УДК 532.516
DOI: 10.15372/PMTF202415495

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ТРУБЕ

В. К. Андреев, И. В. Вахрамеев*

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
* Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия
E-mails: andr@icm.krasn.ru, vahrameevi@mail.ru

Поставлена задача о совместном нестационарном однонаправленном движении двух несмешивающихся жидкостей в цилиндрической трубе, на твердой поверхности которой задан постоянный перепад температуры. С математической точки зрения задача является сопряженной и обратной относительно градиента давления одной из жидкостей вдоль трубы. Условием переопределения задачи является заданный нестационарный общий расход указанных жидкостей. Найдено стационарное решение. Получены априорные оценки решения нестационарной задачи в равномерной метрике. На основе этих оценок сформулированы достаточные условия для входных данных, при которых стационарное решение является экспоненциально устойчивым.

Ключевые слова: термокапиллярность, поверхность раздела, обратная задача, априорные оценки

1. Основные уравнения и граничные условия. Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$w_{1t} = w_{1rr} + \frac{1}{r}\,w_{1r} + f_1(t), \qquad T_{1t} = \frac{1}{\mathrm{Pr}_1}\Big(T_{1rr} + \frac{1}{r}\,T_{1r}\Big) + w_1(r,t),$$
$$0 < r < 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{1.1}$$

$$|w_1(0,t)| < \infty, \qquad |T_1(0,t)| < \infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{1.2}$$

$$w_1(r,0) = w_{10}(r), \qquad T_1(r,0) = T_{10}(r), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1; \tag{1.3}$$

$$w_{2t} = \frac{1}{\nu}\Big(w_{2rr} + \frac{1}{r}\,w_{2r}\Big) + \frac{1}{\nu}\,f_2(t), \qquad T_{2t} = \frac{1}{\mathrm{Pr}_2\nu}\Big(T_{2rr} + \frac{1}{r}\,T_{2r}\Big) + \frac{1}{\nu}\,w_2(r,t),$$
$$1 < r < \lambda, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{1.4}$$

$$w_2(r,0) = w_{20}(r), \qquad T_2(r,0) = T_{20}(r), \qquad 1 \leqslant r \leqslant \lambda. \tag{1.5}$$

Кроме того,

$$w_2(1,t) = \nu w_1(1,t), \qquad w_{2r}(1,t) = \mu\nu w_{1r}(1,t) - \nu\mathrm{Ma}; \tag{1.6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством науки и высшего образования РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение № 075-02-2024-1378).

$$T_1(1,t) = T_2(1,t), \qquad T_{2r}(1,t) = kT_{1r}(1,t); \tag{1.7}$$

$$w_2(\lambda,t) = 0, \qquad T_2(\lambda,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{1.8}$$

$$\int\limits_0^1 rw_1(r,t)\,dr + \frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2(r,t)\,dr = \frac{q(t)}{2\pi}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.9}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ связаны конечным соотношением

$$f_2(t) = \mu\nu f_1(t) + \nu\mathrm{Ma}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.10}$$

Поставленная задача (1.1)–(1.10) описывает в безразмерных переменных двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. В размерных переменных движение первой жидкости происходит в области $|\bar z| < \infty$, $0 < \bar r < a$, а второй — в слое $|\bar z| < \infty$, $a < \bar r < b$ с заданными $a > 0$, $b > 0$. Жидкости характеризуются следующими физическими постоянными: $\rho_j > 0$ — плотности, $\nu_j > 0$ — кинематические вязкости ($\mu_j = \rho_j\nu_j$ — динамические вязкости), $k_j > 0$ — теплопроводности, $\chi_j > 0$ — температуропроводности. В поставленной выше задаче $\nu = \nu_1/\nu_2$; $\mu = \mu_1/\mu_2$; $\mathrm{Pr}_j = \nu_j/\chi_j$ — числа Прандтля; $\mathrm{Ma} = \varkappa A a^2/(\mu_2\nu_1)$ — число Марангони; $\varkappa > 0$ — температурный градиент поверхностного натяжения на межфазной границе $\bar r = a$, которое линейно зависит от температуры: $\sigma(\Theta) = \sigma_0 - \varkappa\Theta$; $\sigma_0 > 0$ — постоянная; A — постоянный градиент температуры на твердой боковой поверхности трубы $\bar r = b$; $\lambda = b/a > 1$ — геометрический параметр. В размерных переменных решение представляется в виде

$$\boldsymbol{u} = (0, 0, \bar w_j(\bar r, \bar t)), \qquad \bar p_j = -\rho_j f_j(\bar t)\bar z + \bar{\mathcal{D}}_j(\bar t), \qquad \bar\Theta_j = A\bar z + \bar T_j(\bar r, \bar t).$$

Вводятся следующие безразмерные величины: $r = \bar r/a$; $t = \nu_1\bar t/a^2$; $w_j(r,t) = a\bar w_j/\nu_j$ — осевые скорости; $T_j(r,t) = \bar T_j/(aA)$ — возмущения температуры; $\bar{\mathcal{D}}_2(t) = \bar{\mathcal{D}}_1(t) - [\sigma_0 - \varkappa\bar T_1(a,t)]/a$, при этом можно считать $\bar{\mathcal{D}}_1(t) = 0$; $f_j(t) = a^3 f_j/\nu_j^2$ — осевые градиенты давлений; $q(t) = \bar q/(a\nu_1)$ — общий расход жидкостей через поперечное сечение трубы. Соотношение (1.9) означает, что задан общий нестационарный расход обеих жидкостей. Это есть условие переопределения, поскольку наряду с неизвестными w_j, T_j необходимо найти градиент давления $f_1(t)$ (или $f_2(t)$). Иными словами, задача (1.1)–(1.10) является обратной.

Для существования гладкого решения задачи должны быть выполнены условия согласования, которые имеют вид

$$|w_{10}(0)| < \infty, \qquad |T_{10}(0)| < \infty, \qquad w_{20}(\lambda) = 0, \qquad T_{20}(\lambda) = 0,$$
$$w_{20}(1) = \nu w_{10}(1), \qquad T_{10}(1) = T_{20}(1),$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\,w_{20}(1) = \mu\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\,w_{10}(1) - \nu\mathrm{Ma}, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\,T_{20}(1) = k\,\frac{\partial}{\partial r}\,T_{10}(1),$$
$$\int\limits_0^1 rw_{10}(r)\,dr + \frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rw_{20}(r)\,dr = \frac{q(0)}{2\pi}.$$

В работе [1] была изучена аналогичная (1.1)–(1.8), (1.10) прямая задача, в которой задавался градиент давления $f_1(t)$ в первой жидкости, а условие переопределения отсутствовало. Заметим также, что стационарная задача об осесимметричном течении двух жидкостей во вращающейся трубе при условии (1.9) и $q = \mathrm{const}$ анализировалась в работах [2, 3].

В данной работе приводятся априорные оценки решения задачи (1.1)–(1.10) в равномерной метрике и на их основе получены достаточные условия для расхода $q(t)$, при котором найденное стационарное решение является экспоненциально устойчивым.

2. Стационарное решение обратной задачи. Пусть $w_j^s(r)$, $T_j^s(r)$, f_1^s — стационарное решение задачи (1.1)–(1.10). С учетом условий ограниченности при $r = 0$ имеем представления

$$w_1^s(r) = \alpha_1 - f_1^s\,\frac{r^2}{4}, \qquad T_1^s(r) = \mathrm{Pr}_1\Big(\frac{f_1^s}{48}\,r^4 - \alpha_1\,\frac{r^2}{4}\Big) + \alpha_2, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где α_1, α_2 — постоянные. Поскольку $w_2^s(\lambda) = 0$, $T_2^s(\lambda) = 0$, при $1 \leqslant r \leqslant \lambda$

$$\begin{gathered} w_2^s(r) = \frac{f_2^s}{4}\,(\lambda^2 - r^2) + \beta_1 \ln\Big(\frac{r}{\lambda}\Big), \\ T_2^s(r) = \mathrm{Pr}_2\Big\{\frac{f_1^s}{16}\Big(\frac{3}{4}\,\lambda^4 + \frac{1}{4}\,r^4 - \lambda^2 r^2\Big) - \frac{\beta_1}{4}\Big[r^2 \ln\Big(\frac{r}{\lambda}\Big) + \lambda^2 - r^2\Big]\Big\} + \beta_2 \ln\Big(\frac{r}{\lambda}\Big) \end{gathered} \tag{2.2}$$

(β_1, β_2 — постоянные). После ряда преобразований получаем равенства

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\,f_1^s[\mu(2\ln\lambda + \lambda^2 - 1) + 1] + \frac{\mathrm{Ma}}{4}\,(2\ln\lambda + \lambda^2 - 1); \tag{2.3}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\,\mu\nu f_1^s - \frac{\nu\mathrm{Ma}}{2}; \tag{2.4}$$

$$f_1^s = \frac{1}{\mu(\lambda^2 - 1)(3 + \lambda^2) + 1}\Big(\frac{8q^s}{\pi} - \mathrm{Ma}\,(\lambda^2 - 1)(3 + \lambda^2)\Big); \tag{2.5}$$

$$f_2^s = \frac{\nu}{\mu(\lambda^2 - 1)(3 + \lambda^2) + 1}\Big(\frac{8\mu q^s}{\pi} + \mathrm{Ma}\Big). \tag{2.6}$$

Из условий непрерывности скоростей и потоков тепла (1.7) следует

$$\begin{gathered} \alpha_2 = \frac{\mathrm{Pr}_1}{4}\Big(\alpha_1 - \frac{f_1^s}{12}\Big) - \beta_2 \ln\lambda + \mathrm{Pr}_2\Big(\frac{f_2^s}{64}\,(3\lambda^4 + 1 - 4\lambda^2) + \frac{\beta_1}{4}\,(\ln\lambda + 1 - \lambda^2)\Big), \\ \beta_2 = \frac{k\mathrm{Pr}_1}{2}\Big(\frac{f_1^s}{6} - \alpha_1\Big) - \frac{\mathrm{Pr}_2}{4}\Big(\frac{f_2^s}{4}\,(2\lambda^2 - 1) + \beta_1(1 + 2\ln\lambda)\Big). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Поскольку величины α_1, f_1^s, f_2^s, β_1 известны, постоянные α_2, β_2 также известны. Таким образом, стационарное решение построено.

3. Априорные оценки решения задачи (1.1)–(1.10)**.** Предположим, что $q(t) \in C^1[0, t_0]$, и выполним преобразование

$$\begin{gathered} w_1(r,t) = v(r,t) + \Pi(r,t), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ \Pi(r,t) = \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\,(2r^2 - 5r^3 + 3r^4) + \frac{30q(t)}{\pi}\,(r^2 - 2r^3 + r^4). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Полином $\Pi(r,t)$ выбран таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Big|\frac{\Pi_r}{r}\Big| < \infty \text{ при } r = 0, \quad \Pi(1,t) = 0, \quad \Pi_r(1,t) = \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}, \quad \int\limits_0^1 r\Pi(r,t)\,dr = \frac{q(t)}{2\pi}.$$

Новая неизвестная функция $v(r,t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_t = v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r + f_1(t) + g(r,t), \qquad 0 < r < 1,$$
$$g(r,t) = \Pi_{rr} + \frac{1}{r}\,\Pi_r - \Pi_t. \tag{3.2}$$

Согласно (3.1) в правую часть уравнения для $T_1(r,t)$ (см. (1.1)) вместо $w_1(r,t)$ нужно подставить величину $v(r,t)+\Pi(r,t)$. Начальное условие для $v(r,t)$ имеет вид $v(r,0) = w_{10}(r) - \Pi(r,0) \equiv v_0(r)$, $r \in [0,1]$. Уравнения для функций $w_2(r,t)$, $T_2(r,t)$, а также граничные и начальные условия (1.5), (1.7), (1.8) не меняются. Условия (1.6), (1.9) принимают вид (два из них также становятся однородными)

$$\int\limits_0^1 rv(r,t)\,dr + \frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2(r,t)\,dr = 0,$$
$$w_{2r}(1,t) = \mu\nu v_r(1,t), \qquad w_2(1,t) = \nu v(1,t), \qquad t \in [0,t_0]. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) умножим на rv и проинтегрируем по r от 0 до 1, первое уравнение (1.4) умножим на $(\mu\nu)^{-1}rw_2$ и проинтегрируем по r от 1 до λ. В результате сложения с учетом соотношений (3.3) получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^1 rv^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2^2\,dr\Big) + \int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr = \int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)v\,dr. \tag{3.4}$$

Ясно, что уравнение (3.4) справедливо для любого решения задачи (1.4)–(1.8), (3.2), (3.3), т. е. является тождеством. Заметим, что оно не содержит градиенты давлений $f_1(t)$, $f_2(t)$ и является основным при получении априорных оценок.

Рассмотрим вспомогательное неравенство

$$w(r,t) = \begin{cases} v(r,t), & 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ \nu^{-1}w_2(r,t), & 1 \leqslant r \leqslant \lambda. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из третьего условия (3.3) следует непрерывность $w(r,t)$ для всех $r \in [0,\lambda]$; здесь $t \in [0,t_0]$ является параметром. Из первого соотношения (3.3) получаем равенство

$$\int\limits_0^\lambda rw(r,t)\,dr = 0. \tag{3.6}$$

Если $w_r \in L_2(r;0,\lambda)$ ($v_r \in L_2(r;0,1)$, $w_{2r} \in L_2(r;1,\lambda)$), то выполняется неравенство [4]

$$\int\limits_0^\lambda rw^2\,dr \leqslant \frac{\lambda^2}{x_1^2}\int\limits_0^\lambda rw_r^2\,dr.$$

Из определения $w(r,t)$ (3.5) следует

$$\int\limits_0^1 rv^2\,dr + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_2^2\,dr \leqslant \frac{\lambda^2}{x_1^2}\Big(\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr\Big), \tag{3.7}$$

где $x_1 \approx 3{,}8317$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_1(x)$.

Полагая

$$Y = \int\limits_0^1 rv^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2^2\,dr$$

и используя (3.7), получаем оценку снизу

$$\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr \geqslant \min\Big(1, \frac{1}{\mu}\Big)\Big(\int\limits_0^1 rv^2\,dr + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr\Big) \geqslant \delta Y, \tag{3.8}$$

где $\delta = \min[\min(1, \mu^{-1}), \min(1, \mu\nu^{-1})]x_1^2\lambda^{-2} > 0$. Правую часть (3.4) оценим сверху:

$$\begin{gathered}\Big|\int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)v\,dr\Big| \leqslant \Big[\int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)^2 dr\Big]^{1/2}\Big(\int\limits_0^1 rv^2\,dr\Big)^{1/2} \leqslant G_1(t)\sqrt{Y},\\ G_1(t) = \Big[\int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)^2 dr\Big]^{1/2}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.4) получаем неравенство $Y_t + 2\delta Y \leqslant 2G_1(t)\sqrt{Y}$, из которого находим

$$\begin{gathered}Y(t) \leqslant \Big(\sqrt{Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\, G_1(\tau)\,d\tau\Big)^2 \mathrm{e}^{-2\delta t},\\ Y(0) = \int\limits_0^1 rv_0^2(r)\,dr + \frac{1}{\mu\nu}\int\limits_1^\lambda rw_{20}^2(r)\,dr.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Следовательно, L_2 — нормы с весом r функций $v(r,t)$, $w_2(r,t)$ — ограничены для всех $t \in [0, t_0]$, если $q(t) \in C^1[0, t_0]$. Действительно, из выражений (3.1) для $\Pi(r,t)$, (3.2) для $g(r,t)$ находим

$$g(r,t) - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu} = \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}(7 - 45r + 48r^2) + \frac{60q(t)}{\pi}(2 - 7r + 8r^2) - \frac{30q'(t)}{\pi}(r^2 + 2r^3 - r^4). \tag{3.11}$$

Тогда можно точно вычислить интеграл в (3.9), однако ограничимся получением оценки сверху для $G_1(t)$ с использованием неравенства $\Big(\sum\limits_{j=1}^n a_j\Big)^2 \leqslant n\sum\limits_{j=1}^n a_j^2$ и условия $r \leqslant 1$. В результате имеем

$$\int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)^2 dr \leqslant 300\Big(\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mu^2} + \frac{324q^2(t)}{\pi^2} + \frac{36[q'(t)]^2}{\pi^2}\Big).$$

Так как $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3|$, то

$$G_1(t) \leqslant \Big[\int\limits_0^1 r\Big(g - \frac{\mathrm{Ma}}{\mu}\Big)^2 dr\Big]^{1/2} \leqslant 10\sqrt{3}\,\Big(\frac{|\mathrm{Ma}|}{\mu} + 18\,\frac{|q(t)|}{\pi} + 6\,\frac{|q'(t)|}{\pi}\Big) \equiv h_1(t). \tag{3.12}$$

Из неравенств (3.10), (3.12) и определения $Y(t)$ при $t \in [0, t_0]$ получаем оценки

$$\int_0^1 rv^2\,dr \leqslant \Big(\sqrt{Y(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t},$$
$$\int_1^\lambda rw_2^2\,dr \leqslant \mu\nu\Big(\sqrt{Y(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta\tau}. \qquad (3.13)$$

Из (3.1) находим

$$\int_0^1 rw_1^2\,dr \leqslant 2\int_0^1 rv^2\,dr + 2\int_0^1 r\Pi^2\,dr.$$

Из явного представления $\Pi(r,t)$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$ следует неравенство

$$\int_0^1 r\Pi^2\,dr \leqslant 4\,\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mu^2} + 30\,\frac{q^2(t)}{\pi^2} \equiv h_2^2(t). \qquad (3.14)$$

Значит, для всех $t \in [0, t_0]$

$$\int_0^1 rw_1^2\,dr \leqslant 2\Big(\sqrt{Y(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta\tau} + 2h_2^2(t). \qquad (3.15)$$

3.1. *Два представления для градиента давления $f_1(t)$ и его оценка.* Из первых уравнений (1.1), (1.4) с учетом (1.2), (1.10) получаем равенства

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 rw_1\,dr = w_{1r}(1,t) + \frac{1}{2}\,f_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\nu}\int_1^\lambda rw_2\,dr = \frac{1}{\nu^2}\,[\lambda w_{2r}(\lambda,t) - w_{2r}(1,t)] + \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\nu}\,f_1(t) + \frac{1}{2\nu}\,\mathrm{Ma},$$

складывая которые находим

$$\frac{1}{2}\,(1+\rho)f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\,q'(t) - \frac{\lambda}{\nu^2}\,w_{2r}(\lambda,t) + (\rho-1)w_{1r}(1,t) - \frac{3}{2\nu}\,\mathrm{Ma} \qquad (3.16)$$

($\mu = \rho\nu$; $\rho = \rho_1/\rho_2$).

Так как следы производных $w_{2r}(\lambda,t)$, $w_{1r}(1,t)$ не известны, представление (3.16) непригодно для оценки $|f_1(t)|$. Однако оно позволяет найти значение $f_1(0)$ (а значит, и $f_2(0)$) через входные данные:

$$\frac{1}{2}\,(1+\rho)f_1(0) = \frac{1}{2\pi}\,q'(0) - \frac{\lambda}{\nu^2}\,w_{20,r}(\lambda) + (\rho-1)w_{10,r}(1) - \frac{3}{2\nu}\,\mathrm{Ma}. \qquad (3.17)$$

Для получения второго представления $f_1(t)$ умножим уравнение для $w_1(r,t)$ в (1.1) на полином $r^2(1-r)^2$ и проинтегрируем полученный результат от 0 до 1:

$$\int_0^1 r^3(1-r)^2 w_{1t}\,dr = \int_0^1 r^2(1-r)^2(rw_{1r})_r\,dr + \frac{1}{60}\,f_1(t).$$

Интегрируя правую часть этого выражения дважды по частям (при этом внеинтегральные слагаемые равны нулю), находим

$$\frac{1}{60}\,f_1(t)=\int\limits_0^1 r^3(1-r)^2w_{1t}\,dr-2\int\limits_0^1 r(2-9r+8r^2)w_1\,dr. \qquad (3.18)$$

Таким образом, для получения оценки $|f_1(t)|$ достаточно знать оценку интеграла $\int\limits_0^1 rw_{1t}^2\,dr$, поскольку второй интеграл в (3.18) удовлетворяет неравенству

$$\Bigl|-2\int\limits_0^1 r(2-9r+8r^2)w_1\,dr\Bigr|\leqslant 4\int\limits_0^1\sqrt{r}\,|w_1|\,dr\leqslant$$

$$\leqslant 4\Bigl(\int\limits_0^1 rw_1^2\,dr\Bigr)^{1/2}\leqslant 4\sqrt{2}\Bigl[\Bigl(\sqrt{Y(0)}+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Bigr)\,\mathrm{e}^{-\delta t}+h_2(t)\Bigr]. \qquad (3.19)$$

Заметим, что при выводе (3.19) учтена оценка (3.15).

3.2. *Оценка интеграла* $\int\limits_0^1 rv_t^2(r,t)\,dr$. Рассмотрим задачу (3.2), (1.4) для $v(r,t)$, $w_2(r,t)$ с граничными условиями (3.3), $w_2(\lambda,t)=0$, $|v(0,t)|<\infty$ и начальными данными $v_0(r)=w_{10}(r)-\Pi(r,0)$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $w_2(r,0)=w_{20}(r)$, $1\leqslant r\leqslant\lambda$. Градиенты давлений связаны равенством (1.10).

Продифференцируем данную задачу по t. Тогда функции $V(r,t)=v_t(r,t)$, $W(r,t)=w_{2t}(r,t)$ есть решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} &V_t=V_{rr}+\frac{1}{r}\,V_r+f_1'(t)+g_t(r,t), \qquad 0<r<1,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ &W_t=\frac{1}{\nu}\Bigl(W_{rr}+\frac{1}{r}\,W_r\Bigr)+\frac{1}{\nu}\,f_2'(t), \qquad 1<r<\lambda,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0; \end{aligned} \qquad (3.20)$$

$$\begin{gathered} W_r(1,t)=\mu\nu V_r(1,t), \qquad W(1,t)=\nu V(1,t),\\ \int\limits_0^1 rV(r,t)\,dr+\frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rW(r,t)\,dr=0; \end{gathered} \qquad (3.21)$$

$$|V(0,t)|<\infty, \qquad W(\lambda,t)=0; \qquad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &V(r,0)=v_t(r,0)=v_{0,rr}(r)+\frac{1}{r}\,v_{0,r}(r)+f_1(0)+g(r,0)\equiv V_0(r),\\ &W(r,0)=w_{2t}(r,0)=\frac{1}{\nu}\Bigl(w_{20,rr}(r)+\frac{1}{r}\,w_{20,r}(r)\Bigr)+\frac{1}{\nu}\,f_2(0)\equiv W_0(r). \end{aligned} \qquad (3.23)$$

В силу (1.10)

$$f_2'(t)=\mu\nu f_1'(t). \qquad (3.24)$$

Поставленная обратная задача (3.20)–(3.23) совпадает с задачей для $v(r,t)$, $w_2(r,t)$, $f_1(t)$, если выполнить замену f_j на f_j', начальных данных v_0 на V_0, w_{20} на W_0 и правой части g на g_t. В равенстве (3.24) отсутствует постоянное слагаемое $\nu\mathrm{Ma}$, поэтому для V, W имеет место тождество (3.4), в правой части которого содержится интеграл $\int\limits_0^1 rg_t v\,dr$.

Выражение (3.9) принимает вид

$$\bar G_1(t) = \Big(\int\limits_0^1 rg_t^2\,dr\Big)^{1/2},$$

а (3.11) имеет вид

$$g_t = \frac{60}{\pi}\,q'(t)(2-7r+8r^2) - \frac{30}{\pi}\,q''(t)(-r^2-2r^3+r^4). \tag{3.25}$$

Здесь требуется дополнительное условие $q(t)\in C^2[0,t_0]$.

Таким образом,

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 rv_t^2\,dr \leqslant \Big(\sqrt{\bar Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,\bar h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t},\\ \int\limits_1^\lambda rw_{2t}^2\,dr \leqslant \mu\nu\Big(\sqrt{\bar Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,\bar h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t},\end{gathered} \tag{3.26}$$

где $\bar Y(0)$ отличается от $Y(0)$ только начальными данными:

$$\bar h_1(t) = \frac{60\sqrt3}{\pi}\,(3|q'(t)|+3|q''(t)|), \qquad \bar h_2^2(t) = \frac{30}{\pi^2}\,[q'(t)]^2. \tag{3.27}$$

Оценка (3.15) принимает вид

$$\int\limits_0^1 rw_{1t}^2\,dr \leqslant 2\Big(\sqrt{\bar Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,\bar h_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t} + 2\bar h_2^2(t). \tag{3.28}$$

Используя формулу (3.25) и учитывая неравенства (3.19), (3.28), получаем оценку

$$\begin{aligned}|f_1(t)| \leqslant 240\sqrt2\,\Big[\Big(\sqrt{Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)\,\mathrm{e}^{-\delta t} + h_2(t)\Big] +{}\\ + 60\sqrt2\,\Big[\Big(\sqrt{\bar Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,\bar h_1(\tau)\,d\tau\Big)\,\mathrm{e}^{-\delta t} + \bar h_2(t)\Big], \quad t\in[0,t_0].\end{aligned} \tag{3.29}$$

Из равенства (1.10) следует

$$|f_2(t)| \leqslant \mu\nu|f_1(t)| + \nu|\mathrm{Ma}|. \tag{3.30}$$

4. Оценки скоростей в равномерной метрике. Для решения сопряженной задачи (1.1)–(1.9) можно использовать также тождество

$$\int\limits_0^1 rv_t^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu}\int\limits_1^\lambda rw_{2t}^2\,dr + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr\Big) =$$
$$= \frac{\mathrm{Ma}}{\mu\nu}\int\limits_1^\lambda rw_{2t}\,dr + \int\limits_0^1 rgv_t\,dr. \qquad (4.1)$$

Поскольку $|ab| \leqslant \varepsilon a^2/2 + b^2/(2\varepsilon)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, правая часть (4.1) не превышает значения выражения

$$\frac{|\mathrm{Ma}|}{\mu\nu}\Big(\frac{1}{4\varepsilon}(\lambda^2-1) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_1^\lambda rw_{2t}^2\,dr\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 rg^2\,dr + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 rv_t^2\,dr.$$

Полагая $\varepsilon = 1/|\mathrm{Ma}|$, из (4.1) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr\Big) \leqslant \frac{\mathrm{Ma}^2}{2\mu\nu}(\lambda^2-1) + \int\limits_0^1 rg^2\,dr,$$

откуда следует

$$\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr \leqslant \int\limits_0^1 rv_{0,r}^2\,dr + \frac{1}{\mu\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_{20,r}\,dr +$$
$$+ \frac{|\mathrm{Ma}|^2(\lambda^2-1)t}{2\mu\nu} + \int\limits_0^t rg^2(r,\tau)\,d\tau \equiv h_3(t) \qquad (4.2)$$

для всех $t \in [0, t_0]$. Значит,

$$\int\limits_0^1 rv_r^2\,dr \leqslant h_3(t), \qquad \int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr \leqslant \mu\nu^2 h_3(t). \qquad (4.3)$$

Так как $w_2(\lambda, t) = 0$ и $1 \leqslant r \leqslant \lambda$, то

$$w_2^2(r,t) = 2\Big|\int\limits_r^\lambda w_2 w_{2r}\,dr\Big| \leqslant 2\int\limits_1^\lambda (\sqrt{r}\,|w_2|)(\sqrt{r}\,|w_{2r}|)\,dr \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(\int\limits_1^\lambda rw_2^2\,dr\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_1^\lambda rw_{2r}^2\,dr\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 2\,[\mu^2\nu^3 h_3(t)]^{1/2}\Big(\sqrt{Y(0)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)\,\mathrm{e}^{-\delta t} \equiv h_4^2(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}$$

в силу (3.13), (4.2). Поэтому

$$|w_2(r,t)| \leqslant h_4(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t/2} \tag{4.4}$$

для всех $r \in [1,\lambda]$, $t \in [0,t_0]$.

Однако подобное рассуждение неприменимо для оценки $|w_1(r,t)|$. Так как при $r = 1$

$$|w_1(1,t)| = \frac{1}{\nu}\,|w_2(1,t)| \leqslant \frac{h_4}{\nu}\,(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t/2}, \tag{4.5}$$

то, считая правую часть $f_1(t)$ уравнения (1.1) для $w_1(r,t)$ известной, получаем [5]

$$w_1(r,t) = \int\limits_0^1 w_{10}(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - \int\limits_0^t w_1(1,\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau + {} \\ + \int\limits_0^t f_1(\tau)\Big(\int\limits_0^1 G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau, \tag{4.6}$$

где $G(r,\xi,t)$ — функция Грина:

$$G(r,\xi,t) = 2\xi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\xi_n)}\,J_0(\xi_n r)J_0(\xi_n\xi)\,\mathrm{e}^{-\xi_n^2 t}, \\ \Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}\,G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=1}. \tag{4.7}$$

В силу оценок (3.19), (4.5) имеем $|w_1(r,t)| < \infty$ для всех $r \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$.

5. Оценки возмущений температур. Уравнение (1.1) умножим на kT_1/χ, уравнение (1.4) — на T_2. После ряда преобразований получаем тождество

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rT_1^2\,dr + \int\limits_1^\lambda rT_2^2\,dr\Big) + \frac{k}{\mathrm{Pr}_1\chi}\int\limits_0^1 rT_{1r}^2\,dr + \frac{1}{\mathrm{Pr}_2\nu}\int\limits_1^\lambda rT_{2r}^2\,dr = \\ = \frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rw_1T_1\,dr + \frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2T_2\,dr. \tag{5.1}$$

Так как имеет место неравенство [4]

$$\int\limits_0^1 rT_1^2\,dr + \int\limits_1^\lambda rT_2^2\,dr \leqslant M_0\Big(k\int\limits_0^1 rT_{1r}^2\,dr + \int\limits_1^\lambda rT_{2r}^2\,dr\Big) \tag{5.2}$$

с некоторой известной постоянной $M_0 > 0$, зависящей от k и λ, то, вводя обозначение

$$Z(t) = \frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rT_1^2\,dr + \int\limits_1^\lambda rT_2^2\,dr, \tag{5.3}$$

с учетом $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ из (4.1) получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{dZ}{dt}+\delta_1 Z\leqslant H_1(t)\sqrt{Z}. \tag{5.4}$$

Здесь

$$\delta_1=\frac{\min\,(\chi k^{-1},1)}{M_0\max\,(\mathrm{Pr}_1\chi,\mathrm{Pr}_2\nu)}\,,$$

$$H_1(t)=\sqrt{2}\,\max\Big(\frac{2k}{\chi},\sqrt{\rho}\Big)\Big[\Big(\sqrt{Y(0)}+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,h_1(\tau)\,d\tau\Big)\,\mathrm{e}^{-2\delta t}\,+h_2^2(t)\Big]^{1/2},$$

при этом учтены оценки (3.13), (3.15) и равенство $\mu=\rho\nu$.

Таким образом,

$$\begin{gathered}\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rT_1^2\,dr+\int\limits_1^\lambda rT_2^2\,dr\leqslant\Big(\sqrt{Z(0)}+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\delta\tau}\,H_1(\tau)\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta_1 t}\equiv H_2^2(t)\,\mathrm{e}^{-2\delta_1 t},\\ Z(0)=\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rT_{10}^2\,dr+\int\limits_1^\lambda rT_{20}^2\,dr.\end{gathered}\tag{5.5}$$

Для оценок производных $\int\limits_0^1 rT_{1r}^2\,dr$, $\int\limits_1^\lambda rT_{2r}^2\,dr$ используем второе тождество (5.5):

$$\begin{gathered}\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rT_{1t}^2\,dr+\int\limits_1^\lambda rT_{2t}^2\,dr+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{k}{\mathrm{Pr}_1\chi}\int\limits_0^1 rT_{1r}^2\,dr+\frac{1}{\mathrm{Pr}_2\nu}\int\limits_1^\lambda rT_{2r}^2\,dr\Big)=\\ =\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rw_1T_{1t}\,dr+\frac{1}{\nu}\int\limits_1^\lambda rw_2T_{2t}\,dr.\end{gathered}\tag{5.6}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{k}{\mathrm{Pr}_1\chi}\int\limits_0^1 rT_{1r}^2\,dr+\frac{1}{\mathrm{Pr}_2\nu}\int\limits_1^\lambda rT_{2r}^2\,dr\leqslant\frac{k}{\mathrm{Pr}_1\chi}\int\limits_0^1 rT_{10r}^2\,dr+\frac{1}{\mathrm{Pr}_2\nu}\int\limits_1^\lambda rT_{20r}^2\,dr+\\ +\int\limits_0^t\Big(\frac{k}{\chi}\int\limits_0^1 rw_1^2\,dr+\frac{1}{\nu^2}\int\limits_1^\lambda rw_2^2\,dr\Big)\,d\tau\equiv H_3^2(t).\end{gathered}\tag{5.7}$$

Так же как и при выводе оценки (4.4), из (5.5), (5.7) получаем

$$|T_2(r,t)|\leqslant H_4(t)\,\mathrm{e}^{-\delta_1 t/2} \tag{5.8}$$

для всех $r\in[1,\lambda]$, $t\in[0,t_0]$,

$$H_4^2(t)\leqslant 2H_2(t)H_3(t)\,\sqrt{\mathrm{Pr}_2\nu}. \tag{5.9}$$

Для функции $T_1(r,t)$ имеем представление [1]

$$T_1(r,t) = \int\limits_0^1 T_{10}(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\mathrm{Pr}_1}\int\limits_0^t T_2(1,\tau)\Lambda(r,\tau)\,d\tau + {}$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_1(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau \qquad (5.10)$$

с функцией Грина (см. (4.7))

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi}{J_1^2(\xi_n)}\, J_0(\xi_n r) J_0(\xi_n \xi)\,\mathrm{e}^{-\xi_n^2 t/\mathrm{Pr}_1},$$
$$\Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\, G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=1}. \qquad (5.11)$$

В силу оценок для $|w_1|$ и (5.8) получаем $|T_1(r,t)| \leqslant \infty$ для всех $r \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$.

6. Достаточные условия стремления решения с увеличением времени к стационарному состоянию. Пусть расход определен для всех $t \geqslant 0$ и $q(t) \in C^2(0,\infty)$. Рассмотрим дополнительные условия для $q(t)$, при которых $w_j(r,t) \to w_j^s(r)$, $T_j(r,t) \to T_j^s(r)$, $f_1(t) \to f_1^s$ при $t \to \infty$ в равномерной метрике. Для этого выполним замену: $W_j(r,t) = w_j(r,t) - w_j^s(r)$, $K_j(r,t) = T_j(r,t) - T_j^s(r)$, $F_1(t) = f_1(t) - f_1^s$. Полученные функции являются решением той же задачи (1.1)–(1.9) с функцией $Q(t) = q(t) - q^s$ и измененными начальными данными $W_{j0}(r) = w_{j0}(r) - w_j^s(r)$, $K_{j0}(r) = T_{j0}(r) - T_j^s(r)$. Поэтому для W_2, F_j, K_2 справедливы оценки (3.29), (3.30), (4.4), (5.8); величины $|W_1|$, $|K_1|$ будем оценивать непосредственно с помощью рядов (4.7), (5.11).

Прежде всего заметим, что указанная задача для W_j, F_j, K_j не содержит число Марангони, т. е. во всех формулах, в которые оно входило, нужно положить $\mathrm{Ma} = 0$.

Предположим, что справедливы оценки

$$|q(t) - q^s| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad |q'(t)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad |q''(t)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (6.1)$$

с положительными постоянными C и α. Ясно, что должен сходиться интеграл в (3.10)

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\delta\tau}\, G_1(\tau)\,d\tau. \qquad (6.2)$$

Согласно (3.12) при $\mathrm{Ma} = 0$ имеем

$$G_1(t) \leqslant \frac{60\sqrt{3}}{\pi}\,(5\,|q(t) - q^s| + |q'(t)|) = \frac{60\sqrt{3}}{\pi}\,(3\,|Q(t)| + |Q'(t)|) \equiv h_1(t),$$

а интеграл (6.2) сходится при $\alpha > \delta$. Далее,

$$h_1(t) \leqslant \frac{240\sqrt{3}}{\pi}\, C\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \equiv d\,\mathrm{e}^{-\alpha t}; \qquad (6.3)$$

$$h_2^2(t) \leqslant \frac{30}{\pi^2}\, Q^2(t) \leqslant \frac{30}{\pi^2}\, C^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}\,. \qquad (6.4)$$

Значит, сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\delta\tau}\, h_1(\tau)\,d\tau. \qquad (6.5)$$

Так как согласно (3.27) $\bar{h}_1(t) \leqslant d_1\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $\bar{h}_2^2(t) \leqslant d_3\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}$, то при $t \to \infty$ сходятся также интегралы в неравенствах (3.26), (3.29). В частности, из (3.29), (3.30), где $\mathrm{Ma} = 0$, следует

$$|F_1(t)| \leqslant d_4\,\mathrm{e}^{-\delta t} + d_5\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}, \qquad |F_2(t)| \leqslant \mu\nu\,|F_1(t)|. \tag{6.6}$$

Согласно (3.12), (4.2) интеграл

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 r g^2(r,\tau)\,dr\,d\tau$$

является сходящимся, поэтому из (4.4) находим

$$|W_2(r,t)| \leqslant d_6\,\mathrm{e}^{-\delta t/2}\,. \tag{6.7}$$

Далее, из (5.3), (5.4), (6.4) следует

$$H_1(t) \leqslant d_7\,\mathrm{e}^{-\delta t} + d_8\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad H_2(t) \leqslant d_9 \tag{6.8}$$

для всех $t \geqslant 0$. Величина $H_3(t)$ в (5.7) также ограничена при всех $t \geqslant 0$. Это следует из оценок (3.13), (3.15), где w_j нужно заменить на W_j, $j = 1, 2$. Тогда из (6.8) получаем оценку

$$|K_2(r,t)| \leqslant d_{10}\,\mathrm{e}^{-\delta_1 t/2}\,. \tag{6.9}$$

Для получения оценок $|W_1(r,t)|$, $|K_1(r,t)|$ при $t \geqslant 0$ используем представления (4.6), (5.9). В рассматриваемом случае формула (4.6) имеет вид

$$W_1(r,t) = \int\limits_0^1 W_{10}(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi - \int\limits_0^t W_1(1,\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau + {} \\ + \int\limits_0^t F_1(\tau)\,\Big(\int\limits_0^1 G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau, \tag{6.10}$$

где G, Λ — функции, определенные в (4.7).

Приведем некоторые результаты, полученные с помощью функций Бесселя. При $x \to \infty$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\,\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{x^{3/2}}\Big),$$

поэтому при $n \gg 1$ корни ξ_n уравнения $J_0(\xi) = 0$ приближенно равны

$$\xi_n \approx \frac{\pi}{2}\,(2n+1) + \frac{\pi}{4} \approx \pi n.$$

В этом случае

$$J_1(\xi_n) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi^2 n}}\,\cos\Big(\frac{\pi}{2}\,(2n+1) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{\frac{1}{\pi^2 n}}\,(-1)^n.$$

Кроме того, $J_0'(x) = -J_1(x)$, $|J_\nu(x)| \leqslant 1$.

Пусть $t \geqslant \varepsilon > 0$ для любого ε. Оценим первое слагаемое в (6.10). Так как $\xi_n - \xi_1 > 0$, $n > 1$, то

$$\Big|\int\limits_0^1 W_{10}(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi\Big| \leqslant 2\pi^2 \max\,(|W_{10}(\xi)|)\,\mathrm{e}^{-\xi_1 t} \sum_{n=1}^\infty n\,\mathrm{e}^{-(\xi_n - \xi_1)\varepsilon} \leqslant d_{11}\,\mathrm{e}^{-\xi_1^2 t}\,.$$

Для получения оценки второго слагаемого в (6.10) используем равенство

$$\Lambda(r,t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1(\xi_n)}\, \mathrm{e}^{-\xi_n^2 t}.$$

Используя неравенство (6.7), при $W_1(1,t) = W_2(1,t)$ с учетом $|W_1(1,t)| \leqslant d_6\,\mathrm{e}^{-\delta t/2}$ имеем оценку

$$\Big|\int_0^t W_1(1,\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau\Big| \leqslant 2\pi d_6 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-\xi_n^2 t} \int_0^t \mathrm{e}^{(\xi_n^2-\delta/2)\tau}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi d_6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\xi_n^2-\delta}\,(\mathrm{e}^{-\delta t/2} - \mathrm{e}^{-\xi_n^2 t}) \leqslant d_{12}\,\mathrm{e}^{-\delta t/2},$$

так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ сходится.

Рассмотрим последнее слагаемое формулы (6.10). Так как $xJ_0(x) = (xJ_1(x))'$, то

$$\int_0^1 G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n)}\,\mathrm{e}^{-\xi_n^2(t-\tau)}.$$

Используя оценку (6.6) в виде $|F_1(t)| \leqslant d_{13}\,\mathrm{e}^{-\delta t}$, получаем

$$\Big|\int_0^t F_1(\tau)\int_0^1 G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\Big| \leqslant 2d_{13}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\xi_n^2-\delta)}\,(\mathrm{e}^{-\delta t} - \mathrm{e}^{-\xi_n^2 t}) \leqslant d_{14}\,\mathrm{e}^{-\delta t}$$

ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-5/2}$.

Таким образом, при $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$|W_1(r,t)| \leqslant d_{11}\,\mathrm{e}^{-\xi_1^2 t} + d_{12}\,\mathrm{e}^{-\delta t/2} + d_{14}\,\mathrm{e}^{-\delta t} \leqslant d_{15}\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \min(\xi_1^2, \delta/2). \tag{6.11}$$

В рассматриваемом случае формула (5.10) имеет вид

$$K_1(r,t) = \int_0^1 K_{10}(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\mathrm{Pr}_1}\int_0^t K_2(1,\tau)\Lambda(r,t)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 W_1(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{6.12}$$

где функции G и Λ определены в (5.11). С учетом неравенств (6.9), (6.11) из (6.12) получаем

$$\begin{gathered} |K_1(r,t)| \leqslant d_{16}\,\mathrm{e}^{-\xi_1^2 t/\mathrm{Pr}_1} + d_{17}\,\mathrm{e}^{-\delta_1 t/2} + d_{18}\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 t} \leqslant d_{19}\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}, \\ \alpha_2 = \min(\xi_1^2/\mathrm{Pr}_1, \delta_1/2, \alpha_1). \end{gathered} \tag{6.13}$$

Итак, согласно оценкам (6.6), (6.7), (6.11), (6.13) нестационарное решение задачи (1.1)–(1.9) при условиях (6.1) и $t \to \infty$ стремится к стационарным значениям (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) по экспоненциальному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К.** О совместном однонаправленном движении двух вязких теплопроводных жидкостей в трубе // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 57–71.
2. **Бирих Р. В., Пухначев В. В.** Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
3. **Andreev V. K.** Mathematical models of convection / V. K. Andreev, Yu. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2020.
4. **Андреев В. К.** О неравенстве типа Фридрихса для составных областей // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика. 2008. № 4. С. 349–370.
5. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 22/IV 2024 г.,
после доработки — 28/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.