УДК 539.3

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЛОПАТКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОМПРЕССОРА

## Х. С. Ли, Ю. Б. Лю, С. Хэ, Х. Д. Ли

Колледж энергетического машиностроения Военно-морского инженерного университета, 430033 Ухань, Китай E-mails: lihongsong\_mail@163.com, yongbaoliu@aliyun.com, hexing\_mail@163.com, lihaodong324@163.com

Изучается распространение полуэллиптической трещины, расположенной на всасывающей поверхности лопатки компрессора газовой турбины. С использованием аналитического выражения для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины установлено, что КИН увеличивается при увеличении глубины трещины и скорости вращения лопатки. С увеличением параметра эллиптичности и расстояния от трещины до оси вращения КИН уменьшается. Показано, что скорость увеличения КИН при увеличении глубины трещины зависит от параметра эллиптичности. Результаты вычислений, полученные с использованием численного метода и аналитического решения, различаются не более чем на 4 %. С помощью численного метода получены распределения коэффициента интенсивности напряжений на фронте полуэллиптической трещины при различных значениях ее глубины и параметра эллиптичности.

Ключевые слова: вращающаяся лопасть, полуэллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, весовая функция.

DOI: 10.15372/PMTF20200216

Введение. Вращающиеся лопасти компрессоров являются основными элементами газовых турбин, поэтому от их состояния существенно зависит производительность газовой турбины. При больших скоростях вращения и давлениях (особенно при циклическом нагружении) на поверхности лопасти образуются трещины преимущественно полуэллиптической формы. Процесс образования усталостной трещины в лопасти газовой турбины показан на рис. 1. Распространение полуэллиптической трещины, образовавшейся на всасывающей поверхности лопасти, приводит к разрушению лопасти. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) характеризует величину интенсивности напряжений в вершине трещины и определяет направление и величину силы, под действием которой распространяется трещина. Поэтому вычисление КИН полуэллиптической трещины необходимо для определения направления и скорости роста трещины, а следовательно, срока эксплуатации лопасти.



Рис. 1. Образование усталостной трещины во вращающейся лопасти: УТ — область, в которой образуется усталостная трещина

В основе исследования механики разрушения лежат аналитические методы (методы теории функций комплексной переменной, метод интегральных преобразований, метод весовых функций (МВФ)) [1]. В работе [2] с помощью МВФ получены решения задач для случая нескольких двумерных трещин. С использованием двумерного МВФ в работе [3] предложен эффективный трехмерный МВФ для решения задач о распространении поверхностной трещины в пластине, подвергаемой действию растягивающей и изгибающей нагрузок. Результаты, полученные с помощью этого метода, хорошо согласуются с результатами, полученными методом конечных элементов [4]. В [5] с использованием решения Неймана и МВФ вычислен КИН при распространении трещины. Результаты, полученные с помощью аналитического решения, согласуются с экспериментальными данными. В [6] МВФ использован для вычисления КИН в точках, находящихся как на дне, так и на поверхности продольной полуэллиптической І-образной трещины, расположенной на внутренней поверхности толстостенного цилиндра. Вычисленное с использованием МВФ поле напряжений при наличии нескольких трещин сравнивалось с полем напряжений, вычисленным с помощью МКЭ. МВФ широко применяется при исследовании задач о распространении трещин, что обусловлено его универсальностью, точностью и простотой применения. В работе [7] с использованием МВФ получено выражение для КИН в вершине трещины, расположенной на лопасти, вращающейся с большой скоростью. В работах [8, 9] в качестве упрощенной модели лопасти используется пластина конечной ширины. В [8, 9] с помощью МВФ получены зависимости КИН в вершинах односторонней, двусторонней и центральной трещин, расположенных в пластине, от положения трещины, ее длины, а также от скорости и ускорения вращения пластины. С использованием решения Раджу — Неймана [10] в работе [11] вычислен КИН и с помощью МКЭ определены изгибные напряжения в реальной лопасти.

Для вычисления КИН в реальных конструкциях сложной формы часто используются численные методы: метод конечных элементов и метод граничных элементов. В работе [12] вычислены КИН полуэллиптической трещины, расположенной в теле конечных размеров, находящемся под действием растягивающих напряжений, а также исследованы зависимости КИН от параметров трещины. В [13] с помощью метода конечных элементов исследовано влияние толщины образца на КИН в вершине трещины. В работе [14] с использованием программного обеспечения, предназначенного для решения трехмерных задач механики разрушения, изучено влияние размера, формы трещины и ее расположения на КИН. В [15] разработана программа, позволяющая проводить параметрический анализ влияния на КИН формы трещины и условий нагружения. С использованием этой программы вычислен КИН в полуэллиптической трещине, образовавшейся вследствие колебаний лопатки, при различных значениях параметров трещины. В [16] с помощью метода конечных элементов вычислен КИН для трещин различной длины, возникающих при вибрации лопатки в тестовом и рабочем режимах. В работе [17] с использованием обобщенного метода конечных элементов вычислен КИН в двумерной односторонней трещине, расположенной в прямоугольной пластине, и КИН в односторонней трещине, расположенной в лопасти аксиального компрессора. Вычисленные значения сравнивались со значениями, полученными на основе полуаналитического решения, найденного с помощью MBФ. В [18] с использованием конечно-элементной модели и пакета ANSYS исследована зависимость между долговечностью лопатки компрессора и положением на ней трещины.

Проводятся интенсивные исследования внутренних трещин, возникающих под действием центробежных сил, и поверхностных трещин, возникающих при действии статических растягивающих напряжений. Однако существует небольшое количество работ, посвященных построению аналитических выражений для КИН в случае полуэллиптических поверхностных трещин, которые, как правило, появляются при циклических нагрузках.

В данной работе КИН в точках полуэллиптической трещины, расположенной на всасывающей поверхности вращающейся лопатки, вычисляется с использованием МВФ. Исследуется влияние на КИН глубины трещины, ее положения, параметра эллиптичности и скорости вращения лопатки. Кроме того, МВФ применяется для получения аналитического выражения для КИН в точке полуэллиптической трещины, расположенной на ее дне. Фронт трещины, образующейся на лопатке, представляет собой непрерывную кривую. Представляется необходимым изучение распределения КИН в точках, расположенных на фронте трещины. В данной работе с использованием численных методов исследуется влияние глубины трещины, ее положения, параметра эллиптичности на КИН в точках, расположенных на фронте полуэллиптической трещины.

1. Теоретическая модель механики разрушения вращающейся лопатки при наличии в ней трещины. В соответствии с характерными размерами вращающейся лопатки газовой турбины лопатка моделируется конечной пластиной с размерами  $75 \times 56 \times 6$  мм (рис. 2). На рис. 2 *а* — глубина полуэллиптической трещины, *с* — половина длины полуэллиптической трещины, *b* — половина ширины пластины, *t* — толщина пластины,



Рис. 2. Модель вращающейся лопатки с полуэллиптической трещиной

L — высота пластины,  $L_1$  — расстояние от плоскости, в которой расположена трещина, до оси вращения (ось OX),  $L_2$  — расстояние от плоскости, в которой расположена трещина, до верхней поверхности пластины,  $\omega$  — угловая скорость вращения пластины. Материал пластины — титановый сплав TC11, имеющий следующие характеристики: плотность  $\rho = 4480 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ , модуль Юнга E = 123 ГПа.

1.1. Вычисление КИН с использованием МВФ. В соответствии с МВФ выражение для КИН в точке, расположенной на дне полуэллиптической трещины, записывается в виде

$$K_{\rm I} = \int_{0}^{a} \sigma(\eta) m(a, \eta) \, d\eta, \tag{1}$$

где  $\sigma(\eta)$  — распределение напряжений на воображаемой поверхности трещины в неповрежденном (в отсутствие трещины) теле;  $m(a, \eta)$  — не зависящая от нагрузки весовая функция для пластины с трещиной:

$$m(a,\eta) = H \frac{\partial U^{(1)}(a,\eta)}{\partial a} \frac{1}{K_{\mathrm{I}}^{(1)}},\tag{2}$$

 $U^{(1)}(a,\eta)$ — величина раскрытия трещины;  $K_{\rm I}^{(1)}$ — КИН при действии эталонной нагрузки; H— модуль упругости, равный модулю Юнга Eв случае плоского напряженного состояния.

Для пластины с полуэллиптической трещиной в случае однородного напряженного состояния выражение для КИН для точки, находящейся на дне трещины, записывается в виде

$$K_{\rm I}^{(1)} = Y(a)\sigma_0\sqrt{\pi a}\,,\tag{3}$$

где Y(a) — коэффициент формы [19]:

$$Y(a) = \frac{1}{[1+1,464(a/c)^{1,65}]^{0,5}} \Big[ 1,13-0,09 \frac{a}{c} + \Big( -0,54 + \frac{0,89}{0,2+a/c} \Big) \Big( \frac{a}{t} \Big)^2 + \Big( 0,5 - \frac{1}{0,65+a/c} + 14 \Big( 1 - \frac{a}{c} \Big)^{24} \Big) \Big( \frac{a}{t} \Big)^4 \Big].$$

В соответствии с результатами, полученными в работе [20], величина раскрытия трещины описывается функцией

$$U^{(1)}(a,\eta) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}H} \left( 4Y(a)\sqrt{a(a-\eta)} + Z(a)\sqrt{\frac{(a-\eta)^3}{a}} \right),\tag{4}$$

где Z — неопределенная функция.

В МВФ предполагается, что коэффициенты интенсивности напряжений, определенные в соотношениях (1), (3), равны, поэтому из уравнений (1)–(4) определяется функция Z(a):

$$Z(a) = \frac{[J_1(a) - 4Y(a)J_2(a)\sqrt{a}]\sqrt{a}}{J_3(a)},$$
(5)

где

$$J_1(a) = \sqrt{2} \pi \int_0^a Y^2(a) a \, da; \tag{6}$$

$$J_2(a) = \frac{2}{3} a^{3/2}, \qquad J_3(a) = \frac{2}{5} a^{5/2}.$$
 (7)

Параметр эллиптичности поверхностной полуэллиптической трещины представляет собой отношение глубины трещины к половине ее длины q = a/c. Выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$J_{1}(a) = \frac{\sqrt{2\pi a^{2}}}{1+1,464q^{1,65}} \Big[ 0,638\,45 - 0,1017q + 0,004\,05q^{2} + \\ + \Big( -0,3051 + 0,0243q + \frac{0,502\,85 - 0,040\,05q}{0,2+q} \Big) \Big(\frac{a}{t}\Big)^{2} + \\ + \Big( 0,2369 + \frac{-0,3767 + 0,03q}{0,65+q} + (5,2733 - 0,42q)(1-q)^{24} - 0,015q - \frac{0,1602}{0,2+q} + \frac{0,132}{(0,2+q)^{2}} \Big) \Big(\frac{a}{t}\Big)^{4} + \\ + \Big( -0,0675 - 1,89(1-q)^{24} + \frac{0,111\,25 + 3,115(1-q)^{24}}{0,2+q} + \frac{0,135}{0,65+q} - \frac{0,2225}{(0,2+q)(0,65+q)} \Big) \Big(\frac{a}{t}\Big)^{6} + \\ + \Big( 0,025 - \frac{0,1+2,8(1-q)^{24}}{0,65+q} + \frac{0,1}{(0,65+q)^{2}} + 1,4(1-q)^{24} + 19,6(1-q)^{48} \Big) \Big(\frac{a}{t}\Big)^{8} \Big].$$
(8)

Из уравнений (2), (4)–(8) следует выражение для весовой функции для упрощенной модели вращающейся лопатки с поверхностной полуэллиптической трещиной:

$$m(a,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Y} \Big[ \frac{2Y}{\sqrt{a-\eta}} + \Big( 4\frac{dY}{da} + \frac{2Y}{a} + \frac{3Z}{2a} \Big) \sqrt{a-\eta} + \Big( \frac{1}{a}\frac{dZ}{da} - \frac{Z}{2a^2} \Big) \sqrt{(a-\eta)^3} \Big].$$
(9)

В упрощенной модели лопатка с поверхностной полуэллиптической трещиной вращается вокруг оси OX с угловой скоростью  $\omega$ ; центробежная сила P, действующая в сечении, находящемся на расстоянии  $L_1$  от оси вращения, вычисляется по формуле

$$P = \int_{L_1}^{L_1 + L_2} 2bt\rho\omega^2 z \, dz = \omega^2 \rho bt(L_2^2 + 2L_1L_2).$$

Нормальное напряжение в этом сечении пластины без трещины, вызванное наличием центробежной силы, вычисляется по формуле

$$\sigma(\eta) = \frac{P}{2bt} = \frac{\omega^2 \rho}{2} \left( L_2^2 + 2L_1 L_2 \right). \tag{10}$$

КИН в точке, находящейся на дне трещины, вычисляется путем подстановки уравнений (9), (10) в уравнение (1) и последующего интегрирования.

1.2. Результаты теоретического анализа. В дальнейшем для определения положения трещины используется безразмерная величина  $l = (L - L_2)/L$ . Расстояние от основания пластины до оси вращения равно 339 мм. На рис. 3 приведены зависимости КИН в точке, находящейся на дне трещины, от параметра a/t при скорости вращения пластины  $\omega = 740.3$  рад/с и различных значениях параметра эллиптичности q.

При фиксированных значениях параметров q и l КИН увеличивается с увеличением параметра a, поскольку глубина трещины входит в выражение для весовой функции. При фиксированных значениях параметров q и l КИН уменьшается с увеличением l, поскольку меньшим значениям l соответствуют большие растягивающие напряжения, обусловленные центробежными силами, действующими в сечении, в котором расположена трещина. При фиксированных значениях a, l КИН уменьшается с увеличением q. При  $q \rightarrow 1$  форма трещины стремится к форме полукруга, с увеличением глубины трещины скорость увеличения КИН постепенно уменьшается. При  $q \rightarrow 0$  трещина становится пологой и ее



Рис. 3. Зависимость КИН в точке, находящейся на дне трещины, от параметра a/t при различных значениях параметров q, l:  $a - q = 1, \ 6 - q = 0.5, \ e - q = 0.1; \ 1 - l = 0.1, \ 2 - l = 0.3 \ 3 - l = 0.5, \ 4 - l = 0.7, \ 5 - l = 0.9$ 

длина увеличивается. При этом скорость увеличения КИН сначала уменьшается, а затем увеличивается с увеличением длины трещины.

На рис. 4 приведена зависимость КИН в точке, находящейся на дне трещины, от скорости вращения пластины при q = 0.5, l = 0.1 и различных значениях параметра a/t. С увеличением скорости вращения увеличиваются как КИН, так и скорость его увеличения, поскольку увеличивается растягивающее напряжение на поверхности трещины.

2. Конечно-элементный анализ напряженного состояния вращающейся лопатки с трещиной. Ниже приводятся результаты анализа численного решения, полученного с использованием метода конечных элементов.

2.1. Конечно-элементная модель. Сначала с использованием препроцессора генерируется сетка в области, в которой отсутствует трещина. Область, в которой распространяется трещина, рассматривается как подмодель. Данные, полученные с использованием подмодели, считываются программой, предназначенной для решения трехмерной задачи при наличии трещины. Начальные параметры трещины вводятся в подмодель, после чего генерируется новая сетка. Подмодель с трещиной и оставшаяся часть исходной модели рассматриваются как единое целое, при этом сгенерированная сетка для модели с начальной трещиной вводится в программу метода конечных элементов. КИН в узлах, расположенных на фронте трещины, вычисляется с использованием программного обеспечения,



Рис. 4. Зависимость КИН в точке, находящейся на дне трещины, от скорости вращения пластины при различных значениях параметра a/t: 1 — a/t = 0,1, 2 - a/t = 0,3, 3 - a/t = 0,5, 4 - a/t = 0,7, 5 - a/t = 0,9

		$K_{\rm I},  {\rm M}\Pi{ m a}\cdot{ m mm}^{1/2}$		
a	c	Результаты	Результаты	$\Delta, \%$
		численного расчета	аналитического решения	
$0,\!6$	$1,\!2$	63,0239	61,8940	$1,\!83$
1,2	$^{2,4}$	$91,\!2754$	89,2454	$2,\!27$
$1,\!8$	$^{3,6}$	115,0364	112,6564	2,11
$^{2,4}$	$^{4,8}$	138,9272	$135,\!1540$	2,79
$^{3,0}$	$^{6,0}$	160,8318	157,7198	$1,\!97$
$^{3,6}$	$^{7,2}$	184,3010	180,4989	2,11
$^{4,2}$	$^{8,4}$	203,8198	203,0942	0,36
4,8	$^{9,6}$	$216,\!4526$	224,6613	$3,\!65$

Значения КИН для полуэллиптической трещины

предназначенного для определения трехмерного напряженно-деформированного состояния в телах при наличии в них трещин.

При расчете с помощью метода конечных элементов использовалось 186 жестких шестигранных элементов. Поскольку основание лопатки крепится в ступице, не допускаются смещения узлов, расположенных на основании пластины, ни в одном направлении.

2.2. Сравнение теоретических и численных результатов. В таблице приведены значения КИН в точке, находящейся на дне трещины, вычисленные с использованием метода конечных элементов и формул, полученных в п. 1, при  $\omega = 740.3$  рад/с, q = 0.5, l = 0.3 ( $\Delta$  — относительная погрешность). Значения КИН, полученные с использованием аналитических формул и численного решения, различаются не более чем на 4 %.

2.3. Анализ результатов численных расчетов. Фронт полуэллиптической трещины представляет собой непрерывную кривую (рис. 5). При определении КИН в произвольной точке D, лежащей на фронте трещины, вводится параметр  $s = S_{AD}/S_{AB}$  ( $S_{AD}$  — длина дуги AD;  $S_{AB}$  — длина дуги AB).

На рис. 6 приведены распределения КИН в<br/>доль фронта трещины при $\omega=740,3$ рад/с<br/>,l=0,1и различных значениях q.

При фиксированных значениях q, l, a распределения КИН вдоль фронта трещины приближенно представляются параболами. Для достаточно глубоких трещин (a/t = 0.9) закон



Рис. 5. Фронт полуэллиптической трещины



Рис. 6. Распределение КИН в<br/>доль фронта трещины при различных значениях параметров <br/> q и a/t :

 $a - q = 0.25, \ \delta - q = 0.5, \ s - q = 1; \ 1 - a/t = 0.1, \ 2 - a/t = 0.3, \ 3 - a/t = 0.5, \ 4 - a/t = 0.7, \ 5 - a/t = 0.9$ 

распределения КИН вдоль фронта трещин является более сложным вследствие конечной толщины пластины. При  $q \to 0$  фронт трещины представляет собой пологую кривую. При этом КИН сначала увеличивается, а затем, по мере движения точки по дуге ACB (см. рис. 5), уменьшается. При s = 0.5 (точка C) значение КИН наибольшее. При  $q \to 1$  форма трещины стремится к форме полукруга. При этом КИН сначала уменьшается, а затем, по мере движения точки по дуге ACB, увеличивается. При s = 0.5 (точка C) значение КИН наибольшее. При  $q \to 1$  форма трещины стремится к форме полукруга. При этом КИН сначала уменьшается, а затем, по мере движения точки по дуге ACB, увеличивается. При s = 0.5 (точка C) значение КИН наименьшее. При фиксированных значениях l, s КИН уменьшается с увеличением q.

Заключение. С использованием метода весовых функций определен КИН в точках, принадлежащих фронту полуэллиптической трещины, находящейся на всасывающей поверхности лопасти газовой турбины. Исследовано влияние параметров трещины и скорости вращения лопатки на величину КИН. Установлено, что КИН увеличивается с увеличением глубины трещины при постоянной скорости вращения, постоянном параметре эллиптичности и фиксированном положении трещины. При фиксированных скорости вращения, глубине трещины и параметре эллиптичности КИН увеличивается по мере приближения трещины к области крепления лопатки (к оси вращения). При фиксированных скорости вращения, глубине трещины и ее положении КИН уменьшается с увеличением коэффициента эллиптичности. При стремлении коэффициента эллиптичности к единице скорость увеличения КИН уменьшается с увеличением глубины трещины. При стремлении коэффициента эллиптичности к нулю скорость увеличения КИН сначала уменьшается, а затем увеличивается по мере увеличения глубины трещины. КИН увеличивается с увеличением скорости вращения.

С использованием численного метода определено распределение КИН вдоль фронта трещины при различных значениях ее параметров. Это распределение зависит от параметров трещины и приближенно описывается параболическим законом.

Результаты исследования могут быть использованы при анализе процесса разрушения лопатки и ее долговечности.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Li Z. H. N. Applied fracture mechanics. Beijing: Beijing Univ. of Aeronaut. and Astronaut. Press, 2012.
- 2. Wu X. R. Weight functions and stress intensity factor solutions / X. R. Wu, A. J. Carlsson. Oxford: Pergamon Press, 1991.
- Zhao W., Wu X. R., Yan M. G. An efficient and accurate three-dimensional weight function method and its application // J. Aeronaut. Mater. 1990. V. 10. P. 9–22.
- Zhao W., Wu X. R., Yan M. G. Solution of stress intensity factor by weight function for small surface cracks in plates // Acta Aeronaut. Astronaut. Sinica. 1991. V. 12, N 2. P. 44–49.
- 5. Poursaeidi E., Bakhtiari H. Fatigue crack growth simulation in a first stage of compressor blade // Engng Failure Anal. 2014. V. 45. P. 314–325.
- Zheng X. J., Kiciak A., Glinka G. Weight functions and stress intensity factors for internal surface semi-elliptical crack in thick-walled cylinder // Engng Fracture Mech. 1997. V. 58, N 3. P. 207–221.
- Chen A. J., Chen C., Zhang D. G., Liao L. F. Fracture mechanics analysis for rotating blade model of aero-engine // J. Aerospace Power. 2011. V. 26, N 9. P. 2044–2048.
- Fan J. L., Chen L., Chang W. K., et al. Research on stress intensity factors of cracked blades based on the weight function method // Sci. Technol. Engng. 2015. V. 15, N 15. P. 95–102.
- Fan J. L. Stress intensity factor calculation and fracture evaluation based on weight function method // J. Aerospace Power. 2018. V. 33, N 8. P. 1886–1894.
- Newman J. C. (Jr.), Raju I. S. An empirical stress intensity factor equation for surface cracks // Engng Fracture Mech. 1981. V. 15. P. 185–192.
- 11. Witek L. Simulation of crack growth in the compressor blade subjected to resonant vibration using hybrid method // Engng Failure Anal. 2015. V. 49. P. 57–66.
- Xu J. J., Wang Z. L., Shao R. X. Evaluation of the formula of stress intensity factor K<sub>I</sub> for semi-elliptical surface crack // J. Shanghai Univ. 2000. V. 4, N 1. P. 18–21.
- 13. Garcia-Manrique J., Camas D., Lopez-Crespo P., Gonzalez-Herrera A. Stress intensity factor analysis of through thickness effects // Intern. J. Fatigue. 2013. V. 46. P. 58–66.
- 14. Zhang W. X., Jiang X., Wang J. G., Yang B. Research of the influence of tooth root crack on the stress intensity factor affecting // Machinery Design Manufacture. 2014. V. 7. P. 19–22.
- 15. Okada H., Koya H., Kawai H., et al. Computations of stress intensity factors for semielliptical cracks with high aspect ratios by using the tetrahedral finite element (fully automated parametric study) // Engng Fracture Mech. 2016. V. 158. P. 144–166.
- Li C., Wu X., Chai Q., Zhang Z. Vibration fatigue crack propagation law of aero-engine compressor blade // Chinese J. Appl. Mech. 2016. V. 33, N 3. P. 384–388.
- 17. Guan P. Study on dynamic characteristics and stress intensity factors of cracked blades of axial compressor. Dalian: Dalian Univ. Technol., 2017.
- Mu Y. W., Tang J. X., Zhao Y. M. Tolerance analysis of foreign object damage on compressor blade // Gas Turbine Experiment Res. 2017. V. 30, N 1. P. 52–57.
- Shi C. H. X. Fundamentals of materials engineering / C. H. X. Shi, Q. P. Zhong, C. H. G. Li. Beijing: Chem. Industry Press, 2009.
- Petroski H. J., Achenbach J. D. Computation of the weight function from a stress intensity factor // Engng Fracture Mech. 1978. V. 10, N 2. P. 257–266.

Поступила в редакцию 23/IX 2019 г., после доработки — 23/IX 2019 г. Принята к публикации 25/XI 2019 г.