УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО КОЛЬЦА, АРМИРОВАННОГО ОЧЕНЬ ЖЕСТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Ю. А. Боган

(*Новосибирск*)

Рассмотрены следующие краевые задачи для упругого кольца, армированного очень жесткими волокнами, расположенными по концентрическим окружностям: а) на границе заданы напряжения; б) на границе заданы прогиб и угол поворота. В качестве исходных определяющих соотношений используется обобщенный закон Гука [1]; как следствие, окончательные результаты будут справедливы для известных моделей упругого композиционного материала [2, 3].

Построена асимптотика решений краевых задач «а» и «б» в предположении, что жесткость материала в окружном направлении значительно превышает жесткость сдвига.

Показано, что вдоль границы возникает пограничный слой; при этом в случае «а» граничные условия для предельной краевой задачи не совпадают ни с одним из краевых условий допредельной. Задача «б» вырождается в предельную регулярным образом.

1. Рассмотрим задачу «а». Предположим, что упругое кольцо является цилиндрически ортотропным, и примем обобщенный закон Гука в виде ((r, θ) — полярные координаты)

$$\sigma_r = c_{11}\varepsilon_r + c_{12}\varepsilon_\theta,\quad \sigma_\theta = c_{12}\varepsilon_r + c_{22}\varepsilon_\theta,\quad \tau_{r\theta} = c_{66}\gamma_{r\theta}.$$

Введем безразмерные напряжения и жесткости, положив

$$\bar\sigma_r = \sigma_r c_{66}^{-1},\quad \bar\sigma_\theta = \sigma_\theta c_{66}^{-1},\quad \bar\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta} c_{66}^{-1},\quad d_{ij} = c_{ij} c_{66}^{-1},\quad i, j = 1, 2,$$

и сохраним в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения. Пусть $d_{22} \gg 1$, в реальной ситуации это имеет место для упругого кольца, армированного одним очень жестким семейством волокон $r = \mathrm{const}$. Положим $\varepsilon^2 = d_{22}^{-1}$, $d = d_{11}^{-1}$, $c = d_{12}^2 + 2d_{12}$, $t = \ln r$. Тогда уравнение для функции напряжений $w(t, \theta)$ можно записать в виде

$$\varepsilon^2 N(w) + M(w) = 0 \tag{1.1}$$

в предположении отсутствия массовых сил. В (1.1)

$$N(w) = \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - 4\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 5\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{\partial w}{\partial t} + 2dc\frac{\partial^3 w}{\partial t\,\partial\theta^2} - dc\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\,\partial\theta^2} - dc\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2},$$

$$M(w) = d\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2\,\partial\theta^2} - 2\frac{\partial^3 w}{\partial t\,\partial\theta^2} - d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2d\frac{\partial w}{\partial t} + (1 + 2d)\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$$

Поставим при $r = a$, $r = b$, $0 < a < b$, следующие граничные условия:

$$\sigma_r(a, \theta) = p_1(\theta),\quad \sigma_r(b, \theta) = p_3(\theta),\quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = p_2(\theta),\quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = p_4(\theta). \tag{1.2}$$

Напомним, что

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2},\quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\theta}.$$

Положим $t_0 = \ln a$, $t_1 = \ln b$,

$$L_1(w) = \partial w/\partial t + \partial^2 w/\partial\theta^2, \quad L_2(w) = \partial w/\partial\theta - \partial^2 w/\partial t\partial\theta.$$

Граничные условия (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_1(w)(t_0) &= e^{2t_0}p_1(\theta), & L_2(w)(t_0) &= e^{2t_0}p_2(\theta), \\ L_1(w)(t_1) &= e^{2t_1}p_3(\theta), & L_2(w)(t_1) &= e^{2t_1}p_4(\theta). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Граничные условия в виде (1.3) неудобны для асимптотического анализа, так как производная по t входит во все граничные условия. Приведем граничные условия к удобному виду. Положим

$$Pw = w + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}, \quad g_k(\theta) = p_k(\theta) + \int_0^\theta p_{k+1}(u)\,du, \quad k = 1, 3,$$

$$g_k(\theta) = p_{k-1}(\theta) - p_k'(\theta), \quad k = 2, 4.$$

Тогда получим

$$Pw(t_0) = e^{2t_0}g_1(\theta), \quad Pw(t_1) = e^{2t_1}g_3(\theta); \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Pw(t_0) = e^{2t_0}g_2(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial t}Pw(t_1) = e^{2t_1}g_4(\theta). \tag{1.5}$$

Действительно, выведем граничные условия (1.4) при $t = t_0$. Для этого проинтегрируем краевое условие $L_2(w)(t_0) = e^{2t_0}p_2(\theta)$ по θ и сложим с первым; тогда получим первое условие (1.4). Продифференцировав граничное условие $L_2(w)(t_0) = e^{2t_0}p_2(\theta)$ по θ и сложив с первым, получим первое граничное условие (1.5). Аналогично действуем при $t = t_1$.

Построим теперь асимптотику решения краевой задачи (1.1), (1.2) при малом ε. При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.1) переходит в уравнение $M(w) = 0$, имеющее составной тип [4] с двойным семейством вещественных характеристик $r = \mathrm{const}$. Изменение типа уравнений (1.1) в пределе приводит к тому, что вдоль границ $r = a$, b будет наблюдаться явление пограничного слоя, связанное с быстрым изменением решения вдоль нормали к границе в непосредственной близости от нее. Краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение при самоуравновешенности нагрузки [1].

Асимптотику решения краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5) при малом ε ищем при помощи двух итерационных процессов [5].

Первый итерационный процесс. Ищем приближенное решение краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5) в виде

$$w_{N_1}(t, \theta) = \sum_{n=0}^{N_1} \varepsilon^n w_n(t, \theta). \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.1), (1.4), получаем рекуррентные системы уравнений

$$M(w_0) = 0, \quad Pw_0(t_0) = e^{2t_0}g_1(\theta), \quad Pw_0(t_1) = e^{2t_1}g_3(\theta); \tag{1.7}$$

$$M(w_1) = 0, \quad M(w_{n+2}) + N(w_n) = 0, n \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Краевая задача (1.7) — это предельная краевая задача для исходной. Граничные условия для системы (1.8) будут выписаны позже. Функция $w_{N_1}(t, \theta)$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям (1.5), поэтому вблизи $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно необходимо построить функции типа пограничного слоя, устраняющие невязку в выполнении граничных условий (1.5).

Второй итерационный процесс. Построим функции пограничного слоя вблизи $t = t_0$ (вблизи $t = t_1$ они строятся аналогично). Для этого произведем растяжение координаты t вблизи $t = t_0$, полагая $\varepsilon\eta = t - t_0$. Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\sum_{k=-2}^{2} \varepsilon^k P_k(w) = 0. \tag{1.9}$$

Явный вид всех дифференциальных операторов $P_k(w)$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$, для дальнейшего несуществен, приведем только оператор $P_{-2}w$:

$$P_{-2}(w) = \frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial\eta^2\partial\theta^2} - d\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}. \tag{1.10}$$

Дифференциальный оператор $P_{-2}(w)$ в (1.10) имеет составной тип. Ищем приближенное решение уравнения (1.9) в виде

$$\overline{w}_{N_1}(\eta, \theta) = \varepsilon \sum_{n=0}^{N_1-1} \varepsilon^n w_n^0(\eta, \theta). \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.9), получим следующие рекуррентные системы уравнений:

$$\begin{gathered} P_{-2}w_0^0 = 0, \quad P_{-2}w_1^0 + P_{-1}w_0^0 = 0, \quad P_{-2}w_2^0 + P_{-1}w_1^0 + P_0 w_0^0 = 0, \\ P_{-2}w_3^0 + P_{-1}w_2^0 + P_0 w_1^0 + P_1 w_0^0 = 0, \\ P_{-2}w_n^0 + P_{-1}w_{n-1}^0 + P_0 w_{n-2}^0 + P_1 w_{n-3}^0 + P_2 w_{n-4}^0 = 0, \quad n \geqslant 4. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Граничные условия для определения функций пограничного слоя имеют вид

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial P w_n^0}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = -\left.\frac{\partial P w_n}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \quad n \geqslant 1, \quad w_n^0(0, \eta) = w_n^0(2\pi, \eta), \quad n \geqslant 0, \\ \left.\frac{\partial P w_0^0}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = e^{2t_0} g_2(\theta) - \left.\frac{\partial P w_0}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \quad w_n^0(\theta, +\infty) = 0, \quad n \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Построив функции $w_n^1(\eta_1, \theta)$ вблизи $t = t_1$, получим, что исходная краевая задача (1.1), (1.4), (1.5) имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{gathered} w(t, \theta) = \sum_{n=0}^{N_1} \varepsilon^n w_n(t, \theta) + \varepsilon \sum_{n=0}^{N_1-1} \varepsilon^n \big(w_n^0(\eta, \theta) + \\ + w_n^1(\eta_1, \theta)\big) + \varepsilon^{N_1+1} R_{N_1}(t, \theta), \end{gathered} \tag{1.14}$$

где $w_n^0(\eta, \theta)$ и $w_n^1(\eta_1, \theta)$ — функции типа пограничного слоя соответственно вблизи $t = t_0$ и $t = t_1$; $\varepsilon\eta_1 = t_1 - t$; $\varepsilon^{N_1+1}R_{N_1}(t, \theta)$ — остаточный член. Подставляя (1.14) в (1.4), (1.5), получим граничные условия для $w_n(t, \theta)$, $n \geqslant 1$

$$\begin{gathered} P w_n(t_0, \theta) = -P w_{n-1}^0(0, \theta) - P w_{n-1}^1(\eta_1(t_0), \theta), \\ P w_n(t_1, \theta) = -P w_{n-1}^0(\eta(t_1), \theta) - P w_{n-1}^1(0, \theta), \\ w_n(0, t) = w_n(2\pi, t). \end{gathered} \tag{1.15}$$

Граничные условия (1.15) позволяют последовательно определить все функции $w_n(t, \theta)$.

2. Сделаем несколько замечаний по поводу полученной асимптотики. В отличие от исходной краевой задачи уравнения укороченной краевой задачи и пограничного слоя допускают решение в явном виде. Действительно, пусть, например, $g_k(\theta)(k = 1, 3)$ являются четными функциями

полярного угла θ, положим

$$g_k(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} g_{kn} \cos n\theta, \quad k = 1{,}3,$$

тогда

$$w_0(t, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^t}{1 - n^2} \left[f_{1n}(t)\, e^{t_0} + f_{3n}(t)\, e^{t_1} \right] \cos n\theta, \tag{2.1}$$

где $$f_{1n}(t) = g_{1n} \frac{\operatorname{sh} \mu_n (t_1 - t)}{\operatorname{sh} \mu_n (t_1 - t_0)}; \quad f_{3n}(t) = g_{3n} \frac{\operatorname{sh} \mu_n (t - t_0)}{\operatorname{sh} \mu_n (t_1 - t_0)};$$

$$\mu_n = d^{1/2} (n^2 - 1) (n^2 + d)^{-1/2}.$$

Определим, например, функцию $w_0^0(\eta, \theta)$. Для ее определения необходимо решить краевую задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 w_0^0}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^4 w_0^0}{\partial \eta^2 \partial \theta^2} - d \frac{\partial^2 w_0^0}{\partial \eta^2} = 0, \\ \left. \frac{\partial P w_0^0}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = g(\theta), \quad w_0^0(\theta, +\infty) = 0, \quad w_0^0(0, \eta) = w_0^0(2\pi, \eta). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Явное решение краевой задачи (2.2) дается формулой

$$w_0^0(\eta, \theta) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \eta}}{\lambda_n (1 - n^2)} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

где $\lambda_n = (n^2 + d)^{1/2}$; a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $g(\theta)$. В предположении наличия у граничных данных непрерывных производных достаточно большого порядка разложение (1.14) можно продифференцировать и получить асимптотические разложения для напряжений и перемещений. Рассматривая отдельно осесимметричный случай ($\tau_{r\theta} = 0$), получим для функции $w(t, \theta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача для которого решается в явном виде; при этом нулевой член в разложении (1.14) оказывается просто нулевым, и, следовательно, решение предельной краевой задачи не удовлетворяет ни одному из исходных краевых условий (1.2).

Специфическим является то обстоятельство, что в пределе $\varepsilon_\theta = 0$ и существует предел $q_0 = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-2} \varepsilon_\theta$ — множитель Лагранжа, возникающий вследствие того, что в пределе имеет место нерастяжимость в окружном направлении. Определяющие соотношения в пределе имеют вид

$$\sigma_r = d_{11} \varepsilon_r, \sigma_\theta = d_{12} \varepsilon_r + q_0, \quad \tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta}, \quad \varepsilon_\theta = 0.$$

3. Рассмотрим задачу «б» для уравнения (1.1). Пусть

$$w(t_0) = p_1(\theta), \quad w(t_1) = p_3(\theta), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(t_0) = e^{t_0} p_2(\theta), \frac{\partial w}{\partial t}(t_1) = e^{t_1} p_4(\theta), \tag{3.1}$$

причем $p_k(\theta)$, $k = 1, 2, 3, 4$, являются периодическими функциями θ. Асимптотика решения краевой задачи (1.1), (3.1) строится значительно проще, чем в предыдущем случае, она дается формулой (1.14), при этом во всех формулах п. 1, начиная с формулы (1.4), следует положить $Pw = w$. Предельная краевая задача имеет вид

$$Mw = 0, \ w(t_0) = p_1(\theta), \ w(t_1) = p_3(\theta),$$

т. е. вырождение исходной краевой задачи в предельную регулярно [5].

Отсутствие регулярности вырождения в краевой задаче «а» связано с тем, что граничные условия (1.2) «одного порядка» относительно ε, так как в граничных условиях (1.2) участвуют производные по нормальной координате, вдоль которой происходит быстрое изменение решения. Для того чтобы получить регулярно вырождающуюся краевую задачу, необходимо привести краевые условия (1.2) к каноническому виду, что и было проделано выше. Отмеченная выше «перевязка» граничных условий (нерегулярность вырождения) является типичной для вырожденных краевых задач [6, 7].

Поступила 29 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.
2. **Немировский Ю. В.** Об упругопластическом поведении армированного слоя.— ПМТФ, 1969, № 6.
3. **Болотин В. В.** Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов.— В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 12. М., Машиностроение, 1966.
4. **Эскин Г. И.** Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости.— Матем. сборник, 1962, т. 59 (101).
5. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, т. 12, вып. 5.
6. **Brezis H.** Singular perturbations of hyperbolic systems.— In: Lecture Notes in Math., 1974, N 384.
7. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. уравнения, 1977, т. 13, № 7.

УДК 539.374

К ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТА С ПОРИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

В. В. Дудукаленко, А. Ю. Смыслов

(*Куйбышев*)

Твердая фаза грунта состоит из плотно упакованных связанных частиц, которые образовались в результате роста кристаллов, цементации отложений, сопровождающих длительные процессы фильтрации, диффузии. Степень упаковки твердых частиц связана с историей образования структуры грунта. Разрыхление как следствие микроразрушений и распаковки при деформировании является результатом механического воздействия. Упругие деформации предполагаем пренебрежимо малыми. Деформирование плотной фазы грунта при нагрузках, действующих сравнительно короткое время, за которое процессы ползучести не успевают значительно проявиться, опишем предельным условием Мизеса — Шлейхера и ассоциированным с ним законом деформирования [1]

$$\sqrt{s_{ij}s_{ij}} + \alpha\sigma_{kk}/3 = k; \tag{0.1}$$

$$e_{ij} = \lambda(s_{ij}/\sqrt{s_{kl}s_{kl}} + \alpha\delta_{ij}/3),\ \lambda \geqslant 0. \tag{0.2}$$

Здесь s_{ij} — девиатор тензора напряжений σ_{ij}; e_{ij} — скорость деформации; k, α — коэффициенты связности и кулоновского трения.

Из соотношений (0.1), (0.2) следует, что объемная деформация всегда положительна. Однако дилатансионная зависимость для грунтов имеет