СРАВНЕНИЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПОЧВЕННОЙ ВЛАГИ

В. А. Янгарбер

(Ленинград)

Приводятся результаты сравнения двух моделей движения почвенной влаги. Показано, что одна из них при определенных условиях описывает движение влаги по направлению градиента влажности.

Динамика почвенной влаги традиционно описывалась уравнением типа уравнения диффузии, что соответствует так называемой диффузионной модели. Однако имеются эксперименты на почвенных колонках, которые не объясняются диффузионной моделью и принципиально не могут быть ею объяснены. Недавнее изучение движения почвенной влаги привело к созданию новой модели, основанной на представлении о почве, как о трещиновато-пористой среде. При этом новая модель является обобщением диффузионной и согласуется с названными экспериментами.

Дифференциальное уравнение для влажности, полученное при таком рассмотрении, не ново и изучалось уже при исследовании движения жидкости в трещиноватых средах [1]. Однако эффект движения влаги в направлении градиента влажности, обнаруженный экспериментально на почвенных колонках, мало изучен. Сущность этого явления описана, например в [2], где, кстати, отмечено качественное соответствие новой модели движению влаги по градиенту.

Эффект, о котором идет речь, состоит кратко в следующем. Если начальное распределение влажности в колонке неравномерно по координате и с влажного конца происходит сильное испарение, то влажность относительно сухого конца убывает в начальном периоде сушки, несмотря на то, что градиент влажности направлен все еще в сторону влажного конца. Следует отметить, что это убывание влажности на сухом конце интересно с точки зрения сравнения моделей только при малых значениях времени, так как когда со временем градиент влажности изменит свой знак, убывание влажности на этом конце образца есть простое следствие испарения.

Рассматривается следующая краевая задача, определяющая влажность $u(t, x)$ как функцию времени t и координаты x на конечном отрезке $0 \leqslant x \leqslant H$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^{-2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad Q(t, x) \equiv D\frac{\partial u}{\partial x} + a^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \tag{1}$$

$$\delta Q(t, 0) - \alpha u(t, 0) = f_1, \qquad \gamma Q(t, H) + \beta u(t, H) = f_2$$

Очевидно, что задача (1) является обобщением соответствующей задачи, поставленной к уравнению диффузии, и переходит в последнюю при $a^{-2} = 0$ ($a = \infty$). Все константы D, a, α, β, γ, δ, f_1, f_2 считаются не отрицательными. Как отмечалось выше, имеет смысл проводить все рассмотрения при малых значениях t. Поэтому предположение о постоянстве величин α, β, γ, δ, f_1, f_2 представляется естественным. Отметим еще, что $Q(t, 0) > 0$ соответствует испарению с поверхности $x = 0$ и $Q(t, H) > 0$ соответствует увлажнению на уровне $x = H$.

Разрешимость задачи (1) можно получить, используя классический метод Фурье, аналогично тому, как это сделано в [2] в менее общем случае. Единственность решения линейной задачи (1) с переменными коэффициентами доказывается при помощи энергетических неравенств.

Для определенности будем изучать изменение во времени влажности $u(t, x)$ на уровне $x = H$. Легко видеть, прежде всего, что, если $\gamma = 0$, то $u(t, H) = f_2 / \beta$, и поставленная задача тривиальна. Поэтому можно считать $\gamma > 0$ и, следовательно, без ограничения общности принять $\gamma = 1$. Для решения задачи (1) применяется преобразование Лапласа — Карсона по переменной t. При этом достаточно вычислить операционный образ $v(p)$ функции $u(t, H)$. Найдя затем пределы

$$\lim v(p) = \varphi(H), \quad \lim p\,[v(p) - \varphi(H)] = \lambda \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

получим первые два члена разложения $u(t, H)$ в ряд по степеням t при малых t

$$u(t, H) = \varphi(H) + \lambda t + o(t), \qquad \lambda = \frac{\partial}{\partial t} u(t, H) \quad \text{при } t = 0 \tag{2}$$

Следует еще заметить, что при $a \neq \infty$ в разложении $v(p)$ в ряд по отрицательным степеням p отсутствует член, содержащий $p^{-0.5}$, так что в разложении $u(t, H)$ нет члена $c\sqrt{t}$. Это же относится и к любым степеням t, меньшим единицы.

Итак, основной интерес в выражении (2) с точки зрения моделируемого эффекта представляет число λ. Опуская довольно громоздкие выкладки, можно записать λ в случае $\delta = 1$ (который, очевидно, равносилен $\delta > 0$) в виде

$$\lambda = \frac{a}{\operatorname{sh} aH}\left[(f_2 - \beta\varphi(H))\operatorname{ch} aH - (f_1 + \alpha\varphi(0)) - aD\int_0^H \varphi'(y)\operatorname{sh} ay\, dy\right] \tag{3}$$

или иначе $(0 < a < \infty)$

$$\lambda = \frac{a}{\operatorname{sh} aH}\left[Q(0, H)\operatorname{ch} aH - Q(0,0) - aD\int_0^H \varphi'(y)\operatorname{sh} ay\, dy\right] \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$f_1 + \alpha\varphi(0) - D\varphi'(0) = f_2 - \beta\varphi(H) - D\varphi'(H) = 0 \tag{5}$$

Это соответствует тому, что при $0 < a < \infty$ краевые условия задачи (1) при $t = 0$ имеют вид

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|_{x=H} = 0$$

Если же рассматривается диффузионная модель ($a = \infty$), то уравнения (5) означают непрерывность краевых условий задачи (1) при $t = 0$.

Чтобы получить значение скорости роста $u(t, H)$ при $t = 0$ в случае диффузионной модели (обозначим ее через λ_0), можно перейти к пределу при $a \to \infty$ в формуле (3), предварительно выполнив интегрирование по частям. Имеем

$$\lambda_0 = D\varphi''(H) \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что скорость изменения влажности на конце $x = H$ в начальный момент времени определяется коэффициентом диффузии D и свойстами начального распределения $\varphi(x)$ только в одной точке $x = H$, если модель диффузионная. С другой стороны, как показывает формула (4), если модель не диффузионная, то эта скорость зависит от всех значений $\varphi(x)$ (является функционалом от $\varphi'(x)$), начальных потоков $Q(0, 0)$ и $Q(0, H)$, длины H и, разумеется, от параметров уравнения D и a. Короче говоря, формула (6) выражает зависимость от локальных свойств параметров задачи (кстати, только от второй производной начального распределения в одной точке), в то время как (4) выражает зависимость от интегральных свойств. Этим можно определить основное различие рассматриваемых моделей.

Тот факт, что λ_0 не зависит от величины потока $Q(0, H)$, можно прокомментировать следующим образом. В рассматриваемом случае ($a = \infty$)

$$Q(0, H) = \frac{\partial}{\partial x} u(0, H), \qquad \lambda_0 = \frac{\partial}{\partial t} u(0, H)$$

Таким образом, $Q(0, H)$ характеризует форму кривой $u(0, x)$ в точке $x = H$, а λ_0 характеризует изменение влажности во времени, т. е. форму кривой $u(t, H)$ в точке $t = 0$.

Интегрируя по частям в формуле (3) и используя (5), можно получить более компактное выражение для λ

$$\lambda = \frac{aD}{\operatorname{sh} aH}\int_0^H \varphi''(y)\operatorname{ch} ay\, dy$$

Последняя формула при сравнении ее с (6) еще четче определяет различие моделей: если λ_0 зависит от значения φ'' в одной точке, то λ зависит от всех значений $\varphi''(x)$. Особенно прозрачным это утверждение становится, если предположить, что параметр a достаточно мал (т. е. коэффициент a^{-2} велик). Тогда

$$\lambda \approx \frac{1}{H}\int_0^H D\varphi''(y)\, dy$$

и является средним значением функции $D\varphi''(x)$ на отрезке $[0, H]$, в то время как λ_0 есть значение той же функции в точке $x = H$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть при $x = 0$ задана величина испарения $Q(t, 0) = f_1 > 0$, а конец образца $x = H$ влагоизолирован, т. е. $Q(t, H) = 0$. Это значит, что в задаче (1) задано $\alpha = \beta = f_2 = 0$. Из (5) тогда следует, что $\varphi'(H) = 0$, и, принимая $\varphi'(x) \leqslant 0$, получим $\varphi''(x) > 0$. Таким образом, в этом случае для диффузионной модели имеет место неравенство $\lambda_0 > 0$, которое свидетельствует о росте влажности при $x = H$ в начальный момент времени. С другой стороны, из (3) получаем

$$\lambda = \frac{a}{\operatorname{sh} aH}\left[aD\int_0^H(-\varphi'(y))\operatorname{sh} ay\,dy - f_1\right] \tag{7}$$

Равенство (7) показывает, что λ становится отрицательным (если $a > 0$ достаточно мало), т. е. что влага на относительно сухом конце $x = H$ может убывать, несмотря на то, что градиент влажности направлен в сторону точки $x = 0$. Именно этот эффект, отличающий модель (1) от диффузионной, и был обнаружен экспериментально (имеется в виду данный частный случай краевой задачи).

Так как $\lim \lambda = \lambda_0 > 0$ при $a \to \infty$, то можно найти такое значение коэффициента a, при котором $\lambda = 0$, т. е. такое пороговое значение a_1, что при $a \geqslant a_1$ эффект не моделируется. Для этого достаточно решить относительно a уравнение

$$aD\int_0^H \varphi'(y)\operatorname{sh} ay\,dy = -f_1$$

Если при этом a_1 достаточно мало, то его можно вычислить приближенно по формуле

$$a_1^{-2} \approx -\frac{D}{f_1}\int_0^H y\varphi'(y)\,dy = \frac{D}{f_1}\int_0^H[\varphi(y) - \varphi(H)]\,dy \tag{8}$$

Физический смысл формулы (8) состоит в следующем. Чем больше коэффициент диффузии D и суммарное превышение влажности всего образца над влажностью его относительно сухого конца и чем меньше испарение, тем при больших значениях a^{-2} наблюдается эффект движения влаги по ее градиенту.

Из формулы (4) следует, что в такой среде, где влиянием диффузивности можно пренебречь, рассматриваемый эффект определяется только значениями начальных потоков в точках $x = 0$ и $x = H$. Действительно, в этом случае можно в (4) положить $D = 0$, откуда и следует высказанное утверждение. Если же, наоборот, механизм диффузии преобладает, то можно считать параметр a достаточно большим. Несложными вычислениями из (3) можно получить тогда

$$\lambda = D\varphi''(H) - 0.5a^{-1}D\varphi'''(H) + O(a^{-2}) \tag{9}$$

Естественно, что главная часть этого представления есть λ_0, и поэтому эффекта движения по градиенту влажности в этом случае ожидать нельзя. Отметим, что при большом a не моделируется и более тонкий эффект. Пусть для определенности опять $\alpha = \beta = f_2 = \varphi'(H) = 0$ и $\varphi'(x) < 0$. Тогда $\lambda_0 > 0$, и более тонким эффектом можно назвать тот факт, что $\lambda < \lambda_0$ при $1 \ll a < \infty$. Однако этот факт зависит, как следует из (9), от знака $\varphi'''(H)$, который может быть произвольным, и на знак λ в формуле (7) не влияет. Таким образом, задача (1) моделирует эффект только при значениях a, лежащих в некотором конечном интервале $0 < a_1 \leqslant a \leqslant a_2 < \infty$.

Разложение, аналогичное (2), можно записать и для $u(t, 0)$. Для этого надо в задаче (1) заменить x на $H - x$ и использовать (3)

$$u(t, 0) = \varphi(0) + \lambda_1 t + o(t)$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{\operatorname{sh} aH}\left[Q(0, H) - Q(0,0)\operatorname{ch} aH + aD\int_0^H \varphi'(y)\operatorname{sh} a(H - y)\,dy\right] \tag{10}$$

При помощи формул (10) можно получить частный случай формулы (4) в предположении $\delta = 0$. Действительно, если $\delta = 0$, то из первого краевого условия в (1) следует, что $u(t, 0) \equiv \varphi(0) = \mathrm{const}$; поэтому $\lambda_1 = 0$. Находя из уравнения $\lambda_1 = 0$ значение $Q(0,0)$ и подставляя его в (4), получаем при $\delta = 0$ значение λ (фигурирующее в (2))

$$\lambda = \frac{a}{\operatorname{ch} aH}\left[Q(0, H)\operatorname{sh} aH - aD\int_0^H \varphi'(y)\operatorname{ch} ay\,dy\right] \tag{11}$$

Формула (11) показывает, что эффект движения жидкости по градиенту в точке $x = H$ существенно связан с наличием испарения на другом конце образца $x = 0$. Действительно, желая обнаружить эффект, следует задавать $Q(0, H) \geqslant 0$, ибо в противном случае $Q(0, H) < 0$ уменьшение влажности $u(t, H)$ может быть просто следствием откачки влаги. Но тогда при $\varphi'(x) < 0$ имеем независимо от значения параметра a неравенство $\lambda > 0$, $(\delta = 0)$. Правда и в этом случае можно добиться отрицательности правой части (11) за счет специального выбора $\varphi(x)$, сохраняя, однако, неравенство $\varphi(H) < \varphi(0)$. Такая функция $\varphi(x)$ должна иметь последовательно минимум и максимум при приближении x к точке H, что, вероятно, выполнить экспериментально довольно затруднительно. Кроме того, при больших перепадах влажности в образце предположение о постоянстве коэффициента диффузии D уже физически не оправдано. Отметим, что все известные экспериментальные проверки изучаемого эффекта проводились при сильном испарении с поверхности $x = 0$.

Пусть, наконец, условие (5) не выполнено. Тогда формулы (3) и (4) сохраняются при $a < \infty$. Однако представление (2) при $a = \infty$ (диффузионная модель) приобретает другой вид

$$u(t, H) = \varphi(H) + \lambda_0 t + [f_2 - \beta\varphi(H) - D\varphi'(H)]\left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}} - \frac{\alpha t}{D^2}\right) + o(t)$$

Отсюда следует, что рост или убывание $u(t, H)$ при малых t хотя и зависит по-прежнему от параметров начального распределения только в одной точке $x = H$, но происходит быстрее, чем прежде, так как $\sqrt{t} \gg t$.

В заключение можно отметить, что, зная параметры задачи (1) и измерив величину λ, можно из (3) (или (4)) определить величину коэффициента a^{-2} в уравнении (1).

Поступила 1 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966.
2. Янгарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса, ПМТФ, 1967, № 1.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСТВОРЕНИЯ И ВЫМЫВА СОЛЕЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ С БОЛЬШИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КРИТЕРИЯ ПЕКЛЕ

В. И. Пеньковский

(Новосибирск)

Если скорость фильтрации раствора значительно больше скорости диффузии растворенного вещества, то одномерная задача растворения и вымыва солей в грунтах сводится к интегрированию системы уравнений вида [1]

$$vC_x + \sigma C_t - a_1\sigma N^\alpha (C_* - C) = 0$$

$$N_t + a_1 N^\alpha (C_* - C) = 0 \qquad (0.1)$$

Здесь $v = \text{const}$ скорость фильтрации; σ — пористость; $\alpha \geqslant 0$, $a_1 > 0$ — константы, зависящие от характера засоленности грунта; $C = C(x, t)$ — концентрация раствора; $N = N(x, t)$ — содержание солей, находящихся в твердой фазе в единице объема грунта; C_* — концентрация предельного насыщения; x — координата; t — время.

К уравнениям, аналогичным системе (0.1), приводят при некоторых допущениях задачи о потоке суспензий в пористой среде, сопровождающемся явлениями кольматажа — суффозии [2].

Уравнения (0.1) представляют собой квазилинейную (при $\alpha \neq 0$) систему гиперболического типа с двумя семействами характеристик

$$x = \text{const}, \quad x - vt / \sigma = \text{const}$$