

УДК 632.5

ДВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ КЭССОНА ВДОЛЬ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ ПЛЕНКИ

С. Халдар, С. Мухопадхай, Г. С. Лайек

Университет г. Бурдвана, 713104 Бурдван, Индия

E-mails: samu_haldar@yahoo.in, swati_bumath@yahoo.co.in, goralayek@yahoo.com

Изучено установившееся течение в пограничном слое вязкой жидкости Кэссона вдоль растягивающейся по степенному закону пленки. При различных значениях параметров задачи получено численное автомодельное решение, зависящее от материальных параметров жидкости. Для некоторого диапазона этих параметров получено два решения. В результате численного решения установлено, что с увеличением показателя степени β в реологическом уравнении Кэссона скорость жидкости уменьшается. Показано, что при больших значениях β коэффициент поверхностного трения и распределение скорости по толщине пограничного слоя для жидкости Кэссона такие же, как и для ньютоновской жидкости.

Ключевые слова: модель Кэссона вязкой жидкости, пограничный слой, степенной закон растяжения пленки, двойное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20170406

Введение. Интерес к изучению реологических свойств неньютоновских жидкостей обусловлен тем, что такие жидкости встречаются во многих технологических процессах (угольные суспензии, полимерные растворы и расплавы, лакокрасочные материалы, горюче-смазочные материалы, буровые растворы, жидкие нефтепродукты). Большинство промышленных жидкостей являются неньютоновскими.

В данной работе изучается течение в пограничном слое неньютоновской жидкости вдоль растягиваемой пленки. Уравнения, описывающие движение неньютоновских жидкостей, являются нелинейными и значительно сложнее уравнений, описывающих движение ньютоновской жидкости [1]. Существуют различные уравнения состояния вязких жидкостей, что обусловлено сложностью их реологических свойств [2]. Ряд моделей неньютоновских жидкостей предложен в работах [3–5]. В модели вязкой жидкости Кэссона введен предел текучести жидкости. Жидкость Кэссона ведет себя как твердое тело, если напряжения сдвига меньше предела текучести. Течение жидкости Кэссона возникает в тот момент, когда напряжения сдвига становятся больше предела текучести. Примерами жидкостей Кэссона являются желе, томатный соус, мед, жидкое топливо, концентрированные фруктовые соки, а также кровь человека. С использованием метода гомотопического анализа в работе [6] получено аналитическое решение задачи о наклонном течении наножидкости Кэссона с конвективными краевыми условиями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Университетского совета по грантам (Нью-Дели, Индия) в рамках Специальной программы поддержки исследований (этап I).

© Халдар С., Мухопадхай С., Лайек Г. С., 2017

Течения пограничного слоя вдоль растягиваемых пленок встречаются во многих технологических процессах и технических устройствах (производство полимеров, химико-технологические установки, производство стеклянных волокон, бумаги, экструзия струй, использование геотермальной энергии, непрерывная разливка, охлаждение металлических пластин в электролите и т. п.).

Во многих работах предполагается, что закон растяжения пленки является линейным. Однако закон растяжения может быть и нелинейным [7]. В ряде прикладных задач используется степенной или экспоненциальный закон растяжения (см., например, [8]). В работах [9–11] изучалось течение вязкой жидкости вдоль пленки, растягиваемой по степенному закону.

Математические модели физических явлений представляют собой начально-краевые задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых можно получить лишь с использованием численных методов. Исследование области существования двойных решений нелинейных уравнений является важной теоретической и практической задачей. Результаты таких исследований позволяют более полно изучить природу физических явлений. В ряде работ установлено существование двойных решений различных задач о течении в пограничном слое вязкой жидкости [12, 13]. В [14] исследовались эффекты Сорэ и Дюфура в случае течения магнитогидродинамической жидкости Кэссона. Смешанная конвекция в жидкости, текущей вдоль вертикальной растягиваемой по степенному закону пленки, изучалась в [15].

В работе [11] рассматривалось единственное решение задачи о теплопереносе в жидкости Кэссона при ее течении вдоль растягиваемой по нелинейному закону пленки. Насколько известно авторам данной работы, двойное решение задачи о течении жидкости Кэссона вдоль растягиваемой по степенному закону пленки ранее не исследовалось. Целью настоящей работы является построение численного решения этой задачи.

Данная работа является обобщением работы [16] на случай течения вязкой жидкости с реологическим уравнением состояния Кэссона (жидкости Кэссона). С использованием преобразования подобия решение исходной задачи сведено к решению обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

1. Формулировка задачи о течении жидкости. Реологическое уравнение состояния изотропной несжимаемой жидкости Кэссона записывается в виде

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi})e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi_c})e_{ij}, & \pi < \pi_c, \end{cases}$$

где $\pi = e_{ij}e_{ij}$ — интенсивность скоростей деформаций; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций; π_c — критическое значение интенсивности скоростей деформаций в неньютоновской модели жидкости; μ_B — динамическая вязкость вязкопластической жидкости; p_y — предел текучести жидкости.

Рассматривается течение несжимаемой вязкой жидкости вдоль пленки, расположенной в плоскости $y = 0$. Жидкость расположена в полуплоскости $y > 0$. К пленке приложены две равные и противоположно направленные вдоль оси x силы, под действием которых пленка растягивается. Скорость точек пленки при растяжении изменяется по степенному закону. Точка пленки, расположенная в начале координат, не смещается. Уравнение неразрывности и уравнение движения жидкости Кэссона в пограничном слое записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x и y соответственно; ν — кинематическая вязкость; $\beta = \mu_B \sqrt{2\pi c} / p_y$ — параметр жидкости Кэссона.

Задача решается при следующих краевых условиях:

$$y = 0: \quad u = cx^n, \quad v = 0; \quad (3)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0 \quad (4)$$

($c > 0$ — константа; n — показатель степени).

Найдем автомодельное решение задачи (1)–(4). После введения переменных подобия

$$\eta = \sqrt{\frac{c(n+1)}{2\nu}} y x^{(n-1)/2}, \quad u = cx^n f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{c\nu(n+1)}{2}} \left(f(\eta) + \frac{n-1}{n+1} \eta f'(\eta) \right) x^{(n-1)/2}$$

уравнение (2) сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(1 + \frac{1}{\beta} \right) f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) - \frac{2n}{n+1} f'(\eta)^2 = 0. \quad (5)$$

Краевые условия (3) имеют вид

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 0. \quad (6)$$

Обозначим решение краевой задачи (5), (6), зависящее от параметров n и β , через $f(\eta) = F_{n,\beta}(\eta)$. Решение задачи (5), (6) для случая ньютоновской жидкости ($\beta = \infty$) записывается в виде

$$F_{n,\beta}(\eta) = A^{-1} F_{n,\infty}(\eta), \quad A = (1 + 1/\beta)^{-1/2}. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$F''_{n,\beta}(0) = A^{-1} F''_{n,\infty}(0).$$

2. Результаты решения задачи и их обсуждение. При $n = 1$ задача (5), (6) допускает точное решение

$$f(\eta) = A^{-1} (1 - e^{-A\eta}). \quad (8)$$

Из (8) следует

$$f''(0) = -(1 + 1/\beta)^{-1/2}.$$

Задача (5), (6) решалась численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка совместно с методом Ньютона.

В табл. 1 для случая ньютоновской жидкости ($\beta = \infty$) приведены значения напряжений сдвига на поверхности пленки, полученные в данной работе и работе [17] при различных значениях показателя n . Эти значения совпадают. В табл. 2 приведены значения напряжений сдвига на поверхности пленки при различных значениях показателя n и различных значениях параметра жидкости Кэссона β . При всех значениях параметров n и β напряжения сдвига в случае ньютоновской жидкости больше, чем в случае жидкости Кэссона.

На рис. 1–3 приведены зависимости, полученные при численном решении задачи.

На рис. 1 представлены зависимости нормированного коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ от показателя степени n для случаев ньютоновской жидкости и жидкости Кэссона при различных значениях параметра β . В результате численного решения установлено, что при всех рассмотренных значениях n задача имеет два решения (см. рис. 1).

С увеличением параметра β абсолютное значение $f''(0)$ увеличивается и стремится к соответствующему значению для ньютоновской жидкости. Результаты, полученные в данной работе для ньютоновской жидкости, совпадают с результатами, полученными

Таблица 1

Напряжения сдвига на поверхности пленки $-f''(0)$ для ньютоновской жидкости при различных значениях показателя n в уравнении состояния

n	$-f''(0)$	
	Данные [17]	Данные настоящей работы
0	0,627 55	0,627 55
0,20	0,766 84	0,766 84
0,50	0,889 54	0,889 54
0,75	0,953 96	0,953 96
1,00	1,000 00	1,000 00
1,50	1,061 60	1,061 60
3,00	1,148 59	1,148 59
5,00	1,194 49	1,194 49
7,00	1,216 85	1,216 85
10,00	1,234 87	1,234 87

Таблица 2

Напряжения сдвига на поверхности пленки $-f''(0)$ для жидкости Кэссона

n	$-f''(0)$			
	$\beta = 0,5$	$\beta = 1,0$	$\beta = 2,0$	$\beta = 5,0$
0	0,362 319	0,443 748	0,512 396	0,527 877
0,20	0,442 734	0,542 236	0,626 120	0,700 023
0,50	0,513 578	0,629 003	0,726 309	0,812 039
0,75	0,550 767	0,674 549	0,778 902	0,870 839
1,00	0,577 351	0,707 107	0,816 497	0,912 871
1,50	0,612 916	0,750 665	0,866 794	0,969 105
3,00	0,663 141	0,812 178	0,937 822	1,048 517
5,00	0,689 638	0,844 630	0,975 295	1,090 413
7,00	0,702 549	0,860 443	0,993 554	1,110 827
10,00	0,712 955	0,873 188	1,008 271	1,127 281

в работе [16]. Из приведенных на рис. 1 зависимостей следует, что напряжение сдвига на поверхности пленки отрицательное. При отрицательном значении напряжения сдвига пленка препятствует движению жидкости, при положительном значении — способствует ему.

На рис. 2 представлена зависимость скорости жидкости f' от параметра η для ньютоновской жидкости при различных значениях показателя степени n , на рис. 3 — зависимость $f'(\eta)$ для жидкости Кэссона при различных значениях β и показателя степени n . Как для ньютоновской жидкости, так и для жидкости Кэссона при всех рассмотренных значениях параметра β скорость жидкости уменьшается с увеличением показателя степени n . Толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением параметра жидкости Кэссона β . При $n = 1$ с увеличением параметра β скорость жидкости уменьшается. Наименьшая скорость соответствует скорости ньютоновской жидкости ($\beta = \infty$). Данный результат совпадает с результатом, полученным в работе [16].

Поскольку два полученных численных решения различаются незначительно, для их оценки целесообразно ввести величину δ :

$$\delta = -f''(0) + \int_0^{\infty} \left(f(\eta)f''(\eta) - \frac{2n}{n+1} f'^2(\eta) \right) d\eta. \quad (9)$$

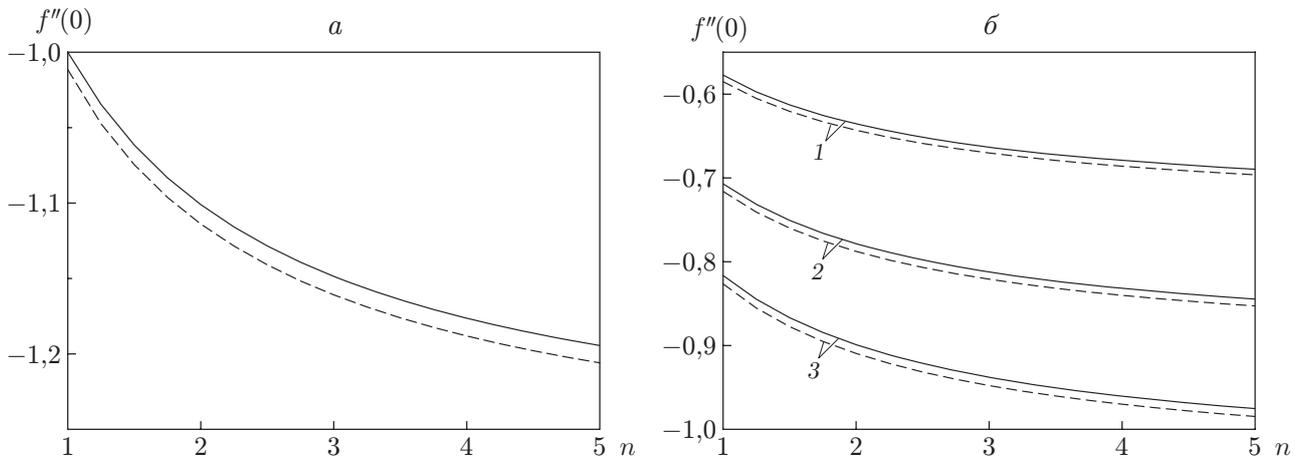


Рис. 1. Зависимости $f''(0)$ от показателя степени n в случае ньютоновской жидкости (а) и жидкости Кэссона (б): сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; 1 — $\beta = 0,5$, 2 — $\beta = 1,0$, 3 — $\beta = 2,0$

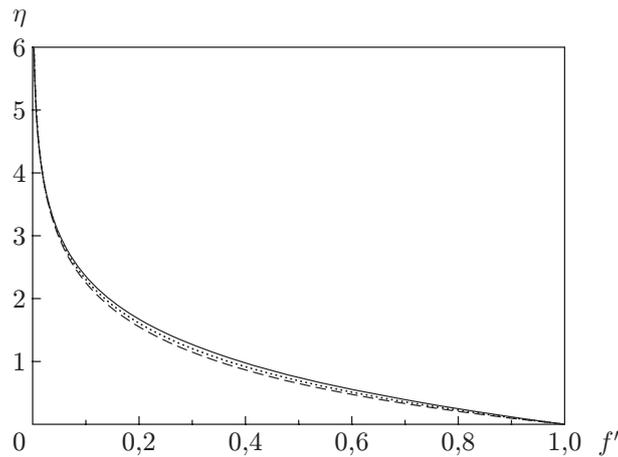


Рис. 2. Зависимость скорости ньютоновской жидкости f' от параметра η при различных значениях показателя степени n : сплошная линия — $n = 0,5$, пунктирная — $n = 1,0$, штриховая — $n = 2,0$

Выражение в правой части (9) получено путем интегрирования уравнения (5) (для случая ньютоновской жидкости ($\beta = \infty$)) по переменной η от 0 до ∞ . Значения δ при $n = 1,0; 1,5; 2,0$ приведены в табл. 3.

Заключение. Исследовано течение пограничного слоя жидкости Кэссона вдоль растягиваемой по степенному закону пленки. Получено два решения задачи как при линейном законе растяжения, так и при нелинейном.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. При всех значениях показателя степени n существует два решения как в случае ньютоновской жидкости, так и в случае жидкости Кэссона. С увеличением параметра жидкости Кэссона β толщина пограничного слоя уменьшается. С увеличением показателя степени n абсолютная величина напряжения сдвига увеличивается. Для жидкости Кэссона абсолютная величина напряжения сдвига меньше, чем для ньютоновской. С увеличением показателя степени n скорость жидкости уменьшается как для ньютоновской жидкости, так и для жидкости Кэссона.

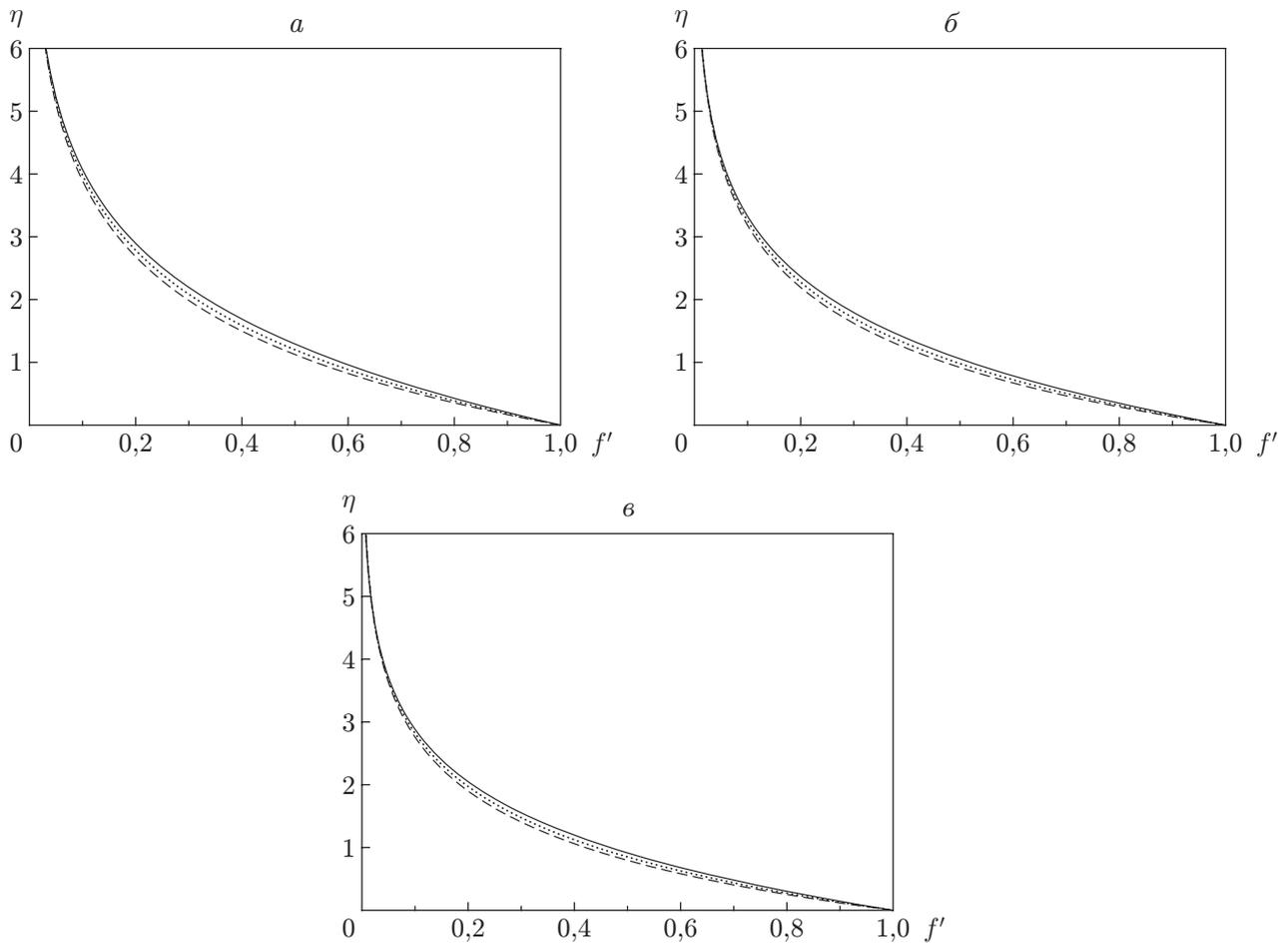


Рис. 3. Зависимость скорости жидкости Кэссона f' от параметра η при различных значениях параметра β и показателя степени n :
a — $\beta = 0,5$, *б* — $\beta = 1,0$, *в* — $\beta = 2,0$; сплошные линии — $n = 0,5$, пунктирные — $n = 1,0$, штриховые — $n = 2,0$

Таблица 3

Отклонение решений, полученных для жидкости Кэссона,
от решений, полученных для ньютоновской жидкости

n	δ							
	$\eta_\infty = 10$		$\eta_\infty = 15$		$\eta_\infty = 25$		$\eta_\infty = 50$	
	Единственное решение	Двойное решение						
1,0	0,000 045	-0,006 394	0	-0,004 534	0	-0,001 131	0	-0,000 070
1,5	0,000 051	-0,007 231	0	-0,004 200	0	-0,000 679	0	-0,000 010
2,0	0,000 054	-0,007 641	0	-0,003 921	0	-0,000 491	0	-0,000 003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mukhopadhyay S.** Effects of thermal radiation on Casson fluid flow and heat transfer over an unsteady stretching surface subjected to suction/blowing // Chinese Phys. B. 2013. V. 22, N 11. 114702.
2. **Vajravelu K., Rollins D.** Hydromagnetic flow of a second grade fluid over a stretching sheet // Appl. Math. Comput. 2004. V. 148. P. 783–791.
3. **Hayat T., Awais M., Qasim M., Hendi A. A.** Effects of mass transfer on the stagnation point flow of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 3777–3782.
4. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A., Alhothuali M. S.** Three dimensional flow of Oldroyd-B fluid over surface with convective boundary conditions // Appl. Math. Mech. (English Ed.). 2013. V. 34, N 4. P. 489–500.
5. **Nadeem S., Zaheer S., Fang T.** Effects of thermal radiation on the boundary layer flow of a Jeffrey fluid over an exponentially stretching surface // Numer. Algorithms. 2011. V. 57, iss. 2. P. 187–205. DOI: 10.1007/s11075-010-9423-8.
6. **Nadeem S., Mehmood R., Akbar N. S.** Optimized analytical solution for oblique flow of a Casson-nano fluid with convective boundary conditions // Intern. J. Thermal Sci. 2014. V. 78. P. 90–100.
7. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55. P. 744–746.
8. **Nadeem S., Hussian S. T.** Heat transfer analysis of Williamson fluid over exponentially stretching surface // Appl. Math. Mech. (English Ed.). 2014. V. 35, N 4. P. 489–502.
9. **Vajravelu K.** Vicious flow over a non-linear stretching sheet // Appl. Math. Comput. 2001. V. 124. P. 281–285.
10. **Vajravelu K., Cannon J. R.** Fluid flow over a nonlinear stretching sheet // Appl. Math. Comput. 2006. V. 181. P. 609–618.
11. **Mukhopadhyay S.** Casson fluid flow and heat transfer over a nonlinearly stretching surface // Chinese Phys. B. 2013. V. 22, N 7. 074701.
12. **Bhattacharyya K.** Heat transfer in boundary layer stagnation-point flow towards a shrinking sheet with non-uniform heat flux // Chinese Phys. B. 2013. V. 22, N 7. 074705.
13. **Bhattacharyya K., Layek G. C.** Effects of suction/blowing on steady boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet with thermal radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54, N 1–3. P. 302–307.
14. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Soret and Dufour effects on magnetohydrodynamics (MHD) flow of Casson fluid // Appl. Math. Mech. (English Ed.). 2012. V. 33, N 10. P. 1301–1312.
15. **Patil P. M., Roy S., Chamka Ali J.** Mixed convection flow over a vertical power law stretching sheet // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2010. V. 20, N 4. P. 445–458.
16. **Mahapatra T. R., Nandy S. K., Vajravelu K., Van Gorder R. A.** Stability analysis of fluid flow over a nonlinearly stretching sheet // Arch. Appl. Mech. 2011. V. 81, N 8. P. 1087–1091.
17. **Mahapatra T. R., Nandy S. K., Vajravelu K., Van Gorder R. A.** Stability analysis of the dual solutions for stagnation-point flow over a non-linearly stretching surface // Meccanica. 2012. V. 47, N 7. P. 1623–1632.

*Поступила в редакцию 6/VII 2014 г.,
в окончательном варианте — 20/IV 2016 г.*