

УДК 669.86:536.21

УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОМ ТВЕРДЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ, ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

1. НЕУСТОЙЧИВАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ

Р. В. Сагитов, А. Н. Шарифулин*

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия

* Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990 Пермь, Россия

E-mails: sagitovrv@mail.ru, albert.sharifulin@gmail.com

Исследована устойчивость стационарного конвективного течения в плоском наклонном слое жидкости, ограниченном идеально теплопроводными твердыми плоскостями, при наличии однородного продольного градиента температуры в условиях неустойчивой стратификации, когда слой наклонен таким образом, что температура в его нижней части больше, чем в верхней. Показано, что наличие наклона приводит к замене критических возмущений на длинноволновые четные спиральные возмущения. Приводятся карты устойчивости режимов течения для всего диапазона чисел Прандтля и углов наклона, соответствующих неустойчивой стратификации.

Ключевые слова: адвективное течение, наклонный слой жидкости, продольный градиент температуры, конвективная неустойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20170209

Введение. При наличии горизонтального градиента температуры в жидкости возникает ее движение. Если горизонтальные размеры области значительно превышают вертикальные, то движение жидкости происходит преимущественно в горизонтальном направлении и называется адвективным (атмосферная циркуляция Хэдли, бризы, некоторые типы движений в океане и мантии Земли, горизонтально направленная кристаллизация).

В работе [1] сформулирована задача об адвективном течении вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном плоском слое между твердыми идеально теплопроводными плоскостями с заданным постоянным горизонтальным градиентом температуры и получено ее точное решение. Решение для случая теплоизолированных границ получено позднее и экспериментально изучено в [2]. Этому решению соответствует нетривиальное плоскопараллельное конвективное течение, характеризующееся нелинейными профилями скорости и температуры. Устойчивость данного течения по отношению к малым возмущениям различного типа исследовалась во многих работах (см., например, [3–5]). Установлено, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 3.6990.2017/54).

в области малых значений числа Прандтля течение теряет устойчивость по отношению к плоским монотонным возмущениям, в области больших значений числа Прандтля наиболее опасными являются монотонные спиральные возмущения, в промежуточной области неустойчивость течения Бириха [1] обусловлена наличием колебательных спиральных возмущений.

Трансформация течения Бириха вследствие отклонения слоя от горизонтали, когда его более нагретая часть расположена ниже менее нагретой, рассмотрена в [6]. В предельном случае вертикального слоя с направленным вниз постоянным градиентом температуры скорость плоскопараллельного течения обращается в нуль и в слое возможно состояние покоя жидкости. Устойчивость этого равновесного состояния исследована в работе [7]. Установлено, что в случае вертикальной ориентации наиболее опасными являются длинноволновые монотонные четные спиральные возмущения. В работе [6] показано, что такие длинноволновые возмущения могут приводить к неустойчивости и плоскопараллельного течения, возникающего при отклонениях слоя от вертикального положения, несмотря на то что в случае строго горизонтальной ориентации, т. е. в задаче Бириха, длинноволновая неустойчивость отсутствует.

В данной работе исследуется влияние отклонений слоя от горизонтали на устойчивость плоскопараллельного течения по отношению ко всем типам плоских и спиральных возмущений, в случае когда слой поворачивается таким образом, что его более нагретая часть располагается ниже менее нагретой (неустойчивая стратификация). Такое исследование для случая идеально теплопроводных границ ранее не проводилось.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский бесконечный слой жидкости, ограниченный твердыми параллельными плоскостями (рис. 1). На обеих плоскостях задана температура, линейно меняющаяся в зависимости от координаты z :

$$x = \pm 1: \quad T = z.$$

Здесь и далее переменные и уравнения приведены в безразмерном виде, процедура обезразмеривания описана в работе [6]. Слой может поворачиваться вокруг оси y . Угол наклона $\alpha = 0^\circ$ соответствует подогреву снизу, $\alpha = 180^\circ$ — подогреву сверху. При горизонтальном положении слоя $|\alpha| = 90^\circ$. При таких условиях в слое возникает стационарное плоскопараллельное течение со скоростью \mathbf{v}_0 и профилем температуры T_0 , задаваемыми выражениями

$$\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0), \quad T_0 = z + \theta_0.$$

Структура этого плоскопараллельного адвективного течения исследована в [6]. Если слой расположен горизонтально ($|\alpha| = 90^\circ$) или стратификация в слое неустойчива ($|\alpha| < 90^\circ$), выражения для скорости v_0 и температуры T_0 имеют вид

$$v_0 = \frac{\text{Gr} \sin \alpha}{2\gamma^2} \left(\frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma} \right), \quad T_0 = z + \text{tg} \alpha \left(x - \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma} \right), \quad (1)$$

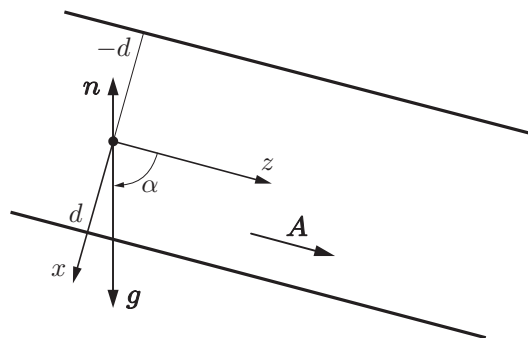


Рис. 1. Схема задачи

где

$$\gamma = \sqrt[4]{\text{Pr Gr} \cos \alpha}, \quad (2)$$

$\text{Gr} = g\beta Ad^4/\nu^2$, $\text{Pr} = \nu/\chi$ — числа Грасгофа и Прандтля, выраженные через полуширину слоя d и градиент температуры A ; g — ускорение свободного падения; β , ν , χ — коэффициент объемного расширения, кинематическая вязкость и температуропроводность соответственно.

Выражения (1), (2) в размерном виде были получены в работе [8]. При значении γ , кратном π , значения v_0 и θ_0 обращаются в бесконечность. Число Грасгофа Gr при $\gamma = \pi$ определяется выражением

$$\text{Gr}_0 = \frac{\pi^4}{\text{Pr} \cos \alpha}. \quad (3)$$

В области неустойчивой стратификации плоскопараллельное течение становится неустойчивым по отношению к длинноволновым четным спиральным возмущениям при достижении критического значения числа Грасгофа, определяемого выражением [6]

$$\text{Gr}_1 = \frac{\pi^4}{16 \text{Pr} \cos \alpha}. \quad (4)$$

Выполняя предельный переход $|\alpha| \rightarrow 90^\circ$, из (1), (2) можно получить решение при $|\alpha| = 90^\circ$:

$$v_0 = \sin \alpha (x - x^3) \frac{\text{Gr}}{6}, \quad \theta_0 = \sin \alpha \left(-\frac{7}{30}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 \right) \frac{\text{Gr Pr}}{12}.$$

Это решение принято называть решением Бириха [4].

Введем малые пространственные возмущения, пропорциональные $\exp(\lambda t + i(k_y y + k_z z))$. Рассмотрим два типа пространственных возмущений: 1) плоские возмущения в виде валов с осями, перпендикулярными направлению основного течения; 2) пространственные спиральные возмущения в виде валов с осями, параллельными основному потоку.

Для плоских возмущений ($k_y = 0$, $v_y = 0$) целесообразно ввести функцию тока ψ , связанную с амплитудами возмущений скорости соотношениями

$$v_x = -ik_z \psi, \quad v_z = \psi'.$$

В результате получаем спектральную амплитудную задачу для ψ и θ :

$$\begin{aligned} \psi^{\text{IV}} - 2k^2 \psi'' + k^4 \psi + ik(v_0'' \psi - v_0(\psi'' - k^2 \psi)) + \theta \sin \alpha \text{Gr} - \theta' \cos \alpha \text{Gr} &= \lambda(\psi'' - k^2 \psi), \\ \text{Pr}^{-1}(\theta'' - k^2 \theta) + ik(\theta_0' \psi - v_0 \theta) - \psi' &= \lambda \theta, \\ x = \pm 1: \quad \psi = \psi' = \theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(индекс z у k опущен).

Для спиральных возмущений ($k_z = 0$) после исключения давления и v_y из системы уравнений для амплитуд малых возмущений получаем спектральную амплитудную задачу для v_x , v_z , θ :

$$\begin{aligned} v_x^{\text{IV}} - 2k^2 v_x'' + k^4 v_x + \text{Gr} k^2 \theta \sin \alpha &= \lambda(v_x'' - k^2 v_x), \\ v_z'' - k^2 v_z - v_x v_0' - \text{Gr} \theta \cos \alpha &= \lambda v_z, \\ \text{Pr}^{-1}(\theta'' - k^2 \theta) - v_z - v_x \theta_0' &= \lambda \theta \end{aligned} \quad (6)$$

(индекс z у k опущен). При этом выполняются граничные условия

$$x = \pm 1: \quad v_x' = v_x = v_z = \theta = 0. \quad (7)$$

В силу четности v'_0 и θ'_0 данная задача имеет решения двух типов: четные и нечетные по x . Нечетные решения помимо условий (7) удовлетворяют условиям в центре слоя

$$x = 0: \quad v_x = v'_x = v_z = \theta = 0, \quad (8)$$

четные — условиям

$$x = 0: \quad v'''_x = v'_x = v'_z = \theta' = 0. \quad (9)$$

Спектральная краевая задача для амплитуд плоских возмущений (5) решалась методом дифференциальной прогонки с использованием метода пошагового интегрирования Рунге — Кутты — Фельберга 4–5-го порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования и контролем точности [9].

Решение краевой задачи (6), (7) для нечетных (четных) спиральных возмущений получено методом пошагового интегрирования с ортогонализацией в области $0 \leq x \leq 1$ и постановкой граничных условий (8), (9) в центре слоя ($x = 0$). Как и в случае плоских возмущений, пошаговое интегрирование проводилось методом Рунге — Кутты — Фельберга 4–5-го порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования и контролем точности. Метод ортогонализации, использованный в данной работе, реализован в виде, предложенном в [10]. Частота ортогонализации определялась путем подбора, в большинстве расчетов удавалось получить решение без использования процедуры ортогонализации.

2. Результаты исследования. В настоящей работе исследовалась устойчивость течения Бириха (1) по отношению к плоским, спиральным четным и спиральным нечетным малым возмущениям. Для возмущений каждого типа отдельно для монотонной и колебательных мод построены нейтральные кривые $\text{Gr}(k)$ и зависимости критического числа Грасгофа от числа Прандтля при различных углах наклона α .

2.1. *Предельный случай горизонтальной ориентации слоя* $|\alpha| = 90^\circ$. В данном случае исследуемое на устойчивость течение является известным течением Бириха [1]. Впервые устойчивость течения Бириха относительно плоских возмущений изучалась в работе [11], относительно колебательных спиральных возмущений — в [12]. В [11, 12] использовался метод Галеркина с малым количеством базисных функций. Результаты расчетов, проведенных в [13, 14] методами дифференциальной прогонки и пошагового интегрирования с ортогонализацией линейно независимых решений, позволяющими контролировать точность расчетов, хорошо согласуются с данными [11, 12]. Недостаточно точными, приведшими к неверному утверждению о большей опасности при больших числах Прандтля нечетных спиральных возмущений по сравнению с четными, оказались лишь результаты работы [12]. Результаты, полученные в настоящей работе и согласующиеся с данными [13, 14], приведены на рис. 2, а. При малых числах Прандтля наиболее опасны плоские монотонные возмущения. В диапазоне значений числа Прандтля $0,1371 \leq \text{Pr} \leq 0,4473$ наиболее опасны колебательные четные спиральные возмущения, в области $\text{Pr} > 0,4473$ — монотонные четные спиральные возмущения.

2.2. *Предельный случай* $\text{Pr} = 0$. В данном случае задача сводится к известной задаче о гидродинамической устойчивости течения с кубическим профилем скорости (см., например, [3]) по отношению к монотонным плоским возмущениям. Решение этой краевой задачи, полученное в настоящей работе, хорошо согласуется с данными [3], и из него следует выражение для минимального критического числа

$$\text{Gr}_m = \frac{495,629}{|\sin \alpha|}. \quad (10)$$

2.3. *Неустойчивость течения Бириха (1) при конечных значениях числа Прандтля.* Ниже приведены основные отличия нейтральных кривых при $|\alpha| < 90^\circ$ (“холодный” конец слоя расположен выше нагретого) от кривых при $|\alpha| = 90^\circ$ (строго горизонтальная

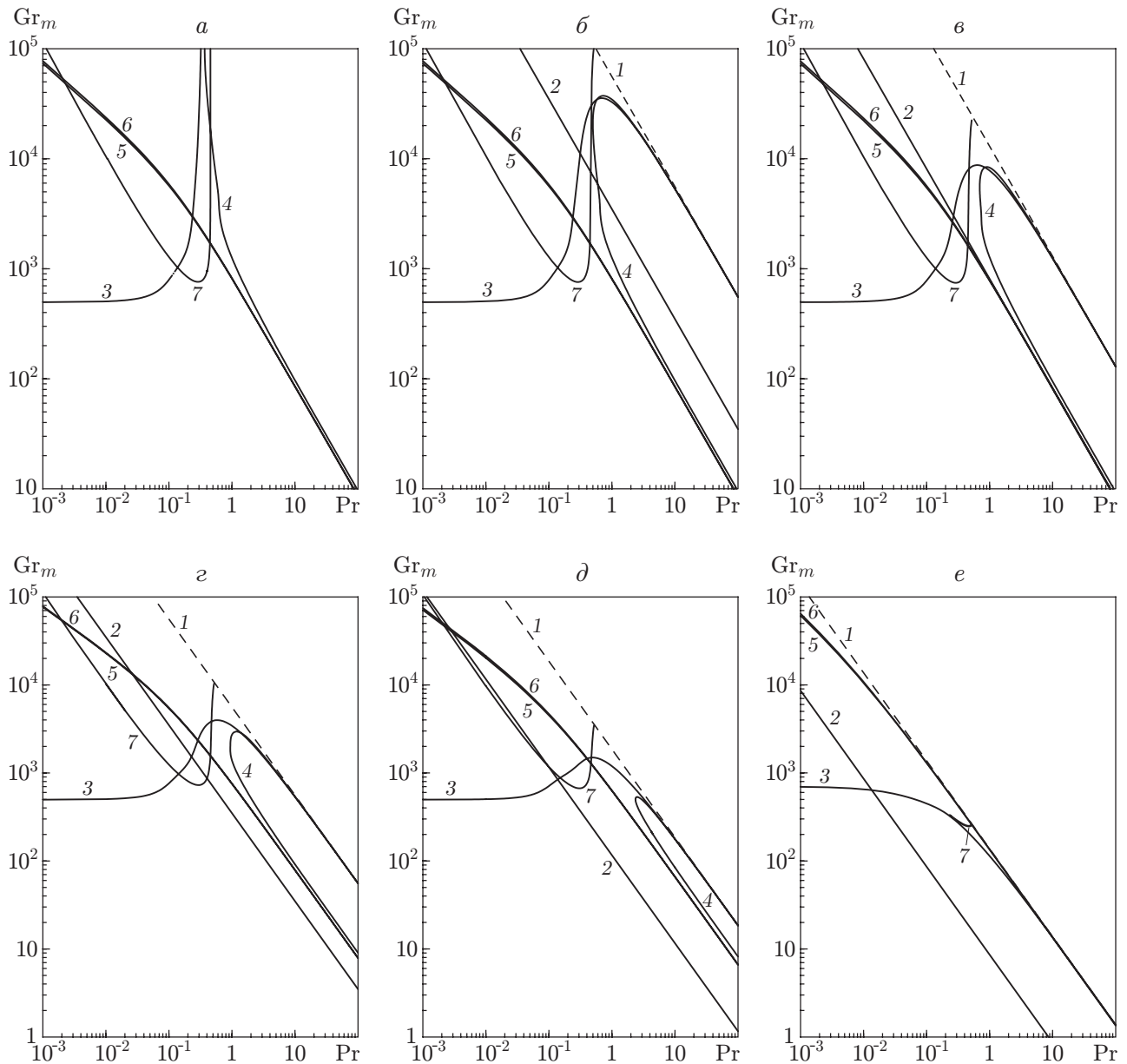


Рис. 2. Зависимость критического числа Грасгофа от числа Прандтля при различных значениях угла наклона α :

a — $\alpha = 90^\circ$, b — $\alpha = 89,9^\circ$, v — $\alpha = 89,57^\circ$, z — $\alpha = 89^\circ$, d — $\alpha = 87^\circ$, e — $\alpha = 45^\circ$;
 1 — расчет по формуле (3), 2 — расчет по формуле (4), 3 — плоские монотонные возмущения, 4 — плоские колебательные возмущения, 5 — спиральные монотонные четные возмущения, 6 — спиральные монотонные нечетные возмущения, 7 — спиральные колебательные возмущения

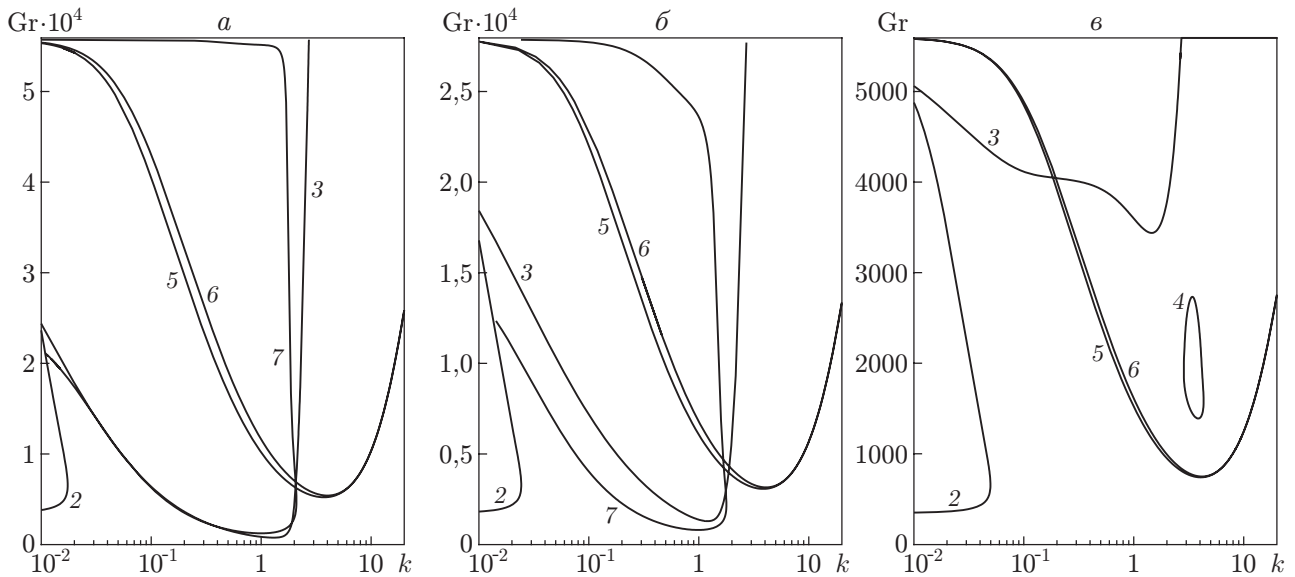


Рис. 3. Нейтральные кривые при $\alpha = 89^\circ$ и различных значениях числа Прандтля: a — $Pr = 0,1$, b — $Pr = 0,2$, v — $Pr = 1$; остальные обозначения те же, что на рис. 2

ориентация слоя). Значения числа Грасгофа, соответствующие нейтральным кривым при $|\alpha| < 90^\circ$, ограничены сверху значением Gr_0 , определяемым соотношением (3) (линия 1 на рис. 2). Как отмечено выше, при $Gr = Gr_0$ скорость плоскопараллельного течения и температура обращаются в бесконечность. Расчеты показывают, что ветви нейтральных кривых 5–7, соответствующих спиральным возмущениям различного типа, асимптотически приближаются к прямой, задаваемой соотношением (3) (рис. 3). При всех рассмотренных значениях Pr существует нейтральная кривая, имеющая минимум при $k = 0$ (кривая 2 на рис. 3) и соответствующая длинноволновым четным спиральным возмущениям. При небольших значениях числа Прандтля (см. рис. 3, a, b) от нее ответвляется нейтральная кривая спиральных четных колебательных возмущений (кривая 7). При увеличении числа Прандтля, как и при горизонтальной ориентации слоя, она исчезает.

Если угол отклонения от горизонтали составляет менее $0,43^\circ$ (см. рис. 2, b, v), то, как и при $|\alpha| = 90^\circ$, при малых значениях числа Прандтля $Pr < 0,14$ наиболее опасны плоские монотонные возмущения, а при $Pr > 0,45$ — монотонные четные спиральные возмущения. В промежуточной области чисел Прандтля наиболее опасны колебательные четные спиральные возмущения (см. рис. 2, b, v).

Дальнейшее увеличение угла отклонения слоя от горизонтального положения приводит к тому, что все опасные при $|\alpha| = 90^\circ$ возмущения при $Pr \neq 0$ не приводят к потере устойчивости (см. рис. 2).

При уменьшении угла наклона $\alpha = 89,57^\circ$ (см. рис. 2, v) до значения $\alpha = 89^\circ$ (см. рис. 2, a) диапазон промежуточных значений числа Прандтля, в котором наиболее опасны колебательные четные спиральные возмущения, сужается приблизительно на $1/4$. При $\alpha = 87,4^\circ$ эта область исчезает. Дальнейшее увеличение угла наклона слоя, т. е. уменьшение $|\alpha|$ приводит к значительному сужению диапазона чисел Прандтля, в котором наиболее опасны плоские монотонные возмущения. При уменьшении угла наклона на 42° (см. рис. 2, d, e) этот диапазон сужается более чем в 10 раз. Таким образом, область углов наклона $|\alpha| < 87,4^\circ$ характеризуется наличием критического значения числа Прандтля $Pr_0(\alpha)$, такого что при $Pr < Pr_0(\alpha)$ ($Pr > Pr_0(\alpha)$) наиболее опасны плоские монотонные (монотонные четные спиральные) возмущения. Зависимость $Pr_0(\alpha)$ при $Pr < 10^{-2}$ может

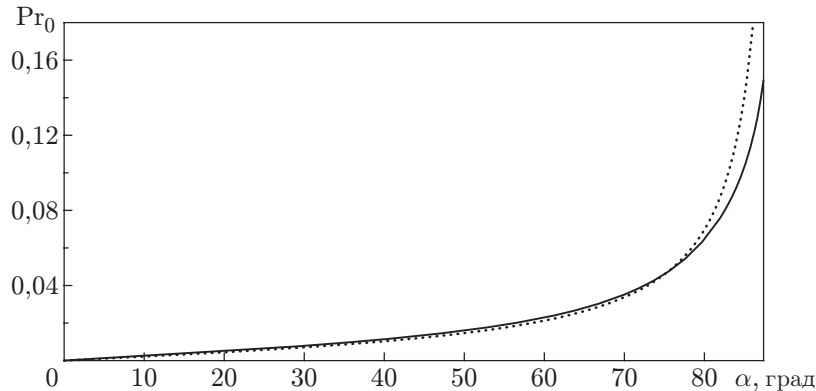


Рис. 4. Зависимость критического числа Прандтля от угла α в диапазоне $0^\circ < \alpha < 87,397^\circ$:
пунктирная линия — расчет по формуле (11)

быть получена не только численно, но и теоретически. Из рис. 2 следует, что в этой области чисел Прандтля кривая 3, соответствующая плоским монотонным возмущениям, горизонтальна, т. е. значения Gr_m определяются соотношением (10). Приравняв правые части (4) и (10) и решая получившееся уравнение, находим зависимость критического значения числа Прандтля от угла наклона

$$Pr_0(\alpha) = \frac{\pi^4}{16 \cdot 495,629} \operatorname{tg} \alpha \approx 0,0123 \operatorname{tg} \alpha. \quad (11)$$

Сравнение результатов решения спектральной задачи и результатов расчетов по формуле (11) показывает, что при $|\alpha| < 80^\circ$ зависимость критического числа Прандтля, разделяющего области неустойчивости по отношению к монотонным плоским возмущениям и к длинноволновым спиральным четным возмущениям, достаточно точно описывается соотношением (11) (рис. 4).

Заключение. Проведенные расчеты показывают, что при углах отклонения от горизонтали, меньших $0,43^\circ$, при значениях числа Прандтля $Pr < 0,14$ наиболее опасны плоские монотонные возмущения, а при $Pr > 0,45$ — монотонные четные спиральные возмущения. В промежуточной области чисел Прандтля наиболее опасны колебательные четные спиральные возмущения. Увеличение угла отклонения от горизонтали приводит к замене наиболее опасных возмущений в области $Pr > 0,45$ на длинноволновые четные спиральные возмущения и к распространению этой области в область малых значений числа Прандтля. При достижении значения угла отклонения от горизонтали, равного $2,6^\circ$, область, в которой наиболее опасны колебательные четные спиральные возмущения, включается в область, в которой наиболее опасны длинноволновые четные спиральные возмущения. Дальнейшее увеличение угла отклонения от горизонтали приводит к значительному сужению диапазона чисел Прандтля, в котором наиболее опасны плоские монотонные возмущения. Результаты расчетов с использованием полученной аналитической зависимости числа Прандтля от угла наклона слоя хорошо согласуются с результатами расчетов при $|\alpha| < 80^\circ$.

Авторы выражают благодарность В. К. Андрееву, В. В. Пухначеву и Р. В. Бириху за внимание к работе, полезное обсуждение и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. **Kirdyashkin A. G.** Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27, N 8. P. 1205–1218.
3. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
4. **Андреев В. К.** Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2010.
5. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
6. **Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н.** Длинноволновая неустойчивость адвективного течения в наклонном слое жидкости с идеально теплопроводными границами // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 13–21.
7. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.
8. **Остроумов Г. А.** Свободная тепловая конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.
9. **Лобов Н. И.** Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: Учеб. пособие / Н. И. Лобов, Д. В. Любимов, Т. П. Любимова. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2004.
10. **Бирих Р. В., Рудаков Р. Н.** Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений // Учен. зап. Перм. гос. ун-та. 1974. Вып. 316. С. 149–158.
11. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М.** Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое // ПМТФ. 1974. № 1. С. 95–100.
12. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М.** Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ. 1974. № 5. С. 145–147.
13. **Бирих Р. В., Катанова Т. Н.** Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость адвективного течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 1. С. 16–22.
14. **Бирих Р. В.** Конвективная неустойчивость. Влияние тонких проницаемых перегородок и высокочастотных вибраций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Пермь, 1999.

*Поступила в редакцию 13/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 4/V 2016 г.*