершает тангенциальное движение в неограниченной жидкости, то доля диссипированной энергии возрастает.

Так, например, для случая тангенциального движения в бесконечно глубокой жидкости неограниченной плоскости, начавшей движение с постоянной скоростью U в момент $t = 0$, можно получить следующее выражение для скорости частиц жидкости [1]:

$$u = U\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 t)\sin\frac{\alpha y}{\sqrt{\nu}}\frac{d\alpha}{\alpha}\right)$$

где y — ордината, отсчитываемая от движущейся плоскости.

Диссипируемая мощность, приходящаяся на единицу площади движущейся плоскости, равна

$$D = \rho U^2 \sqrt{\nu/2\pi t}$$

удельная мощность внешних сил, затрачиваемых на движение плоскости

$$N = \rho U^2 \sqrt{\nu/\pi t}$$

Отношение удельной (на единицу площади) энергии, диссипированной в жидкости

$$A_d = \rho U^2 \sqrt{2\nu t/\pi}$$

к затраченной работе

$$A = 2\rho U^2 \sqrt{\nu t/\pi}$$

равно в этом случае $1/\sqrt{2}$ и не зависит от времени.

Таким образом, в случае тенгенциального движения плоскости в неограниченной жидкости на вовлечение жидкости в движение расходуется менее 30% работы внешних сил, а более 70% затраченной работы диссипируется.

В то же время для случая параллельного движения двух плоскостей, отстоящих одна от другой на расстоянии h и начавших движение в момент $t = 0$ в одном направлении с постоянной скоростью U, отношение диссипированной энергии к затраченной работе равно $^1/_2$, так как жидкость в этом случае заключена внутри движущихся поверхностей.

Действительно, можно показать, что скорость жидкости в этом случае определяется выражением

$$u = U\left\{1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left[-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\nu t\right]\right\}$$

и мощность внешних сил, расходуемая на движение плоскостей, равна

$$N = 8\frac{\mu U^2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\nu t\right]$$

а диссипируемая в жидкости мощность равна

$$D = 8\,\frac{\mu U^2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-2\,\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\,\nu t\right]$$

Отношение удельной энергии, диссипированной в жидкости за время t

$$A_d = 4\rho\,\frac{U^2}{\pi^2}\,h\left\{\frac{\pi^2}{8} - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left[-2\,\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\,\nu t\right]\right\}$$

к затраченной за это же время работе

$$A = 8\rho\,\frac{U^2}{\pi^2}\,h\left\{\frac{\pi^2}{8} - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left[-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\,\nu t\right]\right\}$$

равно $1/2$ при $t \to \infty$.

Отметим, что удельная (на единицу площади поверхности) работа внешних сил, затраченная на тангенциальное перемещение поверхностей, ограничивающих жидкость, конечна при $t \to \infty$, в то время как удельная работа тангенциального перемещения любых поверхностей в неограниченной жидкости при $t \to \infty$ бесконечно возрастает вследствие вовлечения в движение неограниченной массы жидкости.

Для тангенциальных движений твердых поверхностей, сопровождающихся диссипацией энергии на установившихся режимах, например для случаев вращения цилиндра или плоскости в неограниченной жидкости, движения плоскости параллельно некоторой неподвижной плоскости, движения трубы в трубе и т. п., относительная доля диссипированной за время переходного процесса (т. е. за период разгона движения) энергии равна единице. Переходный процесс в этом случае сопровождается диссипацией энергии, бесконечно превышающей энергию, потраченную на вовлечение жидкости в движение.

В заключение следует отметить, что решения таких задач, как задача Н. А. Слезкина [1] о погружении в вязкую жидкость пластины, задача С. М. Тарга [2] о погружении трубы, решения различных задач о развитии пограничного слоя и т. п., полученные на основе решения приближенных уравнений движения, дают энергетически невозможные поля скоростей в жидкости, так как диссипация энергии в таких полях получается бесконечной. Причиной этому служит неудовлетворительная форма профиля скорости у передней кромки твердых стенок, получающаяся при принятии граничного условия невозмущенности течения жидкости у передней кромки стенки. Поверхность максимального градиента скорости в этом случае получается выпуклой по отношению к погружаемой поверхности, будучи в то же время бесконечной у передней кромки. Так, например, в случае погружения трубы мощность, диссипируемая в объеме жидкости внутри погруженной части трубы длиной h, равна

$$D = 4\pi\mu\int_0^a\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 r\,dr\,dx = -4\pi\rho U\nu^2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-2\,\frac{\alpha_{0k}^2}{Ua^2}\,x\right)\Bigg|_0^h \to \infty$$

хотя мощность, затрачиваемая на погружение трубы, получается конечной

$$N = \pi\rho U^3 a^2\left[1 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{0k}^2}\exp\left(-\frac{\nu\alpha_{0k}^2}{Ua^2}\,h\right)\right]$$

Поступила 14 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.— Л., Гостехиздат, 1951.