ветвления [9], но и влиянием чехла остаточного пространственного заряда.

В заключение необходимо отметить, что система боковых ветвей, имеющих значительно меньшую яркость, чем основной канал, часто не фиксируется в эксперименте, но тем не менее может играть существенную роль в формировании распределения пространственного заряда и через него оказывать воздействие на энергетические процессы в канале разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мик Дж., Крэгс Дж.** Электрический пробой в газах.— М.: ИЛ, 1960.
2. **Стекольников И. С.** Природа длинной искры.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.
3. **Юман М.** Молния.— М.: Мир, 1972.
4. **Андреев С. И., Зобов Е. А., Сидоров А. Н.** Исследование скользящей искры в воздухе // ПМТФ.— 1978.— № 3.
5. **Базеляи Э. М.** Лидер положительной длинной искры // Электричество.— 1987.— № 5.
6. **Базелян Э. М., Ражанский И. М.** Искровой разряд в воздухе.— Новосибирск: Наука, 1988.
7. **Горин Б. Н.** Математическое моделирование главной стадии молнии // Электричество.— 1985.— № 4.
8. **Борисов М. Ф., Данилов М. Ф., Зобов Е. А. и др.** Особенности пространственной и временной структуры излучения канала скользящей искры // Тез. докл. III Всесоюз. конф. по физике газового разряда.— Киев: КГУ, 1986.— Ч. 1.
9. **Борисов М. Ф., Данилов М. Ф., Зобов Е. А. и др.** О строении канала разряда при пробое в неоднородном поле // ПМТФ.— 1988.—№ 6.
10. **Хокни Р., Иствуд Дж.** Численное моделирование методом частиц.— М.: Мир, 1987.
11. **Справочник по электротехническим материалам/Под ред.** Ю. В. Корицкого, В. В. Пасынкова, Б. М. Тареева.— М.: Энергия, 1974.— Т. 1.
12. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
13. **Райзер Ю. П.** Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.

г. Сосновый Бор

Поступила 7/VIII 1989 г., в окончательном варианте — 4/IV 1990 г.

УДК 532.593

В. А. Павлов

МАГНИТОЗВУКОВАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ПЛАЗМЫ

При обтекании планет и других тел солнечным ветром возникает слабая ударная магнитозвуковая волна [1]. В такой и аналогичной ситуациях [2] возникает проблема описания ударной волны в неоднородном потоке плазмы. В данной работе предложен приближенный способ описания поля в окрестности ударного фронта магнитозвуковой волны. На основе лучевого описания это поле представлено в виде ряда, учет членов второго порядка малости сведен к решению уравнения Риккати. Оценена интенсивность магнитозвукового удара и получена связь между скоростью ударного фронта и площадью поперечного сечения лучевой трубки; предложен алгоритм пересчета полей из движущейся системы координат в лабораторную.

1. Поле в холодной плазме опишем уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial\mathbf{H}/\partial t - \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}] = 0,\ d\mathbf{v}/dt - (\mu/\rho)[\operatorname{rot}\mathbf{H},\mathbf{H}] + \mathbf{g}(r) = 0.$$

Здесь ρ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ — плотность плазмы, скорость, магнитное поле; μ, $\mathbf{g}$ — магнитная проницаемость и ускорение силы тяжести. Невозмущенное поле обозначим индексом нуль: $\rho_0 = \rho_0(z)$, $\mathbf{v}_0 = v_0(z)\mathbf{e}_x$, $\mathbf{H}_0 = \text{const}$. Возмущение полей обусловлено наличием неподвижного гладкого тела, обтекаемого неоднородным потоком плазмы. Перейдем в локальную систему координат, связанную со скоростью потока $v_0(z)\mathbf{e}_x$ на высоте точки наблюдения. Она отличается от введенной в [3], где координаты связывались со скоростью потока на высоте возмущающего тела. Поэтому в нашей системе координат (ниже поля и координаты в ней помечены штрихом) в невозмущенном состоянии плазма покоится: $\mathbf{v}_0' = 0$. В холодной неподвижной плазме в линейном приближении магнитозвуковая волна обладает свойством: направление переноса энергии совпадает с направлением, перпендикулярным волновому фронту. Таким образом, имеется «изотропность» в вышеотмеченном узком смысле. Это обстоятельство облегчает описание волнового процесса в ортогональных лучевых координатах $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}'$. Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ перпендикулярен волновому фронту, а $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\delta}'$ лежат на поверхности фронта.

Ниже рассмотрим ситуацию, когда действует механизм черенковского излучения $(v_0 > b_0 \equiv (\mu H_0^2/\rho_0)^{1/2}$, b_0 — альфвеновская скорость) и сформировалась слабая ударная волна. Для упрощения описания полей удобно выбрать ориентацию оси $\boldsymbol{\beta}'$, нормальную к $\mathbf{H}_0'$: $\boldsymbol{\beta}' \perp \mathbf{H}_0'$. Это соответствует направлению $\boldsymbol{\beta}'$ вдоль линии пересечения ударного фронта с плоскостью, перпендикулярной $\mathbf{H}_0'$. Следствие искривления ударного фронта по мере перемещения его есть вращение $\boldsymbol{\beta}'$ вокруг $\boldsymbol{\alpha}'$. В системе координат $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}'$ для магнитозвуковой волны будет отсутствовать проекция $\mathbf{v}'$ на ось $\boldsymbol{\delta}'$. Криволинейная ортогональная система координат $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}'$ связана с лабораторной соотношением

$$(h_1' d\alpha')^2 + (h_2' d\beta')^2 + (h_3' d\delta')^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$(h_i'(\alpha', \beta', \delta')$ — коэффициенты Ламе). Фронт волны (в частности, ударный фронт) опишем как

$$t - T'(\alpha', \beta_1', \delta_1') = 0, \quad \beta_1' = \mathrm{const}, \quad \delta_1' = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

$(\beta_1'$ и δ_1' характеризуют точку пересечения координатной линии с фронтом). Направление $\boldsymbol{\alpha}'$ определяется ортом

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = (\nabla)' T' / |(\nabla)' T'|, \tag{1.3}$$

а скорость перемещения фронта u' представляется в виде

$$u'(\alpha', \beta', \delta') = (d\mathbf{r}'/dt, \mathbf{e}_{\alpha'}). \tag{1.4}$$

В результате

$$h_1' = u'(\alpha', \beta', \delta')\left[u'(\alpha_1', \beta_1', \delta_1')\right]^{-1}. \tag{1.5}$$

Для того чтобы функция T' зависела только от продольной координаты α', необходимо коэффициент Ламе h_1' выбрать так, чтобы $h_1' \sim u'$. Ниже возьмем $h_1' = u'(\alpha', \beta', \delta')\left[u'(\alpha_1', \beta_1', \delta_1')\right]^{-1}$, где $\alpha = \alpha_1$ характеризует начальное значение α'. Уравнение (1.5) является уравнением эйконала. В системе координат $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}'$ имеется равенство

$$(\mathrm{div})'(\mathbf{e}_{\alpha'}/h_2' h_3') = 0, \tag{1.6}$$

которое представляет уравнение переноса. Возьмем $h_2' h_3' = A'$ (A' — безразмерная площадь поперечного сечения тонкой лучевой трубки). Такой выбор коэффициентов h_2' и h_3' позволяет осуществить предельный переход к приближению линейной теории.

Исследуем ситуацию, когда в рассматриваемой области масштаб возмущения в направлении $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\delta}'$ меньше по сравнению с радиусом кривизны фронта и с масштабом неоднородности плазмы. Это позволяет считать возмущения локально-одномерными, пренебрегая производными в направлениях $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}'$, перпендикулярных оси лучевой трубки. При этом для магнитозвуковой волны получим приближение

$$(\mathrm{div})'\mathbf{v}' \approx \frac{1}{A'} \frac{1}{h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'}(A' v_{\alpha'}'), \quad (\mathrm{rot})'\mathbf{H}' \approx \frac{1}{A'} \frac{1}{h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'}(A' H_{\beta'}')\,\mathbf{e}_{\delta'}, \tag{1.7}$$

$$(\mathrm{rot})'[\mathbf{v}', \mathbf{H}'] \approx \frac{1}{h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(H_{\alpha'}' v_{\beta'}' - H_{\beta'}' v_{\alpha'}' \right) \mathbf{e}_{\beta'}.$$

В данной задаче возмущение полей $(\rho' - \rho_0')$, $(\mathbf{H}' - \mathbf{H}_0')$, $\mathbf{v}'$, $(A' - A_0')$ (ниже взято $A_0' = 0$) обусловлено наличием тела, перемещающегося в плазме,— таким образом, отсутствие тела отвечает отсутствию возмущения полей. Для рассматриваемых здесь нерелятивистских скоростей потока $\mathbf{H}_0' = \mathbf{H}_0 = \mathrm{const}$. С учетом (1.7) уравнения (1.1) для магнитозвуковой волны вдали от тела в штрихованной системе координат принимают вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{A' h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(A' \rho' v_{\alpha'}' \right) \approx G_1; \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(A' H_{\alpha'}' \right) \approx 0; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial H_{\beta'}'}{\partial t} - \frac{1}{h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(H_{\alpha'}' v_{\beta'}' - H_{\beta'}' v_{\alpha'}' \right) \approx G_2; \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial v_{\alpha'}'}{\partial t} + \frac{v_{\alpha'}'}{h_1'} \frac{\partial v_{\alpha'}'}{\partial \alpha'} + \frac{\mu H_{\beta'}'}{\rho' A' h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(A' H_{\beta'}' \right) + g_{\alpha'}' \approx G_3; \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial v_{\beta'}'}{\partial t} + \frac{v_{\alpha'}'}{h_1'} \frac{\partial v_{\beta'}'}{\partial \alpha'} - \frac{\mu H_{\alpha'}'}{\rho' A' h_1'} \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(A' H_{\beta'}' \right) + g_{\beta'}' \approx G_4, \tag{1.12}$$

где $G_1 = v_0 \partial \rho' / \partial x'$; $G_2 = v_0 \partial H_{\beta'}' / \partial x'$; $G_3 = v_0 \partial v_{\alpha'}' / \partial x'$; $G_4 = v_0 \partial v_{\beta'}' / \partial x'$; $x' = x - v_0 t$. Ниже будем основываться на выполнении условия, позволяющего пренебречь влиянием функций G_i в (1.8)—(1.12):

$$\left| \frac{1}{h_1'} \frac{\partial f'}{\partial \alpha'} \right| \gg \left| \frac{v_0}{v_{\alpha'}'} \frac{\partial f'}{\partial x'} \right| = \left| \frac{v_0}{v_{\alpha'}'} \cos \Omega' \right| \left| \frac{1}{h_1'} \frac{\partial f'}{\partial \alpha'} \right|$$

(Ω' — угол между векторами $\boldsymbol{\alpha}'$ и $\mathbf{x}'$, f' — любая из функций ρ', $v_{\alpha'}'$, $v_{\beta'}'$, $H_{\beta'}'$). В результате имеем ограничение на ориентацию оси лучевой трубки и на скорость набегающего потока v_0:

$$b_0 < |v_0| \ll \left| v_{\alpha'}' (\cos \Omega)^{-1} \right|.$$

Невозмущенное состояние полей соответствует случаю $\partial v_{0\alpha'} / \partial \alpha' = 0$, $\partial v_{0\beta'} / \partial \beta' = 0$, $\partial A_0' / \partial \alpha' = 0$, $\mathbf{g}' = 0$, $A_0' = 0$. Одно из отличий лучевых трубок для магнитозвуковых волн от лучевых трубок для нейтрального газа заключается в двумерности перемещения плазмы: имеется поперечная компонента скорости $v_{\beta'}' \neq 0$. Таким образом, возникает поток массы через боковую поверхность трубки. Однако поток энергии через боковую поверхность отсутствует — в энергетическом смысле трубки изолированы друг от друга.

Исследуем поля только в окрестности фронта (1.2). При решении задачи есть два малых параметра: слабая нелинейность и малое расстояние от ударного фронта (1.2), что позволяет построить описание одномерного поля в тонких лучевых трубках в виде ряда

$$F'(t, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} F_n'(\alpha') (t - T')^n, \quad A'(\alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(\alpha').$$

При этом $\partial F' / \partial t' = F_1' + 2F_2'(t - T') + \ldots$, $\partial F' / \partial \alpha' = dF_0 / d\alpha' - F_2' dT' / d\alpha' + (t - T') \left(dF_2' / d\alpha' - 2F_2' dT' / d\alpha' \right) + \ldots$ Аналогичное разложение в ряды использовалось в [3] для описания звукового удара в неоднородном потоке атмосферы. Ограничиваясь членами второго порядка малости, из системы (1.8), (1.9) в приближении $G_i \approx 0$ получим условие ее разрешимости

$$\frac{b_0'(\alpha')}{h_1'}\frac{dT'}{d\alpha'} = \pm 1, \quad h_1' = \pm b_0'(\alpha')\left[b_0'(\alpha_1')\right]^{-1}. \tag{1.13}$$

Уравнение эйконала (1.13) соответствует уравнению для характеристик C_+ и C_- в случае линейного приближения. Интересуясь уходящей волной, возьмем в (1.13) знак плюс и из (1.8)—(1.12) при $G_i = 0$ находим уравнение Риккати для $v_{1\alpha'}'$:

$$\frac{dv_{1\alpha'}'}{d\alpha'} - \frac{3}{2}\left(\frac{v_{1\alpha'}'\sqrt{h_1'}}{b_0'}\right)^2 + D'v_{1\alpha'}' = 0, \tag{1.14}$$

где

$$D' = \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha'}\ln\frac{A_1'}{b_0'H_{0\beta'}'}. \tag{1.15}$$

Тот факт, что $v_0' = 0$, $dv_0'/d\alpha' = 0$, существенно упрощает выражение для D'. Это является одним из достоинств выбора системы координат, связанной с потоком (см. для сравнения [3]). В линейном приближении решение уравнения (1.14) имеет вид

$$v_{1\alpha'}' \approx v_{1\alpha'}'(\alpha_1')\,[B'(\alpha')]^{-1} \quad \left(B'(\alpha') = \exp\left(\int_{\alpha_1'}^{\alpha'} D'd\alpha'\right)\right).$$

Строгое решение уравнения (1.14) дается соотношением

$$v_{1\alpha'}' = \left[B'(\alpha')/v_{1\alpha'}'(\alpha_1') - \Phi'\right]^{-1}, \quad \Phi'(\alpha', \alpha_1') = B'\int_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{3h_1'}{2}(b_0')^{-2}(B')^{-1}d\alpha'.$$

При $\alpha' \gg \alpha_1'$, $\Phi' \gg B'\left[v_{1\alpha'}'(\alpha_1')\right]^{-1}$ функция Φ' играет роль большого параметра задачи и можно взять приближение

$$v_{1\alpha'}' \approx -\left[\Phi'(\alpha_1', 0)\right]^{-1}. \tag{1.16}$$

Отметим, что использование (1.16) содержит запрет па предельный переход к линейному приближению задачи. Учет конкретного вида (1.15) для D' позволяет представить функцию B' как

$$B' = \left[\left(A_1'(\alpha')/A_1'(0)\right)\left(b_0'(0)/b_0'(\alpha')\right)\right]^{1/2} H_{0\beta'}'(0)/H_{0\beta'}'(\alpha').$$

Из исходных уравнений (1.8)—(1.12) видно, что для определения полей достаточно знания безразмерной функции A' с точностью до постоянного множителя. Ниже применим нормировку $A_1'(0) = 1$. Функции первого приближения выражаются через $v_{1\alpha'}'$ и, согласно (1.8)—(1.12), при $G_i \approx \approx 0$ имеют вид

$$v_{1\beta'}'/v_{1\alpha'}' = -H_{0\alpha'}'/H_{0\beta'}', \quad \rho_1'/\rho_0' = v_{1\alpha'}'/b_0',$$
$$H_{1\beta'}'/H_{0\beta'}' = v_{1\alpha'}'/b_0'\left(H_0/H_{0\beta'}'\right)^2, \quad H_{1\alpha'}' = 0.$$

Один из возможных вариантов уточнения (1.13)— использование уравнения для характеристик C_+ и C_-

$$\frac{1}{h_1'}\frac{dt}{d\alpha'} = \left(v_{1\alpha'}' \pm b'\right)^{-1}, \tag{1.17}$$

$$h_1' = \left[v_{1\alpha'}'(\alpha') \pm b'(\alpha')\right]\left[v_{1\alpha'}'(\alpha_1') \pm b'(\alpha_1')\right]^{-1},$$

что соответствует (1.15) при $u' = v_{1\alpha'}' \pm b'$.

2. Оценим интенсивность магнитозвукового удара I' и получим связь между скоростью фронта u' и площадью A':

$$I' \equiv \left(p' - p_0'\right)/p_0' \approx p_1'/p_0'(t - T').$$

Сделаем это на основе уравнения состояния политропного газа $p' = p_0'\left(\rho'/\rho_0'\right)^{\gamma}$, $\gamma = \mathrm{const}$, являющегося одним из простых способов моделирования зависимости $p'\left(\rho_0'\right)$. Представление для интенсивности запишем как

$$I' \approx \gamma\rho_1'/\rho_0'(t - T') \approx -\gamma(t - T')\left[b_0'\Phi'(\alpha', 0)\right]^{-1}, \tag{2.1}$$

где необходимо определить $(t - T')$. Значение $T_0' = \alpha'/b_0'\left(\alpha_1'\right)$ отвечает линейному приближению T' для характеристики C_+. Введя новую функцию $L'(\alpha') = T_0' - T'$, ударный фронт опишем соотношением

$$t - T_0' = -L'(\alpha'). \tag{2.2}$$

Из (2.1) имеем обобщение уравнения эйконала (1.13) (другой вид формулы (1.17)):

$$\frac{1}{h_1'}\frac{dt}{d\alpha'} = \frac{1}{b_0'\left(\alpha_1'\right)} - \frac{dL'}{d\alpha'}. \tag{2.3}$$

Скорость фронта ударной волны малой интенсивности — это среднее арифметическое значение характеристической скорости перед фронтом и позади фронта:

$$u' = h_1'd\alpha'/dT' \approx (1/2)\left[b_0'\left(\alpha_1'\right) + \left(v_{1\alpha'}' + b'\right)\right] \approx b_0'\left(\alpha_1'\right) + \\ + (1/2)\left(v_{1\alpha'}' + b_1'\right)(t - T) \approx b_0'\left(\alpha_1'\right) - (L'/2)\left(v_{1\alpha'}' + b_1'\right). \tag{2.4}$$

Выражения (2.3) и (2.4) позволяют найти дифференциальное уравнение для поправки L':

$$(2/L')\,dL'/d\alpha' = -\left(v_{1\alpha'}' + b_1'\right)\left(b_0'\left(\alpha_1'\right)\right)^{-2}, \quad L' = K_0\left[\Phi'(\alpha', 0)/B'\right]^{1/2}.$$

Параметр $K_0 = \mathrm{const}$ учитывает форму тела и граничное условие на поверхности тела. В рамках данного метода K_0 определить не удается. Представление для K_0 может быть получено другими методами (см., например, [4]) при решении более простой задачи: $\mathbf{v}_0 = \mathrm{const}$, $b_0 = \mathrm{const}$. Соотношение (2.1) запишем в виде

$$I' = (2/3)K_0\left[b_0'\left(\alpha_1'\right)\right]^{-1}\gamma\left(B'\Phi'\right)^{-1/2}.$$

В частном случае однородной среды и при $\mathbf{v}_0 = \mathrm{const}$ имеем $B' \sim (A')^{1/2}$ и

$$I' \sim \left[A'\int_{\alpha_1'}^{\alpha'}(A')^{-1/2}d\alpha'\right]^{-1/2}.$$

Для конической формы ударного фронта в такой ситуации $A' \sim r'$ (r' — радиальное расстояние в цилиндрической системе координат) и $I' \sim (r')^{-3/4}$ — известное асимптотическое представление Ландау для ударных фронтов с осевой симметрией. Использование (2.4) позволяет найти наиболее важное соотношение для дальнейшего решения задачи — связь между скоростью ударного фронта и площадью поперечного сечения лучевой трубки:

$$u'(A') = F'(A') \tag{2.5}$$

$$\left(F'(A') \approx b_0'\left(\alpha_1'\right) + \frac{3}{4}K_0\left(B'\Phi'\right)^{-1/2}\right).$$

3. Наличие связи (2.5) между u' и A' позволяет в штрихованной системе координат воспользоваться известным приближением «динамики ударных волн» при условии достаточно медленного изменения свойств

потока в невозмущенном состоянии. Такое описание, по существу, является нелинейным обобщением приближения линейной лучевой теории. Для этого берем уравнения (1.5) и (1.6). Принципиально важным является то, что $\mathbf{e}_{\alpha'}$ (орт в (1.3)) направлен вдоль луча (вдоль направления переноса энергии) перпендикулярно ударному фронту. Функция $\mathbf{e}_{\alpha'}$ характеризует эйконал и уравнение (1.5)— обобщение представлений (1.13) и (2.4). Любопытно, что (1.5) и (1.6) пригодны для описания как слабых, так и сильных ударных волн [5]. Таким образом, получена замкнутая система уравнений (1.3), (1.5), (1.6), (2.5). Применение приближения (1.3), (1.5), (1.6) обусловлено локальной неподвижностью среды в штрихованной системе координат и ортогональностью лучей ударному фронту. В исходной системе координат уравнение эйконала и уравнение переноса принимают вид

$$|\nabla T| = u^{-1}; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}_\alpha/A) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь направление луча $\mathbf{e}_\alpha$ в отличие от (1.3) неортогонально ударному фронту, так как в исходной системе координат нет изотропности в вышеотмеченном смысле. Для нахождения $\mathbf{e}_\alpha$ поступим следующим образом. Уравнение (1.5) представим как уравнение Гамильтона — Якоби: $\mathscr{H}' = 0$, где $\mathscr{H}'$ — гамильтониан:

$$\mathscr{H}'\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}, \frac{\partial T'}{\partial y'}, \frac{\partial T'}{\partial z'}; T'\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial T'}{\partial z'}\right)^2 - \left(\frac{1}{u'(T')}\right)^2\right]. \tag{3.3}$$

Отметим, что $\mathbf{e}_{\alpha'}$ из (1.3) имеет связь с гамильтонианом $\mathscr{H}'$:

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial((\nabla)' T')}\left|\frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial((\nabla)' T')}\right|^{-1}.$$

Орт $\mathbf{e}_\alpha$ вдоль луча аналогичен:

$$\mathbf{e}_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial(\nabla T)|\partial \mathscr{H}/\partial(\nabla T)|^{-1} = l_1\mathbf{e}_x + l_2\mathbf{e}_y + l_3\mathbf{e}_z, \tag{3.4}$$
$$dx' = dx - v_0(z)dT,\ dy' = dy,\ dz' = dz.$$

Осталось найти представление для гамильтониана $\mathscr{H}$ в исходной системе координат. Из соотношения $dT = dT'$ следует

$$\partial T'/\partial x_i' = (\partial T/\partial x_i)(1 - v_0 \partial T/\partial x)^{-1}, \tag{3.5}$$
$$i = 1,\ 2,\ 3,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$$

из (3.3) и (3.5) имеем

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - v_0\frac{\partial T}{\partial x}\right)^{-2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{u^2(T)}\right\},$$

направляющие косинусы l_1, l_2, l_3 в (3.4) получим в виде

$$l_1 = \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial T}{\partial x} + v_0\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + v_0\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$l_2 = \frac{1}{R_1}\frac{\partial T}{\partial y}\left(1 - v_0\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

$$l_3 = \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial T}{\partial z}\left(1 - v_0\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right],\quad R_1 = \left\{\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]\left[1 + v_0^2\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\left[1 + v_0^2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + v_0^2\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + 2v_0^2\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2}.$$

Найдем теперь связь между площадями сечений A и A'. Так как в лабораторной системе координат A — площадь поперечного сечения лучевой трубки, то A' — площадь поверхности, «вырезаемой» трубкой на ударном фронте. Учитывая это, имеем

$$A = A'(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{n}), \tag{3.6}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к ударному фронту:

$$\mathbf{n} = \nabla T / |\nabla T|. \tag{3.7}$$

Соотношение (2.5) позволяет получить недостающую связь между u и A:

$$u(A) = F(A). \tag{3.8}$$

В результате имеем замкнутую систему уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.6)—(3.8), которую можно решить численно на ЭВМ. Отметим, что описание (3.1), (3.2), (3.4), (3.6)— обобщение данных [6], где анализировалась ситуация равномерного потока в однородной среде и при нахождении выражения для $\mathbf{e}_\alpha$ применялся более громоздкий и менее конструктивный способ, чем (3.4). Делалось это следующим образом: уравнение переноса (1.6) пересчитывалось в неподвижную систему и приводилось к дивергентной форме. Это позволяло найти $\mathbf{e}_\alpha$. Использование гамильтониана $\mathscr{H}$ упрощает процедуру — позволяет найти $\mathbf{e}_\alpha$ в (3.4) как результат дифференцирования $\mathscr{H}$. Система (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) пригодна для описания ударных волн произвольной интенсивности, если эту систему дополнить соответствующей связью между u и A. Для слабых же волн ситуация упрощается благодаря близости скорости ударного фронта u к линейной альфвеновской скорости b_0; кроме того, имеем $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \approx A_1$.

Уравнение эйконала (3.1) с учетом связи (2.5) и $\mathscr{H}$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = \left(1 - v_0 \frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 \left[b_0 + \frac{3}{4} K_0 (B\Phi)^{-1/2}\right]^{-2}, \tag{3.9}$$

где $(3/4)K_0(B\Phi)^{-1/2} \ll b_0$ для слабых ударных волн, поэтому (3.9) можно решать методом последовательных приближений. Нулевое приближение соответствует $K_0 = 0$ — линейному приближению для описания лучей. В этом приближении траектории лучей не зависят от поля — уравнение (3.9) при $K_0 = 0$ отщепляется от системы (3.2), (3.6)—(3.8); $T(x, y, z)$ и $\mathbf{e}_\alpha(x, y, z)$ находятся по заданным функциям $v_0(z)$ и $b_0(z)$.

Схема, предложенная в данной работе, основывалась на пренебрежении членами G_i в системе (1.8)—(1.12). Дальнейшее уточнение решения возможно либо при использовании процедуры последовательных приближений, либо за счет получения уравнения Риккати при $G_i \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баранов В. Б., Краснобаев К. В.** Гидродинамическая теория космической плазмы.— М.: Наука, 1977.
2. **Прист Э. Р.** Солнечная магнитогидродинамика.— М.: Мир, 1985.
3. **Fredman M. P., Kane E. J., Sigalla A.** Effects of atmosphere and aircraft motion on the location and intensity of a sonic boom // A I A A J.— 1963.— V. 1, N 6. Рус. пер.// РТК.— 1963.— № 6.
4. **Whitham G. B.** On the propagation of weak shock waves // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1.— P. 290.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
6. **Whitham G. B.** A note on shock dynamics relative to moving frame // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 31, N 3.

г. Ленинград

Поступила 20/X 1989 г.,
в окончательном варианте — 16/III 1990 г.

УДК 534.222.2

В. В. Сурков

КУМУЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ ЗАХЛОПЫВАНИИ ПОР

При быстрой деформации и разрушении твердых тел возникают сильные электрические поля, приводящие к эмиссии частиц, рентгеновскому и радиоизлучению с поверхности разрушаемой среды. Механизм образования поля обусловлен процессами генерации и разделения в пространстве точечных дефектов структуры и заря-