где $L = H(\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\theta - 1)$; H — высота клина. Из полученного соотношения видно, что краевые эффекты значительно искажают характер поведения коэффициента эрозии при его осреднении, так как u_∞ и θ влияют на значение $\eta(\xi)$ в краевой точке $\xi = L$ (фиг. 5, линии *1—3* соответствуют $n = 0$; 0,5; 1). Таким образом, измерения необходимо проводить либо на очень длинных клиньях ($L \gg l_p$), либо на коротких ($L \ll l_p$).

Как следует из результатов, приведенных на фиг. 3, *а*, *б*, клин затупляется при эрозии. Угол наклона поверхности клина в окрестности передней кромки определяется из соотношения $\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta\left[1 + \frac{\dot{x}_0 t}{l_p}(2+\varepsilon)\times\right.$ $\left.\times(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\theta)\right]$. Возмущение параметров газового потока будет мало, если $\theta_1 - \theta \ll \theta$. Это имеет место при условии $\tau = \dot{x}_0 t/l_p \ll 1$, поэтому погрешность линейной теории имеет порядок $O(\tau^2)$. Уравнение (3.4), таким образом, имеет вид

$$h(y, t) = h(y, 0) + [l_p(1-\eta)^3/(1-(1-\varepsilon)\eta)]\tau + l_p O(\tau^2),$$

где явным образом указана точность использованного приближения.

Поступила 6 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grant G., Tabakoff W.** Erosion prediction in turbomachinery from environmental solid particles.— J. Aircraft, 1975, vol. 12, p. 471.
2. **Шелдон Г. Л., Маджи Я., Кроу С. Т.** Эрозия трубы в газовом потоке, содержащем частицы.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, № 2.
3. **Laitone J. A.** Erosion prediction near a stagnation point resulting from aerodynamically entrained solid particles.— J. Aircraft, 1979, vol. 16, p. 809.
4. **Рафиков Р. В., Зауличный Е. Г. и др.** Численное исследование двухфазного течения в осесимметричном канале с учетом реальных механизмов разрушения его стенок.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1.
5. **Marble F.** Dynamics of dusty gases.— In: Ann. Rev. of Fluid Mech. Vol. 2. N. Y., 1970.
6. **Wakeman T., Tabakoff W.** Erosion behavior in a simulated jet engine environment.— J. Aircraft, 1979, vol. 16, p. 828.
7. **Шелдон Г. Л.** Сходства и различия в эрозионном поведении метериалов.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1970, № 3.
8. **Полежаев Ю. В.** Процесс установления эрозионного разрушения материала преграды при многократном соударении частицами.—ИФЖ, 1979, т. 37, № 3.
9. **Bryan G. M., Pugh E. M.** Cratering of lead oblique impacts of hypervelocity steel pellets.— J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, N 2.
10. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
11. **Салтанов Г. А.** Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск: Высшая школа, 1972.

УДК 532.529.5

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. И. Плаксин

(*Новосибирск*)

Известно, что жидкость с пузырьками газа является примером нелинейной диспергирующей среды, существование стационарных возмущений в ней обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов. При этом нелинейность газожидкостной смеси определяется гидродинамической нелинейностью, нелинейностью колебаний пузырьков и уравнения состояния жидкого компонента среды. Сжимаемость смеси зависит от сжимаемости ее жидкого и газового компонентов. В [1—3] получены стационарные решения системы уравнений для двухфазной среды, включающей нелинейное уравнение второго порядка типа уравнения Рэлея для одиночной полости. В этих работах предполагалось, что движение пузырьков относительно жидкости отсутствует, а их число в единице объема смеси постоянно. Кроме того, в [2] уравнения гидродинамики линейны, в [1] жидкий компонент среды несжимаем.

В данной работе получены стационарные решения полной системы нелинейных уравнений движения жидкости с пузырьками газа при единственном предположении: движение пузырьков относительно жидкости отсутствует. Дан их качественный анализ и выяснено влияние одновременного учета сжимаемости жидкого компонента среды и гидродинамической нелинейности.

Распространение волн в жидкости с пузырьками газа рассматривается в рамках двухфазной модели, предложенной в [4, 5]. Согласно этой модели, движение двухфазной среды с точностью до первого порядка по объемной концентрации газа k описывается уравнениями сохранения массы, импульса, числа пузырьков и энергии. Эти уравнения в одномерном случае можно представить в виде

$$\partial\bar{\rho}/\partial t + \partial(\bar{\rho}u)/\partial x = 0,\ \partial(\bar{\rho}u)/\partial t + \partial(p + \bar{\rho}u^2)/\partial x = 0,$$

$$\partial N/\partial t + \partial(Nu)/\partial x = 0,\ \bar{\rho} = (1 - k)\rho,\ k = 4\pi NR^3/3, \tag{1}$$

$$Rd^2R/dt^2 + (3/2)(dR/dt)^2 = [p_0(R_0/R)^{3\gamma} - p]/\rho(p_0),$$

где $\bar{\rho}$, u, p — плотность, скорость и давление среды; ρ — плотность жидкого компонента среды; p_0, c_0 — равновесные значения давления и скорости звука в чистой жидкости; R_0, k_0 — равновесные значения радиуса пузырька и объемной концентрации газа; R — текущий радиус пузырька; N — число пузырьков в единице объема; γ — показатель адиабаты для газа в пузырьке; $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$.

Введем безразмерные переменные $t' = t\omega_0$, $x' = x\omega_0/c_0$, $u = u'c_0$, $p = p'\rho_0c_0^2$, $p_0 = p_0'\rho_0c_0^2$, $V = (R/R_0)^3$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}'\rho_0$, $\omega_0^2 = 3\gamma p_0/\rho_0R_0^2$, $\rho_0 = \rho(p_0)$ (в дальнейшем штрихи опускаем). При этом уравнение Тэта [6] принимает вид $p - p_0 = (\rho^n - 1)/n$, где n — показатель адиабаты для жидкости. Такой подход дает возможность при $n = 1$ получить линейное уравнение состояния, т. е. рассмотреть акустическое приближение. При $n = 7{,}15$ имеем нелинейное уравнение состояния жидкости. Систему уравнений (1) ввиду наличия в ней нелинейных конвективных членов удобно рассматривать в лагранжевых координатах. Эта система после перехода к массовой лагранжевой координате ξ принимает вид

$$\partial\bar{\rho}/\partial t + \bar{\rho}^2\partial u/\partial\xi = 0,\ \partial u/\partial t + \partial p/\partial\xi = 0; \tag{2}$$

$$\partial k/\partial t + k\bar{\rho}\partial u/\partial\xi = (3k/R)\partial R/\partial t,\ \bar{\rho} = (1 - k)\rho; \tag{3}$$

$$\partial^2V/\partial t^2 - (V^{-1}/6)(\partial V/\partial t)^2 = V^{1/3}(V^{-\gamma} - p/p_0)/\gamma. \tag{4}$$

Будем рассматривать стационарные решения системы (2)—(4), т. е. решения, зависящие от $\eta = \xi - ct$, где c — некоторая постоянная, равная скорости (в единицах c_0) перемещения искомого возмущения в среде. Для стационарных решений из (2), (3) следуют уравнения, связывающие все искомые величины с объемом пузырька V:

$$c(u - u_e) = p - p_e,\ k = m\rho V/(1 + m\rho V); \tag{5}$$

$$p/c^2 + (1 + n(p - p_0))^{-1/n} = B - mV, \tag{6}$$

где u_e, p_e, а также k_e, V_e — заданное состояние среды при некотором фиксированном значении $\eta = \eta_e$. Значения величин m и B, вычисленные по заданному состоянию среды, равны $m = k_e/((1 - k_e)V_e\rho_e)$, $B = p_e/c^2 + 1/\rho_e + k_e/((1 - k_e)\rho_e)$, где $\rho_e = (1 + n(p_e - p_0))^{1/n}$. Отметим, что m и B на фиксированном решении являются постоянными, т. е. значения этих величин, вычисленные по состояниям среды в произвольных точках установившейся волны, соответствующей этому решению, совпадают. Соотношения (5), (6) определяют для стационарных решений множество возможных состояний среды, в которые может перейти заданное состояние.

Функция $V(p)$, определяемая уравнением (6), имеет при $p = p_m$, где $p_m = p_0 + (c^{2n/(n+1)} - 1)/n$, максимум V_m, причем $dV/dp < 0$ при $p > p_m$ и $dV/dp > 0$ при $p < p_m$. Обратная функция $p(V)$ определена при $0 < V \leqslant V_m$ и имеет две ветви: правую и левую, на которых соответственно $p \geqslant p_m$ и $p \leqslant p_m$. Величина p_e определяет ветвь функции $p(V)$, на которой находится заданное состояние среды. Для линейного уравнения состояния жидкости ($n = 1$) эта функция имеет явный вид

$$p(V) = p_0 + (\rho_e + c^2/\rho_e - c^2m(V - V_e) \pm \sqrt{(\rho_e + c^2/\rho_e - c^2m(V - V_e))^2 - 4c^2} - 2)/2,$$

причем правой ветви соответствует знак плюс, а левой — минус. Сравним нелинейную зависимость $V(p)$ (6), соответствующую акустическому приближению для жидкого компонента среды, с аналогичными зависимостями, полученными в [1—3]. Уравнения гидродинамики в [1] нелинейны, а жидкий компонент среды является несжимаемым. В этом случае связь V с p является линейной, причем для всех значений c $dV/dp<0$. Если уравнения гидродинамики линейны, а жидкий компонент среды является сжимаемым, то, как показано в [2], связь V с p является тоже линейной. Зависимость объема пузырька от давления, аналогичная полученной в [2], следует из линейного уравнения (2) и имеет вид

$$V - V_e = (p - p_e)(c^2 - 1)/c^2m. \tag{7}$$

В плоскости переменных p, V прямая (7) касается кривой (6) в точке (p_e, V_e) только при $p_e = p_0$. Для других значений p_e они пересекаются в этой точке. Пусть $c^2 > 1$. Тогда для $p_e < p_m$ $\left(c_e^2 < c^2,\ c_e^2 = (1 + n(p_e - p_0))^{(n+1)/n}\right)$ знаки производных dV/dp зависимостей (6), (7) при $p = p_e$ совпадают. Если $p_e \geqslant p_m$ $\left(c^2 \leqslant c_e^2\right)$, то знаки этих производных различны, т. е. в отличие от (7) в (6) с увеличением давления объем пузырька убывает. Аналогичное различие в поведении пузырька с изменением давления имеет место и для $c^2 < 1$ при $p_e \leqslant p_m$. Для $c^2 = 1$ не существует зависимости объема пузырька от давления (7), а также стационарных решений, отличных от тривиального, для которого $\dot{V} = dV/d\eta = 0$. В нелинейном случае стационарные решения могут существовать и при $c^2 = 1$. В отличие от [1, 2] при фиксированном значении скорости c знак производной dV/dp зависимости (6) может меняться, т. е. если существует стационарное решение, в котором p принимает значение больше и меньше p_m, то для этого решения с увеличением давления объем пузырька может как возрастать, так и убывать в зависимости от того, $p < p_m$ или $p > p_m$. Кроме того, в отличие от [2] ограничение на величину объема пузырька $V \leqslant V_m$ следует не из условия малости акустического числа Маха, а есть следствие нелинейности уравнений гидродинамики и сжимаемости жидкого компонента среды. Таким образом, сравнение (6) с аналогичными зависимостями $V(p)$, полученными в [1, 2], показывает, что учет гидродинамической нелинейности и сжимаемости жидкости может привести не только к количественным, но и к качественным изменениям стационарных решений. Отметим, что в [3] для стационарных решений получена связь V с p с учетом гидродинамической нелинейности и сжимаемости жидкости, рассматриваемой в акустическом приближении, однако, как и в [2], она является линейной и имеет вид (7).

Введем величины $V' = V/V_e$, $m' = mV_e$ (штрихи вновь опускаем). Из уравнения (4) для $V(\eta)$ следует первый интеграл

$$V^{-1/3}\dot{V}^2 = \beta^2(U(V) + H), \tag{8}$$

где $U(V) = -mp_0\left(V_e^{-\gamma}\left(V^{1-\gamma} - 1\right) + (\gamma - 1)(V - 1)\right)/(\gamma - 1) + (p - p_e) \times$ $\times (p + p_e - 2p_0)/2c^2 - \left[(p - p_0 + 1)(1 + n(p - p_0))^{-1/n} - (p_e - p_0 + 1)(1 + n(p_e - p_0))^{-1/n}\right]/(n - 1)$;

$\beta^2 = 2/c^2m\gamma p_0V_e^{2/3}$; $H = \dot{V}_e^2/\beta^2$; $\dot{V}_e = dV/d\eta$ при $\eta = \eta_e$;

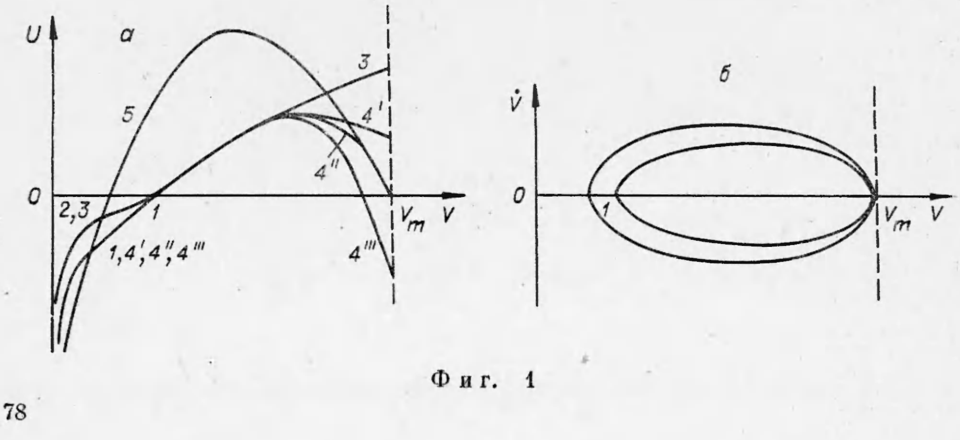
$p(V)$ определяется соотношением (6) (при $n = 1$ последний член $U(V)$ принимает вид $-[\ln(1 + p - p_0) + 1/(1 + p - p_0) - \ln(1 + p_e - p_0) - 1/(1 + p_e - p_0)]$). Таким образом, изучение установившихся волн в жидкости с пузырьками газа сведено к исследованию решений уравнения (8). Выясним существование ограниченного решения этого уравнения при фиксированном значении c для заданного состояния среды p_e, V_e, k_e, $\dot{V}_e$. Правая часть уравнения (8) описывает семейство кривых, зависящих от параметров m, p_e, V_e, c, H. Решение (8) может существовать для тех участков кривых, для которых величина $U(V) + H$ неотрицательна. Эту совокупность кривых будем изучать качественными методами. Для этого надо знать вид функции $U(V)$ иа интервале $(0, V_m]$ в зависимости от параметров p_e, V_e, m, c. Эта функция, производная которой имеет вид

$$U'(V) = m\left(p_0 V_e^{-\gamma} V^{-\gamma} - p(V)\right), \tag{9}$$

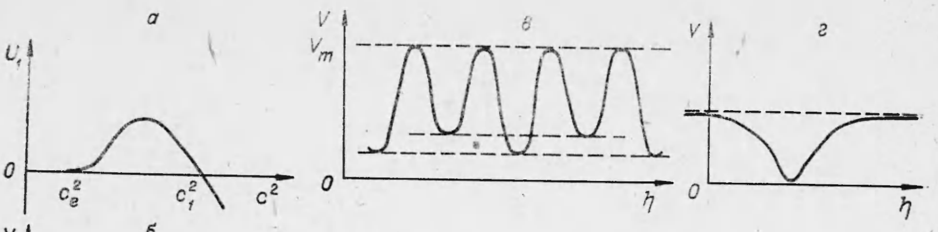
обладает на рассматриваемом интервале следующими свойствами: $U(1) = 0$, $U''(V) < 0$ для левой ветви $p(V)$, для правой ветви $U''(V)$ с ростом V монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞. Найдем условия, при которых в точке (p_m, V_m) плоскости переменных p, V происходит переход с одной ветви функции $p(V)$ на другую. В отличие от стремления к простому корню непостоянное решение уравнения (8) стремится к значению двойного корня функции $U(V) + H$ только асимптотически при $\eta \to \infty$ или при $\eta \to -\infty$. Чтобы максимальное значение объема пузырька $V_m = V(\eta_m)$ было равно точному значению непостоянного интеграла (8), необходимо $U(V_m) + H = 0$. Раскрывая неопределенность $(U(V_m) + H)/(dV(p_m)/dp)^2$, находим, что $V^{-1/3}\dot{p}^2$ стремится к величине $-\beta^2 mc^{2(2n+1)/(n+1)}\, U'(V_m)/(2n+2)$ при $\eta \to \eta_m$ $(V \to V_m,\ p \to p_m)$. Поэтому, если V_m — простой корень $(U'(V_m) < 0)$, то в момент $\eta = \eta_m$ в точке (p_m, V_m) плоскости переменных p, V происходит переход с одной ветви функции $p(V)$ на другую. При этом $\ddot{V}(\eta)$ непрерывна при $\eta = \eta_m$, так как пределы $U'(V)$ при стремлении V к V_m по левой и правой ветвям совпадают. Если V_m — двойной корень $(U'(V_m) = 0)$, то $V \to V_m$, $p \to p_m$, $\dot{p} \to 0$ асимптотически при $\eta \to \eta_m$, $\eta_m = \infty$ или $\eta_m = -\infty$.

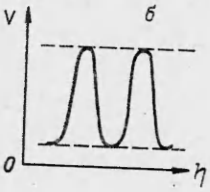
Очевидно, что $U'(1) > 0$ при $p_e \leqslant 0$, $0 < V_e < \infty$. Кроме того, для любого фиксированного значения $p_e > 0$ существует единственное $\overline{V}_e$ такое, что $U'(1) > 0$ при $V_e < \overline{V}_e$, $U'(1) = 0$ при $V_e = \overline{V}_e$ и $U'(1) < 0$ при $V_e > \overline{V}_e$. Для изучения функции $U(V)$ удобно все множество параметров p_e, V_e разбить на подмножества: $p_e \leqslant 0$, $0 < V_e < \infty$; $p_e > 0$, $V_e > \overline{V}_e$; $p_e > 0$, $V_e = \overline{V}_e$; $p_e > 0$, $V_e < \overline{V}_e$. При этом фиксированное значение k_e является произвольным в рамках ограничений рассматриваемой модели. Ветвь функции $p(V)$, соответствующая заданному состоянию среды, определяется соотношением между величинами c^2 и c_e^2. Поэтому качественный вид функции $U(V)$ для заданных величин p_e, V_e будем изучать в трех случаях, которые соответствуют следующим изменениям c^2: $c^2 < c_e^2$, $c^2 = c_e^2$, $c^2 > c_e^2$. Перейдем к рассмотрению указанных выше множеств параметров p_e, V_e.

Пусть $p_e \leqslant 0$, $0 < V_e < \infty$, т. е. $U'(1) > 0$. Пользуясь свойствами $U(V)$, убеждаемся, что для рассматриваемого множества p_e, V_e качествен-



Фиг. 1

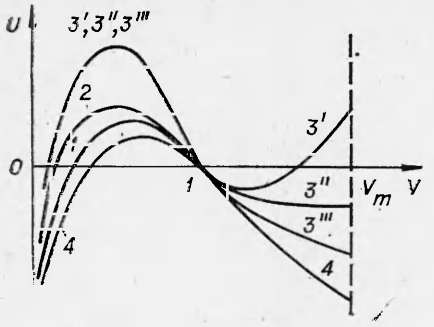




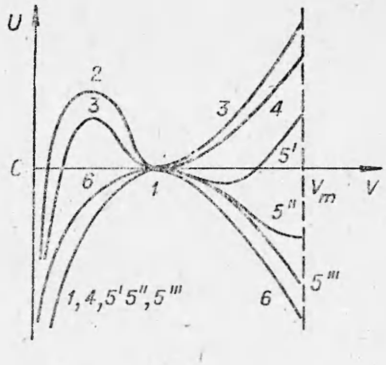
Фиг. 2

ный вид этой функции будет таким, каким он изображен на фиг. 1, *а*. Кривые *1*, *2* соответствуют левой и правой ветвям $p(V)$ для $c^2 = c_e^2$, причем $0 < V \leqslant 1$, $V_m = 1$. Для $c^2 < c_e^2$ при $1 \leqslant V \leqslant \leqslant V_m$ $U'(V) > 0$, так как при $p_m \leqslant p \leqslant p_e$ имеет место очевидное неравенство $p_0 V_e^{-\gamma} V^{-\gamma} - p > 0$. График $U(V)$ для $c^2 < c_e^2$ показан кривой *3*. При $c^2 > c_e^2$ вид $U(V)$ в зависимости от значения c показан кривыми *4′*, *4″*, *4‴*. Для $c^2 > c_e^2$ связь V с p осуществляется левой ветвью $p(V)$, для которой $U''(V) < 0$. Поэтому для существования решения (8) достаточно, чтобы $U_1(c^2) = U(V_m(c^2)) \leqslant 0$. Вид этой функции, производная которой $dU_1/dc^2 = \left(c_e^{2n/(n+1)} - c^{2n/(n+1)}\right) \times \left[2p_0\left(1 - V_e^{-\gamma} V_m^{-\gamma}\right) + \left(c_e^{2n/(n+1)} + c^{2n/(n+1)} - 2\right)/n\right]/2nc^4$, схематично изображен на фиг. 2, *а*. Можно показать, что для заданного состояния p_e, V_e, k_e существует единственное значение $c_1^2 > (1 - np_0)^{(n+1)/n}$ такое, что при $c^2 \geqslant c_1^2$ имеет место неравенство $U(V_m(c^2)) \leqslant 0$. Таким образом, при $c^2 < c_1^2$ для рассматриваемых величин p_e, V_e, k_e и произвольных значений $\dot{V}_e(H)$ решения уравнения (8) не существует. При любом фиксированном значении $c^2 \geqslant c_1^2$ область допустимых значений H, при которых для заданных величин p_e, V_e, k_e существует решение (8), определяется неравенством $0 \leqslant H \leqslant -U_1(c^2)$. При $0 \leqslant H < -U_1(c^2)$ решение (8) является периодическим, причем связь V с p осуществляется левой ветвью $p(V)$. Качественный вид этого решения показан на фиг. 2, *б*. При $H = -U_1(c^2)$, ввиду того что $U'(V_m) < 0$, в плоскости переменных p, V происходит переход с одной ветви $p(V)$ на другую. При этом в фазовой плоскости (см. фиг. 1, *б*) в точке $V = V_m$, $\dot{V} = 0$ происходит переход с одной фазовой траектории, соответствующей одной из ветвей $p(V)$, на другую фазовую траекторию, которая соответствует другой ветви. График $U(V)$, для которой связь V с p осуществляется правой ветвью $p(V)$, показан на фиг. 1, *а* кривой *5*. При $H = -U_1(c^2)$ решение тоже является периодическим. Вид этого решения схематично изображен на фиг. 2, *в*. Для этого решения в отличие от решения, приведенного на фиг. 2, *б*, характерно то, что захлопывание и расширение пузырька в течение периода происходят дважды. Одно из захлопываний происходит в момент максимального давления в среде, а второе — в фазе разрежения в силу инерционных свойств присоединенной массы пузырька. Таким образом, для $p_e \leqslant 0$, $0 < V_e < \infty$ и произвольных значений k_e, $\dot{V}_e$ решения (8) при $c^2 \leqslant (1 - np_0)^{(n+1)/n}$ не существует. Отсюда следует, что для стационарных решений, скорости которых $c^2 \leqslant (1 - np_0)^{(n+1)/n}$, давление удовлетворяет неравенству $p - p_0 > -p_0$, минимальная величина звукового давления в среде, по которой распространяются стационарные возмущения со скоростями из указанного диапазона, равна $-p_0$.

Пусть $p_e > 0$, $V_e > \overline{V}_e$, т. е. $U'(1) < 0$. Для данного множества параметров p_e, V_e вид $U(V)$ показан на фиг. 3. Кривые *1*, *2* соответствуют левой и правой ветвям $p(V)$ для $c^2 = c_e^2$. Решение для этого значения скорости существует при $H = 0$, при этом $V_m = 1$. Вид его качественно совпадает с решением, изображенным на фиг. 2, *в*. Для $c^2 < c_e^2$ вид $U(V)$ показан в зависимости от значения c кривыми *3′*, *3″*, *3‴*. Из свойств функции



Фиг. 3



Фиг. 4

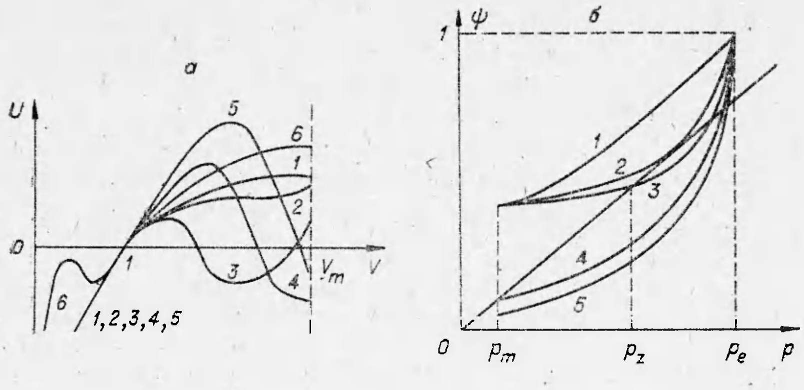
$U(V)$ видно, что для тех c, при которых $U'(V_m(c^2)) \geqslant 0$ (кривые $3'$, $3''$), существует единственное значение $V_1 \in (1,\ V_m]$ такое, что $U'(V_1) = 0$. Для этих значений c при $0 \leqslant H < -U(V_1)$ решение (8) является периодическим, качественно совпадающим с изображенным на фиг. 2, *б*. При $H = -U(V_1)$ решение имеет вид солитона (фиг. 2, *г*). При $H > -U(V_1)$ уравнение (8) для указанных значений c решения не имеет. Для значений c, при которых $U'(V_m(c^2)) < 0$ (кривая $3'''$), при $0 \leqslant H < -U(V_m)$ $(H = -U(V_m))$ решение является периодическим, качественно совпадающим с изображенным на фиг. 2, *б*, (фиг. 2, *в*). Для $c^2 > c_e^2$ вид $U(V)$ показан кривой *4*. Для этих значений c при $0 \leqslant H < -U(V_m)$ $(H = -U(V_m))$ решение является периодическим, схематичный вид его приведен на фиг. 2, *б* (фиг. 2, *в*).

Пусть $p_e > 0$, $V_e = \overline{V}_e$, т. е. $U'(1) = 0$. Для этого множества параметров p_e, V_e вид $U(V)$ приведен на фиг. 4. Отметим, что для рассматриваемых значений p_e, V_e правая часть уравнения (4) равна нулю. Кривые *1*, *2* соответствуют левой и правой ветвям $p(V)$ для $c^2 = c_e^2$. Решение, отвечающее правой ветви, является солитоном, качественно совпадающим с изображенным на фиг. 2, *г*. При этом $\eta_e = \infty$ или $\eta_e = -\infty$, $H = 0$. Решения, отвечающего левой ветви, не существует. Для $c^2 < c_e^2$ вид $U(V)$ в зависимости от значения c показан кривыми *3*, *4*, $5'$, $5''$, $5'''$. При $c_*^2 < c^2 < c_e^2$, $c_*^2 = \gamma p_e c_e^2/(\gamma p_e + m c_e^2)$ $(U''(1) > 0$, кривая *3*) решение является солитоном, причем $H = 0$, $\eta_e = \infty$ или $\eta_e = -\infty$. Для $c^2 = c_*^2$ $(U''(1) = 0$, кривая *4*) решения не существует. При $c^2 < c_*^2$ $(U''(1) < 0$, кривые $5'$, $5''$, $5'''$) решение существует при $H > 0$. Дальнейшее исследование при $c^2 < c_*^2$ проводится аналогично случаю $p_e > 0$, $V_e > \overline{V}_e$ (кривые $3'$, $3''$, $3'''$ на фиг. 3). Для $c^2 > c_e^2$ (кривая *6*) решение при $0 < H < -U(V_m)$ $(H = -U(V_m))$ является периодическим, качественно совпадающим с изображенным на фиг. 2, *б* (фиг. 2, *в*).

Пусть $p_e > 0$, $V_e < \overline{V}_e$, т. е. $U'(1) > 0$ $(V_e^\gamma p_e/p_0 < 1)$. Исследование существования решения для $c^2 \geqslant c_e^2$ проводится аналогично случаю $p_e \leqslant 0$ (кривые *1*, *2*, $4'$, $4''$, $4'''$, фиг. 1, *а*). При $c^2 < c_e^2$ вид $U(V)$ показан на фиг. 5, *а*. Неравенство $U'(V(p)) \geqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$pV_e^\gamma/p_0 \leqslant \psi(p), \tag{10}$$

где $\psi(p) = (1 + ((p_e - p)/c^2 + (1 + n(p_e - p_0))^{-1/n} - (1 + n(p - p_0))^{-1/n})/m)^{-\gamma}$, функция $\psi(p)$ на интервале $[p_m,\ p_e]$ монотонно возрастает. Кроме того, $\psi(p_e) = 1$, $\psi'(p_m) = 0$, $\psi''(p) > 0$. Если $\psi'(p_e) \leqslant V_e^\gamma/p_0$, то неравенство (10) справедливо для всех $p \in [p_m,\ p_e]$. Неравенство $\psi'(p_e) \leqslant V_e^\gamma/p_0$ имеет место при $c^2 \geqslant c_2^2$, $c_2^2 = c_e^2/(1 + m c_e^2 V_e^\gamma/\gamma p_0)$. Для этих значений скорости вид $U(V)$ показан кривой *6* на фиг. 5, *а*. Для рассматриваемых значений p_e, V_e при $c_2^2 \leqslant c^2 < c_e^2$ решения не существует. Пусть $c^2 < c_2^2$, т. е. $\psi'(p_e) > V_e^\gamma/p_0$. Для фиксированного значения c производная



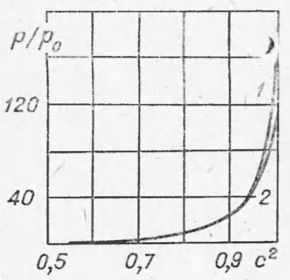
Ф и г. 5

$U'(V_m(c^2))$ может быть больше, равна или меньше нуля. Рассмотрим каждый из этих случаев. Пусть $U'(V_m(c^2)) > 0$ $\left(\psi(p_m) > p_m V_e^\gamma/p_0\right)$. В этом случае из свойств функции $\psi(p)$ следует, что существует единственное значение $p_\xi \in [p_m, p_e]$ такое, что $\psi'(p_\xi) = V_e^\gamma/p_0$. Вид $\psi(p)$ в зависимости от значений p_e, V_e, k_e показан на фиг. 5, *б* кривыми *1—3*. Какая из этих кривых соответствует заданному состоянию среды, определяется соотношением между величинами $\psi(p_\xi)$ и $V_e^\gamma p_\xi/p_0$. Если $\psi(p_\xi) \geqslant V_e^\gamma p_\xi/p_0$, то имеют место кривые *1*, *2*, которые лежат выше прямой pV_e^γ/p_0. Тогда $U'(V(p)) \geqslant 0$ на $[1, V_m]$, а вид $U(V)$ соответствует кривым *1*, *2* на фиг. 5, *а*. Решения в этом случае не существует. Если $\psi(p_\xi) < V_e^\gamma p_\xi/$ $/p_0$, то имеет место кривая *3* (фиг. 5, *б*). В этом случае для существования решения необходимо определить знак $U(V(p_z))$ (фиг. 5, *б*). Если $U(V(p_z)) \leqslant 0$, то при $0 \leqslant H < -U(V(p_z))$ решение является периодическим (фиг. 2, *б*), а при $H = -U(V(p_z))$ решение имеет вид солитона (фиг. 2, *г*). Вид $U(V)$ в этом случае показан кривой *3* на фиг. 5, *а*. Если $U(V(p_z)) > 0$, то решения уравнения (8) не существует. Пусть $U'(V_m(c^2)) = 0$ $(\psi(p_m) = p_m V_e^\gamma/p_0)$. Вид $U(V)$ и $\psi(p)$ для этого значения показан на фиг. 5, *а*, *б* соответственно кривыми *4*. Для существования решения достаточно, чтобы $U(V_m(c^2)) \leqslant 0$. При $0 \leqslant H < -U(V_m)$ решение является периодическим (фиг. 2, *б*), а при $H = -U(V_m)$ имеет место солитон (фиг. 2, *г*). Пусть $U'(V_m(c^2)) < 0$ $(\psi(p_m) < p_m V_e^\gamma/p_0)$. Для этих значений c вид функций $U(V)$ и $\psi(p)$ показан кривыми *5* соответственно на фиг. 5, *а*, *б*. Для существования решения достаточно $U(V_m(c^2)) \leqslant 0$. Тогда при $0 \leqslant H < -U(V_m)$ $(H = -U(V_m))$ решение качественно совпадает с изображенным на фиг. 2, *б* (фиг. 2, *в*).

Таким образом, можно определить существование и качественный вид стационарного возмущения с произвольной фиксированной скоростью для заданного состояния среды. При этом решение (8) для тех значений p_e, V_e, k_e, $\dot{V}_e$ и c, при которых оно существует, записывается в неявной форме:

$$\beta\eta - \beta\eta_e = \pm \int_1^V y^{-1/6}\,(U(y) + H)^{-1/2}\,dy.$$

В заключение необходимо отметить особенности решений, связанных с влиянием нелинейности уравнения состояния жидкого компонента среды. В плоскости переменных p, V кривые (6), соответствующие линейному и нелинейному уравнению состояния жидкости, не совпадают. В частности, значения p_m при $c^2 \neq 1$ различны. Касательные к этим кривым в точке (p_e, V_e) имеют вид $m(V - V_e) = ((1 + p_e - p_0)^{-2} - c^{-2})(p - p_e)$, $m(V - V_e) = ((1 + n(p_e - p_0))^{-(n+1)/n} - c^{-2})(p - p_e)$. Видно, что при $p_e \neq$ $\neq p_0$ наклоны касательных различны. При $c^2 = 1$ это различие наиболее существенно. Поэтому решения, полученные с учетом и без учета нелиней-



Фиг. 6

ности уравнения состояния жидкости, могут отличаться друг от друга. Так, на фиг. 6 приведена зависимость амплитуды солитона от квадрата его скорости $(c_*^2 < c^2 \leqslant c_e^2)$. Кривая *1* соответствует линейному уравнению состояния жидкости, кривая *2* — нелинейному. Равновесное состояние среды при $\eta_e = +\infty$ имеет вид $p_e = 2p_0$, $V_e^{-\gamma} = p_e/p_0 = 2$, $k_e = 10^{-4}$, $\dot{V}_e = 0$, $\gamma = 1, 4$, $p_0 = 10^5$ Па$/\rho_0 c_0^2$. Видно, что для солитонов, квадраты скорости которых меньше 0,9, амплитуды для линейного и нелинейного уравнений состояния жидкости совпадают. При $c^2 > 0{,}9$ амплитуды существенно различны.

Таким образом, для одномерных стационарных возмущений получено точное решение нелинейных уравнений движения жидкости с пузырьками газа. При этом учет гидродинамической нелинейности и сжимаемости жидкого компонента среды приводит к расширению класса стационарных решений.

Автор выражает благодарность В. К. Кедринскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 28 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Когарко Б. С.** Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации.— ДАН СССР, 1964, т. 155, № 4.
2. **Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А.** Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1976, № 6.
3. **Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б.** О распространении волн произвольной амплитуды в газожидкостной смеси.— Акуст. журн., 1977, т. 23, № 4.
4. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1960, № 3.
5. **Иорданский С. В., Куликовский А. Г.** О движении жидкости, содержащей мелкие частицы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
6. **Коул Р.** Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.

УДК 541.182 : 532.7 : 539.219.3

ПРОБЛЕМА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В МНОГОФАЗНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Первушин

(Донецк)

Нестационарные явления переноса в многофазных средах во многом определяются кинетическими процессами на границах раздела. Простейшие идеализации, восходящие к временам Фурье и Фика, когда межфазовая кинетика задана граничными условиями типа

$$\partial n_i/\partial R = a_{ij}(n_i - n_j),$$

не в состоянии отразить основные черты процессов переноса, когда физические условия на поверхностях раздела существенно и быстро изменяются. Особенно это относится к задачам с подвижными границами, возникающим, например, при анализе кинетики фазовых превращений [1—5]. В сферическом варианте нестационарные эффекты заведомо обусловлены, в частности, лапласовским давлением, которое явно связано с законом движения границы $(\sim 1/R(t))$.

Дадим вывод общего типа граничной кинетики, основываясь на процессе одномерного переноса фиксированного компонента вещества через границу раздела R двух сред (фаз), которая является поверхностью раз-