Полученные теоретические зависимости хорошо описывают измеренные распределения температур и давлений в достаточно плотных нижних слоях амтосфер Земли и Венеры при одинаковом параметре $\gamma_0 = 1{,}235$.

При превышении некоторой высоты z_1 ($z_1 \simeq 11$ и 60 км для Земли и Венеры) линейный спад температуры прекращается и сменяется областью постоянной температуры $T = T_1 = \text{const}$, где, как это следует из уравнения равновесия (П.1), p и ρ уменьшаются экспоненциально ($\gamma_0 = 1$): $T = T_1$, $\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = \exp\left(-\frac{z - z_1}{p_1/g\rho_1}\right)$.

Прекращение спада температуры при $z > z_1$ объясняется тем, что атмосфера, находящаяся выше z_1, становится эффективно прозрачной для излучения, так что ее барометрическая толщина $l_1 = p_1/\rho_1 g = kT_1/mg$ сравнивается с оптической $l = 1/\varkappa\rho_1$, определяющейся средней длиной пробега фотонов на высоте z_1. Отсюда вытекает, что при $z \simeq z_1$ должно выполняться соотношение $p = g/\varkappa$ ($\varkappa$ — коэффициент непрозрачности атмосферы [12, 13]).

Приведенное выше рассмотрение имеет достаточно общий характер и применимо также для атмосферы звезд, для которых значение граничной температуры T_1 — очень важная характеристика, определяющая их светимость $L = \pi R^2 \sigma T_1^4$. Запишем формулу для граничной температуры в виде $T_1 = Ag$, $A = ml/k$ и предположим, что оптическая длина l обратно пропорциональна эффективной молекулярной массе m, тогда $A = \text{const}$ и $T_1 \sim g$. Оказывается, что $A = 22$ К$\cdot$ с^2/м, соответствующая измеренным значениям $T_1 = -57$ и -75°С для Земли и Венеры, дает также близкий к действительности результат $T_1 = 6000$ К для эффективной поверхностной температуры Солнца.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гленсдорф П., Пригожин И.** Термодинамическая теория структуры устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.
2. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability.— Oxford: Clarendon Press, 1961.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
4. **Антипов С. В., Незлин М. В. и др.** Солитон Россби // Письма в ЖЭТФ.— 1981.— Т. 33, вып. 7.
5. **Петвиашвили В. И.** Красное Пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32, вып. 11.
6. **Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. Н.** Большое Красное Пятно как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере // Письма в астрон. журн.— 1981.— Т. 7, вып. 8.
7. **Линь Цзяцзяо.** Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
8. **Соловьев Л. С.** Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 3.
9. **Вандакуров Ю. В.** О желобковых неустойчивостях для вращающегося плазменного шнура // ЖТФ.— 1963.— Т. 33, вып. 9.
10. **Rosenbluth M., Krall N., Rostoker N.** Finite larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasmas // Nuclear Fusion.— 1962.— Supplement part 1.
11. **Чандрасекар С.** Введение в учение о строении звезд.— М.: ИЛ, 1950.
12. **Гибсон Э.** Спокойное Солнце.— М.: Мир, 1977.
13. **Соловьев Л. С., Кузнецова Т. Д.** О внутреннем строении релятивистских звезд // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32, вып. 9.

Поступила 24/IV 1986 г.

УДК 532.526

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТЕЧЕНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

В. А. Батищев

(*Ростов-на-Дону*)

При больших числах Рейнольдса построены формальные асимптотические разложения решения плоской нелинейной стационарной задачи со свободной границей в предположении, что поверхностные касательные напряжения заданы и имеют конечное значение. Уравнения пограничного слоя вблизи свободной границы нелинейны, а главные члены асимптотики вне пограничного слоя удовлетворяют уравнениям Эйлера идеальной жидкости. Показано, что действие касательных напряжений приводит к появлению дополнительного члена, эквивалентного силам поверхностного натяжения в динамическом краевом условии на свободной границе «предельного» невязкого течения.

1. Для уравнений Навье — Стокса при исчезающей вязкости ($\nu \to 0$) рассматривается плоская нелинейная стационарная задача о движении несжимаемой жидкости в области D, ограниченной свободной поверхностью Г, под действием касательных и нормальных напряжений, заданных на Г:

$$(\mathbf{v},\ \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g},\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \tag{1.1}$$

$$p - 2\rho\nu\partial v_n/\partial n = p_* + \varkappa\sigma, \quad \rho\nu\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{v} = T, \quad (x, z) \in \Gamma; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0,\ (x,\ z) \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$; $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$; $\mathbf{e}_z = (0, 1)$ — орт оси z; ρ — плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести; $\sigma = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $\varkappa$ — кривизна свободной границы Г ($\varkappa > 0$, если Г выпукла наружу жидкости); $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к Г; p_* — заданное давление на Г; T — касательное напряжение на Г ($T = O(1)$ при $\nu \to 0$). Предполагается, что область D не ограничена и задано поведение поля скоростей на бесконечности.

При исчезающей вязкости ($\nu \to 0$) вблизи свободной границы формируется пограничный слой бесконечно большой завихренности порядка $O(1/\nu)$. Во внешней области (вне пограничного слоя) течение приближенно описывается уравнениями Эйлера. В случае отсутствия касательных напряжений ($T = 0$) на свободной границе в [1] построены асимптотические разложения решения задачи, где показано, что уравнения пограничного слоя линейны и решаются в квадратурах. При $T = O(1)$ вблизи Г может возникать пограничный слой, удовлетворяющий нелинейным уравнениям. В [2] сформулированы и в [3—5] изучены уравнения стационарного пограничного слоя Марангони, возникающего вблизи свободной границы неравномерно нагретой жидкости вследствие термокапиллярного эффекта.

Ниже изучается асимптотика течения жидкости при малой вязкости, удовлетворяющей системе (1.1)—(1.3). Задача (1.1) — (1.3) приводится к безразмерной форме, и вводится малый параметр $\varepsilon = \nu\rho^{1/2}L_*^{-1}T_*^{-1/2}$ (L_*, $T_*^{1/2}\rho^{-1/2}$, T_* — масштабы длины, скорости и касательного напряжения). Асимптотические разложения решения задачи при $\varepsilon \to 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \frac{1}{\varepsilon^{1/3}}\mathbf{h}_0 + \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{k/3}(\mathbf{v}_k + \mathbf{h}_{k+1}), \tag{1.4}$$

$$p \sim -z + \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{k/3}(p_k + q_k), \quad \zeta \sim \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{k/3}\zeta_k,$$

где $z = \zeta(x)$ — уравнение свободной границы. Обозначим через D_Γ область пограничного слоя. Тогда $\mathbf{h}_k$, q_k — функции типа решений задачи пограничного слоя в D_Γ. Вектор-функции $\mathbf{v}_k$ и функции p_k определяют асимптотическое решение задачи всюду вне D_Γ. Отметим, что порядок главного члена в разложении вектора скорости в (1.4) и порядок толщины пограничного слоя находятся из условия равенства порядков вязких и инерционных членов в системе Навье — Стокса (1.1), а также в краевом условии (1.2) для касательного напряжения $\partial\mathbf{v}/\partial n = O(1)\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Толщина пограничного слоя в этом случае имеет порядок $\varepsilon^{2/3}$.

Сформулируем задачу для главных членов асимптотики (1.4) $\mathbf{h}_0$ и q_0, определяющих течение в области пограничного слоя. Вблизи Г введем локальные ортогональные координаты (r, φ) по формулам

$$x = X(\varphi) - rn_x, \; z = Z(\varphi) - rn_z.$$

Здесь r — расстояние от точки (x, z) до контура Γ; n_x, n_z — компоненты единичного вектора нормали к Γ, проведенного внутрь области D; $x = X(\varphi)$, $z = Z(\varphi)$ — параметрическое уравнение контура Γ. Отрезки нормали длиной r при достаточно малых r не пересекаются.

Краевая задача для $\mathbf{h}_0$ выводится применением второго итерационного процесса [6] к системе (1.1)—(1.3). Пусть $h_{\varphi k}$, h_{rk} и $v_{\varphi k}$, v_{rk} — соответственно компоненты векторов $\mathbf{h}_k$ и $\mathbf{v}_k$ в координатах (r, φ). Подставляем разложения (1.4) в (1.1), (1.3) и в динамическое условие (1.2) для касательного напряжения на Γ. Разлагаем $\mathbf{v}_k$, p_k в ряды Тейлора по степеням r и полагаем $r = \varepsilon^{2/3}s$. Вводим обозначение $H_{r2} = h_{r2} + v_{r1}|_{r=0}$. Приравнивая нулю коэффициенты при ε^{-1}, $\varepsilon^{-2/3}$, находим $h_{r0} = h_{r1} = 0$, а для $h_{\varphi 0}$, H_{r2} выводим краевую задачу

$$\frac{1}{\delta} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + H_{r2} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + \delta \frac{\partial H_{r2}}{\partial s} = 0, \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s}\right|_{s=0} = -T(\varphi), \quad H_{r2}|_{s=0} = 0, \quad h_{\varphi 0}|_{s=\infty} = 0,$$

где δ — коэффициент Ламэ кривой $\Gamma(\delta^2 = (\partial X/\partial\varphi)^2 + (\partial Z/\partial\varphi)^2)$. Задача (1.5) на отрезке $\varphi \in [0, l]$ при заданном начальном профиле $h_{\varphi 0} = f(s)$ $(\varphi = 0)$ изучена в [7], там найдены условия разрешимости: $T(\varphi) \in c^1[0, l]$, $f(s) \in c^{2+\alpha}[0, \infty)$, $\alpha > 0$, $T(0) = -f'(0)$, $f(s) \to 0$ $(s \to \infty)$, $f(s) > 0$, $T(\varphi) \geqslant 0$.

Высшие приближения $\mathbf{h}_k (k \geqslant 1)$ находятся путем решения линейных краевых задач

$$\frac{1}{\delta} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} h_{\varphi k} + H_{r,k+2} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} + H_{r2} \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial s} = \frac{\partial^2 h_{\varphi k}}{\partial s^2} + F_k, \quad \frac{1}{\delta} \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_{r,k+2}}{\partial s} = N_k,$$

$$\left.\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial s}\right|_{s=0} = M_k, \quad H_{r,k+2}|_{s=0} = G_k, \quad h_{\varphi k}|_{s=\infty} = 0$$

$(H_{r,k+2} = h_{r,k+2} + v_{r,k+1})$. Коэффициенты F_k, N_k, M_k, G_k известны и не выписаны ввиду их громоздкости, причем $F_1 = N_1 = M_1 = G_1 = 0$ при $\mathbf{v}_0 = 0$.

Теперь, применяя второй итерационный процесс к системе Навье — Стокса (1.1), спроектированной на нормаль к свободной границе, выводим уравнение для поправки к давлению q_0 в D_Γ, из которого следует

$$q_0 = -\varkappa \int_s^\infty h_{\varphi 0}^2 ds. \tag{1.6}$$

Найдем значение q_0 на свободной границе. Интегрируя уравнение пограничного слоя в (1.5) по s на полуоси $(0, \infty)$, применяем интегрирование по частям, учитывая условия на Γ и интегрируя полученное уравнение по φ, выводим соотношение

$$\int_0^\infty h_{\varphi 0}^2 ds = \int_0^\infty f_0^2(s)\, ds + \int_{\varphi_0}^{\varphi} T\delta d\varphi. \tag{1.7}$$

Здесь $f_0(s) = h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$ — профиль скорости в пограничном слое в сечении $\varphi = \varphi_0$. Полагая $s = 0$ в (1.6) и учитывая (1.7), имеем

$$q_0 = -\varkappa \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} T\delta d\varphi + \int_0^\infty f_0^2(s)\, ds \right) \quad (s = 0). \tag{1.8}$$

Если при некотором φ_0 известен профиль скорости в пограничном слое, то значение погранслойной поправки к давлению на свободной границе определяется без решения задачи для пограничного слоя (1.5).

Приведем автомодельные решения задачи (1.5) для случая, когда поверхностное касательное напряжение задано степенным законом $T = \tau_0\varphi^n$. Автомодельные решения более общих уравнений стационарного пограничного слоя Марангони построены в [3]. Пусть φ — длина дуги контура Г, тогда $\delta = 1$. Введем функцию тока ψ по формулам $h_{\varphi 0} = \partial\psi/\partial s$, $H_{r2} = -\partial\psi/\partial\varphi$ и обозначим $\eta = s\varphi^{(n-1)/3}$. Представляя ψ в виде $\psi = \varphi^{(n+2)/3}g(\eta)$ для функции $g(\eta)$ из (1.5), выводим краевую задачу (начальный профиль задавать не надо, так как он определяется условием автомодельности)

$$(1.9)\qquad g''' + \frac{n+2}{3}gg'' - \frac{2n+1}{3}g'^2 = 0,\ g(0) = 0,\ g''(0) = -\tau_0,\ g'(\infty) = 0.$$

Соотношение (1.7) приводит к условию $\tau_0(n+1) > 0$. Функция $g(\eta)$ построена численно для различных n. Так, при $n = 0$ и $\tau_0 = 1$ функция $g(\eta)$ монотонно возрастает на полуоси $(0, \infty)$ от нуля до $g(\infty) = 1{,}481$. При $n = 1$ существует точное решение $g = \sqrt[3]{\tau_0}\left[1 - \exp\left(-\sqrt[3]{\tau_0}\eta\right)\right]$, где τ_0 положительно. При $n = -2$ уравнение (1.9) имеет степенное решение $g = \dfrac{6\sqrt[3]{-\tau_0}}{\eta\sqrt[3]{-\tau_0} + \sqrt[3]{12}} - \dfrac{6\sqrt[3]{-\tau_0}}{\sqrt[3]{12}}$. Здесь τ_0 отрицательно.

Теперь приведем краевые задачи для $\mathbf{v}_k$, p_k, определяющие течение вне области пограничного слоя. Уравнения для $\mathbf{v}_k$, p_k получаются применением первого итерационного процесса [6] к системе Навье — Стокса. Переносим все члены системы (1.1) в левую часть, которую обозначим через $P(\mathbf{V})$, где $\mathbf{V} = (v_x, v_z, p)$. Далее потребуем выполнения соотношения

$$(1.10)\qquad P(\mathbf{V}_N) = O(\varepsilon^{(N+1)/3}),\ \mathbf{V}_N = \left(\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{k/3}\mathbf{v}_k,\ \ \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{k/3}p_k\right).$$

Приравнивая в (1.10) последовательно нулю сумму коэффициентов при $\varepsilon^{k/3}$, для определения $\mathbf{v}_k$, p_k получаем системы уравнений

$$(1.11)\qquad \sum_{i+j=k}(\mathbf{v}_i, \nabla)\,\mathbf{v}_j = -\nabla p_k + \Delta\mathbf{v}_{k-3},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v}_k = 0\ \ (k = 0, 1, \ldots, N;\ v_{-1} = v_{-2} = v_{-3} = 0).$$

Краевые условия для систем (1.11) выводим применением первого и второго итерационных процессов одновременно к (1.2), (1.3). Обозначим через Γ_0 свободную границу невязкого течения $\mathbf{v}_0$, p_0. Вблизи Γ_0 введем локальные ортогональные координаты (r_1, φ_1) (r_1 — расстояние до Γ_0). Кривизну кривой Г представим в виде $\varkappa = \varkappa_0 + \varepsilon^{1/3}\varkappa_1 + \ldots$ ($\varkappa_0$ — кривизна контура Γ_0). Подставляем разложения (1.4) в (1.3) и в динамическое условие для нормального напряжения в (1.2) и переходим к координатам (r_1, φ_1). Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^{k/3}$, выводим краевые условия для систем (1.11), которые запишем в безразмерной форме

$$(1.12)\qquad \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_0 = -H_{r,k+1} + E_k,\ \ p_k + q_k + \zeta_k\frac{\partial p_0}{\partial r_1} - \frac{\varkappa_k}{\mathrm{Bo}} = R_k,\ \ (x, z) \in \Gamma_0.$$

Здесь $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_0; $\mathrm{Bo} = \rho g L_*^2/\sigma$ — число Бонда; $E_0 = R_0 = 0$. Коэффициенты E_k, R_k ($k \geqslant 1$) не выписаны ввиду их громоздкости. В координатах r_1, φ_1 коэффициент $\zeta_0 = 0$, так как $r_1 = 0$ — уравнение Γ_0.

Главные члены асимптотических разложений (1.4) $\mathbf{v}_0$, p_0, определяющие течение идеальной жидкости со свободной границей Γ_0, находятся при $k = 0$ из (1.11), (1.12) с учетом (1.8) и удовлетворяют краевой задаче

$$(\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 - \mathbf{e}_z, \ \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \ p_0 = p_* + \frac{\varkappa_0}{\mathrm{Bo}} + \varkappa_0 \left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T\delta d\varphi + \int\limits_0^{\infty} f_0^2(s)\, ds \right), \quad (x, z) \in \Gamma_0.$$

Таким образом, действие касательных напряжений на свободной границе жидкости малой вязкости приводит к появлению в динамическом краевом условии на свободной границе соответствующего течения идеальной жидкости (1.13) дополнительного члена, который можно интерпретировать как действие капиллярных сил с переменным коэффициентом поверхностного натяжения.

2. Рассмотрим случай отсутствия поля скоростей в невязкой жидкости. Определим форму свободной поверхности маловязкой жидкости, когда идеальная жидкость покоится ($\mathbf{v}_0 = 0$ и $p_* = 0$). Здесь $\mathbf{h}_1 = 0$. Из (1.13) следует, что свободная граница Γ_0, записанная в размерных переменных, удовлетворяет уравнению

$$\varkappa_0 \left(\sigma + \gamma + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T\delta d\varphi \right) = \rho g z + c, \quad c = \mathrm{const}, \tag{2.1}$$

$$\gamma = \int\limits_0^{\infty} f_{(}^2(s)\, ds = \mathrm{const},$$

которое имеет решение в квадратурах при отсутствии силы тяжести ($g = 0$). Пусть φ — длина дуги контура Γ_0, тогда $\delta = 1$. Запишем (2.1) в параметрической форме. Уравнение Γ_0 представим в виде $x = x(\varphi)$, $z = z(\varphi)$. Обозначим через $\beta(\varphi)$ угол наклона элемента линии Γ_0, полученного при возрастании φ к оси Ox. Тогда $x' = \cos \beta$, $z' = \sin \beta$. Уравнение границы Γ_0 принимает вид

$$\left(\sigma + \gamma + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi \right) x'' = \mp c z', \quad \left(\sigma + \gamma + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi \right) z'' = \pm c x'$$

где верхний или нижний знак выбирается в соответствии с тем, будет ли жидкость расположена под поверхностью Γ_0 относительно оси Oz или над ней. Нетрудно показать, что $\beta(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{\pm c}{\sigma + \gamma + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi}.$$

Теперь, определив $\beta(\varphi)$, находим уравнение Γ_0

$$x = c_1 + \int\limits_0^{\varphi} \cos \beta d\varphi, \quad z = c_2 + \int\limits_0^{\varphi} \sin \beta d\varphi, \tag{2.2}$$

$$\beta = c_3 \pm c \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sigma + \gamma + \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi}.$$

Здесь c_1, c_2 определяют декартовы координаты точки отсчета B длины дуги φ, а константа c_3 — угол наклона касательной к Γ_0 в точке B. Константа c находится из дополнительных условий в каждом конкретном случае.

Пример 1. Пусть жидкость заполняет полубесконечную полосу $-\infty \leqslant z \leqslant \zeta(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L$, ограниченную твердыми стенками $x = 0$, $x = L$ и свободной поверхностью Г. На Г действует постоянное касательное напряжение $T = \mathrm{const} > 0$. Отсчет параметра φ начинаем от стенки $x = 0$, причем положительное направление координаты φ выбирается совпадающим с направлением касательного напряжения. Уравнения пограничного слоя (1.5) имеют решение $h_{\varphi 0} = \varphi^{1/3} g'(\eta)$, где $\eta = s\varphi^{-1/3}$($g(\eta)$ численно определена из краевой задачи (1.9) при $n = 0$). В данном случае $\varphi_0 = 0$, $f_0(s) = 0$ и константа $\gamma = 0$. Уравнение (2.2) приводится к виду

$$x = c_1 + \frac{\sigma + T\varphi}{T^2 + c^2}(T\cos\beta + c\sin\beta),\quad z = c_2 + \frac{\sigma + T\varphi}{T^2 + c^2}(T\sin\beta - c\cos\beta), \tag{2.3}$$

$$\beta = c_3 + \frac{c}{T}\ln(1 + T\varphi/\sigma).$$

Константы c_1, c_2, c_3, c выразим через значения углов, образованных границей Γ_0 с твердыми стенками в точках контакта, а также через декартовы координаты точки отсчета переменной φ. Пусть $x = 0$, $z = 0$, $\beta = \beta_0$ при $\varphi = 0$ и $\beta = \beta_1$ при $x = L$. Систему уравнений для c, c_1, c_2, c_3 приводим к нелинейному алгебраическому уравнению относительно длины дуги φ_1 контура Γ_0

$$\left[1 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{\ln^2\left(1 + \frac{T\varphi_1}{\sigma}\right)}\right]\frac{TL}{\sigma} = \left(1 + \frac{T\varphi_1}{\sigma}\right)\cos\beta_1 - \cos\beta_0 +$$
$$+ \frac{\beta_1 - \beta_0}{\ln\left(1 + \frac{T\varphi_1}{\sigma}\right)}\left[\left(1 + \frac{T\varphi_1}{\sigma}\right)\sin\beta_1 - \sin\beta_0\right].$$

Теперь константы определяются формулами

$$c = \frac{T(\beta_1 - \beta_0)}{\ln(1 + T\varphi_1/\sigma)},\quad c_1 = L - \frac{\sigma + T\varphi}{T^2 + c^2}(T\cos\beta_1 + c\sin\beta_1),$$
$$c_2 = \frac{\sigma}{T^2 + c^2}(c\cos\beta_0 - T\sin\beta_0),\quad c_3 = \beta_0.$$

Например, при $\beta_0 = 0$ и $\beta_1 = \pi/2$ приведем численные значения $c = -1{,}507T$, $c_1 = -0{,}306\sigma/T$, $c_2 = -0{,}46\sigma/T$, $c_3 = 0$.

Отметим, что в (2.3) не входят функции пограничного слоя, проявляющие себя в окрестности твердых границ S и точек контакта S и Γ. В окрестности точек контакта асимптотические разложения носят более сложный характер. Функции пограничного слоя в этих областях дают вклад в уравнение свободной границы Γ лишь в высших приближениях, начиная со второго, и потому здесь не приводятся.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда жидкость примыкает к твердой вертикальной стенке $x = 0$ только с одной стороны при $x > 0$. Пусть на свободной границе Γ действует постоянное касательное напряжение $T = \mathrm{const} > 0$, направленное от стенки. Отсчет параметра φ выберем от стенки в сторону возрастания x. Так же как и в предыдущем примере, $\varphi_0 = f_0(s) = \gamma = 0$. Введем ось Oz так, чтобы $\zeta(\varphi) = 0$ при $\varphi = \infty$, тогда $c = 0$ в (2.1). Предположим, что $|\zeta'(\varphi)|$ мало, тогда линеаризованное уравнение (2.1) при $g \neq 0$ имеет решение

$$\zeta_0 = c_0\sqrt{\sigma + T\varphi}\,K_1\left(2\sqrt{\frac{\rho g}{T^2}(\sigma + T\varphi)}\right)$$

($K_1(t)$ — модифицированная функция Бесселя). Константа c_0 легко определяется значением угла смачивания в точке контакта жидкости и стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости // ДАН СССР.— 1975.— Т. 222, № 4.
2. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. of III European Symposium on Material Science in Space, Grenoble, 1979.

3. **Napolitano L. G., Golia C.** Marangoni boundary layers. Applications of space developments: Selection Paper 31 st. International Astronaut. Congress, Tokyo, 1980 // Acta Astronautica.— 1981.— V. 8, N 5—6.
4. **Pukhnachov V. V.** Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers.— Dublin: Bool Press, 1982.
5. **Кузнецов В. В.** Термокапиллярная конвекция в ампуле в условиях невесомости // Тр. I Всесоюз. шк.-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды.— Красноярск, 1983.
6. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН.— 1957.— Т. 12, № 5 (77).
7. **Кузнецов В. В.** О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 67.

Поступила 9/VI 1986 г.

УДК 532.526

НЕЛИНЕЙНЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ И ФОРМИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВИХРЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В. П. Реутов

(*Горький*)

В последние годы в гидромеханике значительно возрос интерес к проблеме перехода от ламинарного течения к турбулентному [1—3]. Большое значение для объяснения процессов, протекающих при переходе к турбулентности в сдвиговых течениях, имеет анализ нелинейных структур, возникающих в результате развития гидродинамической неустойчивости. Эксперименты показывают, что в пристеночных течениях, таких как пограничный слой и течение Пуазейля, возникновение турбулентности связано с формированием Λ-вихрей, характеризующихся значительной продольной (по отношению к направлению течения) составляющей завихренности [4—9]. В [10] обращено внимание на родственную связь этих вихрей с крупномасштабными организованными структурами, наблюдающимися в пристеночной области развитого турбулентного течения.

Теория Бинни и Линя [11, 12] связывает осцилляции продольной завихренности в переходном течении с нарастанием в нем пар наклонных (трехмерных) волн, имеющих одинаковые фазовые скорости и продольные составляющие волновых векторов. Мгновенный профиль поперечной скорости, определенный в [12] в рамках линейного приближения, демонстрирует два реверса скорости за период волны, тогда как в экспериментах [5, 10] наблюдались последовательности профилей с одним реверсом, что соответствует прохождению через неподвижного наблюдателя одного вихревого образования за период волны. В данной работе исследуются существенно нелинейные вихревые структуры, возникающие в критическом слое (КС) ламинарного течения при резонансном взаимодействии нарастающих в нем двумерных и наклонных волн. Анализ строится в рамках асимптотического подхода, опирающегося на использование малости толщины КС. При этом нелинейность может быть большой лишь в пределах тонкого КС. До настоящего времени основное внимание уделялось изучению двумерных КС (см., например, [13—15]). Задача о структуре КС в случае одной наклонной волны также сводится к двумерной [13]. Предлагаемое ниже объяснение механизма формирования Λ-вихрей основывается на анализе динамики трехмерного нелинейного КС в идеальном течении.

Механизм возникновения волнового триплета, эвристически введенного Бинни и Линем, выяснен в [16]. Согласно [16], генерация наклонных волн обусловлена их резонансным взаимодействием с второй гармоникой двумерной волны, находящейся в синхронизме с этой волной. Диаграмма сложения волновых векторов при таком процессе показана на рис. 1, *а* ($\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}_{1,2}$ — волновые векторы двумерной и наклонных волн соответственно). В случае одинаковых углов наклона между векторами $\mathbf{k}_{1,2}$ и $\mathbf{k}_0$ (симметричный триплет) из условий синхронизма следует равенство частот и фазовых скоростей волн $\mathbf{k}_{0,1,2}$ (оно достигается путем выбора угла между волновыми векторами двумерной и наклонных волн). В эксперименте зачастую возникает ситуация, когда собственная волна течения с волновым вектором $2\mathbf{k}_0$ сильно затухает. При этом условия синхронизма для генерации второй гармоники нарушаются и ее следует рассматривать как вынужденную волну. Возникает четырехволновой процесс, который описывается в третьем порядке теории возмущений по амплитудам волн. Поскольку амплитуда второй гармоники в данном случае мала, пульсации скорости и давления в потоке приближенно определяются волновым триплетом $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, все волны которого имеют одинаковые частоты. В [17] теоретически рассматривалась возможность гене-