РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2019 № 5

УДК 539.4 : 622.023.23

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ГОРНЫХ ПОРОД

В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru, *пр. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрены критерии разрушения и предельного состояния, широко применяемые для оценки прочности горных пород и строительных материалов. Представлена компьютерная двумерная модель деформирования цементной оболочки в обсаженной цементированной скважине внутри породного массива под действием внутреннего давления в обсадной колонне и внешнего давления горных пород. Модель имеет несколько научно обоснованных и экспериментально подтвержденных критериев прочности для определения режимов разрушения и потенциальных зон повреждения цементной оболочки. Проведена серия расчетов напряженно-деформированного состояния цементной оболочки, в которых варьировались геометрические параметры и нагружения. Выполнен критический анализ локальных и нелокальных критериев разрушения. Сравнение эквивалентных напряжений позволило отобрать шесть критериев разрушения, рекомендуемых для прогнозирования и оценки сопротивления цементной оболочки нагрузкам.

Прочность, разрушение, скважина, обсадная колонна, цементная оболочка, критерии разрушения

DOI: 10.15372/FTPRPI20190509

Традиционный подход к расчетам конструкций на прочность — сопоставление возникающих в деформированном теле внутренних напряжений с некоторым предельным значением. В локальных критериях разрушения зарождение макроразрушения зависит только от напряженно-деформированного состояния в некоторой точке материала или конструкции. Процедура применения локальных критериев заключается в сравнении в каждой материальной точке конструкции эквивалентного напряжения с критическим значением. Большинство нелокальных критериев прочности основано на представлении о формировании в материале зоны предразрушения, в которой происходит локальное перераспределение напряжений, в то время как основной материал деформируется упруго вплоть до разрушения. Последнее рассматривается как физический процесс, происходящий не в математической точке, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения, а в некоторой малой окрестности (зоне предразрушения). Общее свойство этих критериев — введение внутреннего размера материала, характеризующего структуру, что позволяет расширить область применения по сравнению с традиционными критериями. Необходимо учитывать, что горные породы и цемент имеют

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00528).

сложную микроструктуру и при разрушении проявляют так называемый эффект размера (size effect), когда прочность — это не только свойство материала, но и функция размера и формы нагружаемого образца [1, 2]. В данной работе выполнен последовательный анализ возможности реализации локальных и нелокальных критериев прочности к определению режимов разрушения и потенциальных зон повреждения цементной оболочки.

ОБЗОР КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотрим критерии разрушения для оценки прочности горных пород, бетона, цемента, гипса и других строительных материалов.

Традиционный подход к расчетам на прочность заключается в использовании критериев разрушения материала, которые сопоставляют некоторые скалярные функции тензора напряжений с параметрами материала, определяемыми из стандартных экспериментов. Критерий разрушения имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{equ}} = \sigma_{\mathrm{crit}}, \tag{1}$$

где $\sigma_{\mathrm{equ}} = f(\sigma_{ij})$ — эквивалентное напряжение; $\sigma_{\mathrm{crit}} = \mathrm{const}$ — прочность материала. Эквивалентное напряжение σ_{equ} характеризует напряженное состояние тела и является функцией компонент тензора напряжений σ_{ij}.

Один из основных классических критериев разрушения материалов — критерий максимальных растягивающих напряжений. Для сложного напряженного состояния с главными напряжениями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ при растяжении ($\sigma_1 > |\sigma_3|$) условие разрушения

$$\sigma_1 = \sigma_t, \tag{2}$$

где σ_t — предел прочности материала на растяжение. В (2) учитывается только наибольшее из главных напряжений, а влияние двух остальных полностью игнорируется. Напряженное состояние отличается от одноосного, что не приводит к положительным результатам. Однако критерий максимальных растягивающих напряжений получил широкое распространение благодаря физической ясности, простоте, экспериментальному подтверждению для хрупких и квазихрупких материалов.

Критерий максимальных касательных напряжений отражает тот наблюдаемый в экспериментах факт, что пластическое течение — результат скольжения материала по плоскостям действия максимальных касательных напряжений. Для сложного напряженного состояния имеем $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, а для одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma_Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) — $\tau_{\max} = \sigma_Y / 2$, где σ_Y — предел текучести. Таким образом,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y. \tag{3}$$

Критерий (3) подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Тем не менее он не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2, которое, как показывают эксперименты, оказывает незначительное влияние на прочность материалов. Следует отметить, что этот критерий разрушения дает удовлетворительные результаты и для описания разрушения хрупких материалов, когда разрушение путем отрыва невозможно и происходит за счет сдвига по плоскостям действия $\tau_{\max}$. Так разрушаются образцы из хрупких материалов при сжатии. Таким образом, критерий максимальных касательных напряжений позволяет рассматривать предельные состояния хрупкого сдвига и текучести с единой точки зрения.

В [3, 4] предложены критерии предельного состояния и разрушения на основе новых инвариантов тензора напряжений, полученных осреднением нормальных и касательных напряжений. В плоскости $\sigma_n - \tau_n$ диаграммы Мора осреднение касательных напряжений проводится следующим образом:

$$\left\langle \tau_n \right\rangle_S = \frac{1}{S}\iint\limits_S \tau_n ds, \quad \left\langle \tau_n \right\rangle_L = \frac{1}{L}\oint\limits_L \tau_n dl\,, \tag{4}$$

где σ_n, τ_n — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке с произвольной нормалью n; S — область, представляющая три полукруга Мора; L — граница этой области.

Первый интеграл (4) соответствует осреднению по всевозможным площадкам элементарного объема, а второй (криволинейный) — осреднению только по трем семействам площадок, которые проходят через главные направления тензора напряжений. В первом случае среднее касательное напряжение совпадает с точностью до множителя с максимальным касательным напряжением:

$$\left\langle \tau_n \right\rangle_S = \frac{2}{\pi}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\,.$$

Во втором случае осреднение по контуру L приводит к результату

$$\left\langle \tau_n \right\rangle_L = \frac{1}{2\pi}\frac{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2}{\sigma_1 - \sigma_3}\,. \tag{5}$$

Полученное соотношение учитывает промежуточное главное напряжение σ_2. Построенные инварианты тензора напряжений используются для формулировки условий предельного состояния и разрушения.

Для материалов с существенно различным сопротивлением сжатию и растяжению теория прочности Кулона – Мора экспериментально обоснована. Наиболее широко она применяется в механике горных пород. Для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению – сжатию, предполагается, что в случае сжатия касательное напряжение τ_n является линейной функцией нормального напряжения σ_n, действующего на той же площадке. Таким образом, в плоскости разрушения

$$\tau_n = c - \sigma_n \operatorname{tg}\varphi\,,$$

где сцепление c и угол внутреннего трения φ — константы материала. В частном случае при $\varphi = 0$ получается критерий максимального касательного напряжения, а сцепление c равно пределу текучести при чистом сдвиге $c = \tau_{\mathrm{Y}}$. В главных напряжениях критерий Кулона – Мора принимает вид [5]

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\sigma_3 = \sigma_t\,, \tag{6}$$

где σ_t, σ_c — пределы прочности материала на растяжение и сжатие соответственно. В терминах c и φ критерий разрушения Кулона – Мора может быть записан как [6]

$$\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - 2c\cos\varphi = 0\,.$$

Гипотеза Кулона – Мора (как и критерий максимальных касательных напряжений) не учитывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2. В этом ее недостаток. Опыты показывают, что точные результаты гипотеза Кулона – Мора дает для напряженных состояний смешанного типа, когда σ_1 и σ_3 имеют разные знаки.

В [7] исследовано влияние выбора поверхности текучести упругопластического материала на результаты математического моделирования коллизии плит при их тектонических движениях. Рассмотрены три модели поверхности текучести: Хубера – Мизеса, конической Друкера – Прагера и параболической Друкера – Прагера. В пространстве главных напряжений эти поверхности текучести представляются соответственно цилиндром, конусом и параболоидом вращения с осями, совпадающими с гидростатической осью. На плоскости $\sigma_n \sim \tau_n$ огибающие кругов Мора (отделяющие области упругого деформирования от областей, в которых напряженно-деформированное состояние соответствует пластическому течению или разрушению) аппроксимируются прямыми линиями или параболой. Предположим, что функция текучести не зависит от третьего инварианта тензора напряжений, т. е. из рассмотрения исключаются классические поверхности текучести Треска (критерий максимальных касательных напряжений) и Кулона – Мора.

Конический критерий текучести Друкера – Прагера является обобщением критерия Хубера – Мизеса и включает влияние гидростатического напряжения. Он может быть записан как

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0\,, \tag{7}$$

где $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — первый инвариант тензора напряжений Коши; $J_2 = [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]/6$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений Коши; α и K — коэффициенты, зависящие от сцепления c и угла внутреннего трения φ [6, 7]. В пространстве главных напряжений поверхность текучести Друкера – Прагера — правильный круговой конус, размеры которого можно подвести под размеры пирамиды Кулона – Мора, выбрав соответствующие значения α и K. Если предположить, что поверхность текучести Друкера – Прагера описывает поверхность текучести Кулона – Мора, то выражения для α и K будут следующие:

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}, \quad K = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}. \tag{8}$$

В терминах пределов прочности на растяжение и сжатие α и K записываются соответственно:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}, \quad K = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \tag{9}$$

Параболический критерий текучести Друкера – Прагера имеет вид [7]

$$\sqrt{\alpha I_1 + J_2} - K = 0\,, \tag{10}$$

где

$$\alpha = \frac{2c\sin\varphi}{\sqrt{9+3\sin^2\varphi}}, \quad K = \frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{9+3\sin^2\varphi}}. \tag{11}$$

В терминах σ_t и σ_c выражения для α и K выглядят так [8]:

$$\alpha = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{3}, \quad K = \sqrt{\frac{\sigma_c \sigma_t}{3}}. \tag{12}$$

Отметим, что функция текучести (10) описывает предельные состояния материалов, полученных в экспериментах, точнее функции (7), т. е. огибающая в виде параболической кривой (10) для всех известных материалов лучше согласуется с экспериментами, чем огибающая в форме прямых линий (7), которые являются сторонами угла, равного 2φ на плоскости $\sigma_n \sim \tau_n$.

Критерий текучести Вильяма – Варнке [9] применяется для прогнозирования разрушение бетона и других структурно-неоднородных материалов, таких как горные породы, грунт и керамика. Его можно представить в виде функции $f(I_1, J_2, J_3) = 0$, где I_1 — первый инвариант тензора напряжений Коши; J_2 и J_3 — второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений Коши. Для использования критерия необходимо определить три параметра материала: σ_c — прочность при одноосном сжатии; σ_t — прочность при одноосном растяжении; σ_b — прочность при двуосном сжатии. В терминах I_1, J_2, J_3 критерий текучести Вильяма – Варнке выражается таким образом:

$$\sqrt{J_2} + \alpha(J_2, J_3)\left(\frac{I_1}{3} - K\right) = 0, \tag{13}$$

где α зависит от J_2, J_3 и трех параметров материала, а K — только от одного параметра материала. Функцию α интерпретируют как угол внутреннего трения, который зависит от угла Лоде θ, а величину K — как сцепление. Поэтому критерий текучести Вильяма – Варнке рассматривается как комбинация критериев текучести Кулона – Мора и Друкера – Прагера.

Разрушение идеального кристаллического твердого тела с трещиной исследуется как дискретный процесс. В [10] предположено для оценки прочности хрупкого упругого тела в окрестности сингулярных точек поля напряжений осреднять последние в пределах межатомного расстояния и сравнивать с теоретической прочностью на разрыв. Этот подход относится к микроуровню, а для трещин, встречающихся в инженерной практике, необходимо переходить на следующий масштабный уровень, используя другие порядки размеров зон осреднения, например размер зерна либо пластической зоны. Считаем, что напряженное состояние на участке d определяет момент разрушения. Тогда интегральный критерий Новожилова примет вид:

$$\hat{\sigma}_\theta = \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_\theta(r)dr = \sigma_t, \tag{14}$$

где $\hat{\sigma}_\theta$ — усредненное на расстоянии d по опасному сечению окружное напряжение. Размер усреднения d считается характеристикой материала и зависит от разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристик трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, получим оценку параметра d в виде $d = 2/\pi(K_{\mathrm{I}c}/\sigma_t)^2$, где $K_{\mathrm{I}c}$ — критический коэффициент интенсивности напряжений. Необходимость усреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим со структурными составляющими материала и намного меньше размеров выработки, полости, скважины и т. п. Введение размерного параметра d в критерий прочности позволяет описать эффект размера.

Интегральный критерий Новожилова (14) относится к нелокальным критериям разрушения и аналогичен традиционным критериям разрушения с той разницей, что в расчет его левой части помимо компонент тензора напряжений входит структурный параметр размерности длины. Вычисленная таким образом величина эквивалентного напряжения сравнивается с пределом прочности материала на растяжение.

К нелокальным критериям разрушения относятся также градиентные критерии, в которых достижение предельного состояния в данной точке тела определяется не только величиной действующих напряжений, но и градиентами. Таким образом, градиентные критерии учитывают неоднородность поля напряжений в окрестности этой точки.

Рассмотрим концентратор напряжений, вблизи которого распределение окружных напряжений $\sigma_\theta(r)$ по опасному сечению (рис. 1, кривая *1*) примем линейным (рис. 1, прямая *2*):

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_{\max} + \left(\frac{d\sigma_\theta}{dr}\right)_{\max} r, \quad r \geq 0 \,. \tag{15}$$

Здесь $\sigma_{\max}$ и $(d\sigma_\theta / dr)_{\max}$ вычисляются в точке концентрации напряжений $r = 0$. Интегральный критерий (14) с подынтегральной функцией (15) и областью интегрирования $[0; 2d]$ приводит к выражению

$$\sigma_{\max}\left(1 - \frac{d}{L_\sigma}\right) = \sigma_t \,, \tag{16}$$

где $L_\sigma = \sigma_{\max} / \left|d\sigma_\theta / dr\right|_{\max}$. Градиентный критерий (16) предложен Лайтаем [11]. При $d = 0$ он переходит в традиционный критерий максимальных растягивающих напряжений (2).

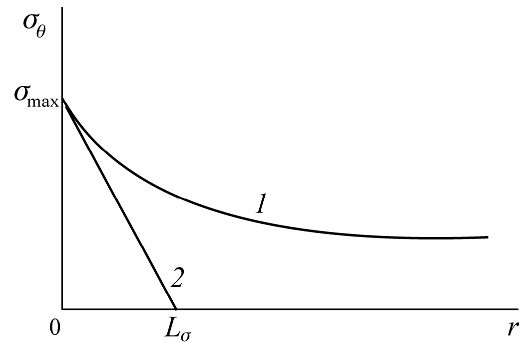

Рис. 1. Геометрическая интерпретация параметра L_σ: *1* — распределение окружных напряжений по опасному сечению; *2* — линейное распределение

В силу принятого допущения о линейном распределении напряжений область применения критерия (16) ограничена условием $d \ll L_\sigma$. Расширение этой области достигается только за счет отказа от исходной идеи об усреднении напряжений в пределах структурного элемента. Но и в этом случае остается ограничение $d < L_\sigma$, поскольку использование критерия в области $d \geq L_\sigma$ не имеет физического смысла. Устранение недостатков, присущих критерию Лайтая, возможно на основе подхода, в соответствии с которым локальная прочность материала предполагается зависящей от размера зоны концентрации напряжений L_σ [12–16]. Если размер L_σ достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала, то величина локальной прочности не отличается от величины предельного напряжения σ_t, определенной в условиях однородного распределения напряжений. Наоборот, если L_σ сопоставим с размерами структурных элементов, влияние на локальную прочность становится заметным. Причем оно тем больше, чем меньше размер L_σ по отношению к характерному размеру структуры материала d.

Таким образом, локальная прочность материала зависит не только от размера зоны концентрации напряжений L_σ, но и от соотношения d / L_σ, которое характеризует масштаб в рассматриваемой задаче. Условие достижения предельного состояния представляется в виде [15]

$$\frac{\sigma_{\max}}{1+\sqrt{d / L_\sigma}} = \sigma_t . \tag{17}$$

В [17, 18] показаны результаты экспериментального определения критического давления в момент образования сдвиговых трещин на образцах из гипса, содержащих искусственные дефекты в виде цилиндрических отверстий. В [19] доломитовый известняк и поташ испытываются на одноосное сжатие. Результаты аналогичных экспериментов на образцах из гранита приведены в [20]. Экспериментальные данные описываются зависимостью критического давления от диаметра отверстия, полученной на основе (16). Исследование процессов разрушения образцов горных пород при сжатии привело к выводу о необходимости учета градиентов напряжений [21–23]. Полученные экспериментальные данные демонстрируют существенный эффект размера, т. е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С уменьшением диаметра отверстия критическое давление повышается, достигая предела прочности на сжатие. С увеличением диаметра отверстия критическое давление асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение. Такое поведение объясняется градиентными критериями.

2*D*-МОДЕЛЬ ЦЕМЕНТНОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим компьютерную двумерную модель деформирования цементной оболочки в обсаженной цементированной скважине внутри породного массива под действием внутреннего давления в обсадной колонне и внешнего давления горных пород. В породном массиве пробурена скважина, в которую вставлена стальная труба (обсадная колонна), пространство между ней и горной породой заполнено цементом. Ось обсадной колонны сдвинута относительно оси скважины на некоторое расстояние a. Направление сдвига составляет угол α с направлением действия минимального главного напряжения $\sigma_{\min}$ в породном массиве, $\sigma_{\max}$ — максимальное главное напряжение (рис. 2). Внутренняя поверхность обсадной колонны нагружена давлением жидкости p. Цементная оболочка полагается нелинейно упругим материалом, обсадная колонна и порода — линейно упругими. На границах между ними рассматривается условие полного сцепления (проскальзывания нет). Предполагается, что условия плоской деформации выполнены.

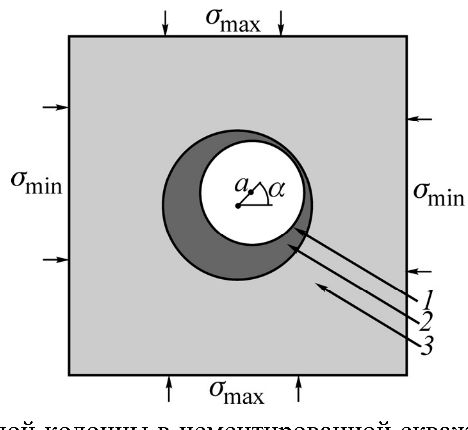

Рис. 2. Расположение обсадной колонны в цементированной скважине: *1* — сталь; *2* — цемент; *3* — порода

Задача решалась методом конечных элементов. Геометрические размеры: сторона квадрата — 800 мм, диаметр скважины — 220 мм, внутренний диаметр трубы — 160 мм, толщина стенки — 10 мм. Расчетная область покрывалась сеткой из 102 730 четырехугольных 8-узловых элементов с квадратичной аппроксимацией смещений. Расчет напряженно-деформированного состояния выполнялся в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2018 [24]. Диаграмма $\sigma-\varepsilon$ одноосного деформирования цемента задавалась таблично и вводилась в определяющие соотношения нелинейно упругого материала при малых деформациях. Использовалась пошаговая процедура интегрирования уравнений равновесия, в качестве монотонно возрастающего параметра нагружения выбиралось внутренне давление в трубе. Результатом вычислений является тензор напряжений, рассчитанный в каждом узле сетки конечных элементов цементной оболочки и породы. Для определения потенциальных зон разрушения цементной оболочки вычисляется эквивалентное напряжение σ_{equ}, соответствующее тому или иному критерию разрушения, которое затем сравнивается с критическим напряжением σ_{crit}. В качестве примера показаны четыре потенциальные зоны разрушений цементной оболочки, полученные в одном из расчетов, представлены изолинии разности $\sigma_{\text{equ}}-\sigma_{\text{crit}}>0$ (1) (рис. 3).

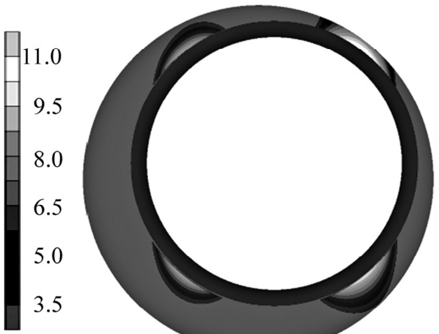

Рис. 3. Зоны потенциальных разрушений цементной оболочки

В расчетах использовались материалы со следующими механическими свойствами: модуль Юнга $E=200$, 10, 20 ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.27$, 0.15, 0.25 для стали, цемента и породы соответственно. Прочностные свойства цемента: $\sigma_t=3.5$ МПа, $\sigma_c=35$ МПа, $\sigma_b=\sqrt{2}\sigma_c=49.5$ МПа, $c=5.53$, $\varphi=54.9°$, $K_{\text{Ic}}=0.28$ МПа$\sqrt{\text{м}}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

С целью проверки упомянутых критериев разрушения проведена серия из двенадцати расчетов напряженно-деформированного состояния цементной оболочки, в которых варьировались геометрические параметры a, α при неизменных радиусах скважины и обсадной колонны, а также параметры нагружения p, $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$. Определялись узел сетки конечных элементов, в котором максимальное главное напряжение σ_1 достигало наибольшее значение в цементной оболочке, и направление действия σ_1. В этом узле вычислялось эквивалентное напряжение σ_{equ} для каждого локального критерия разрушения. Точка максимальной концентрации напряжений во всех расчетах находилась на границе раздела сталь – цемент. В соответствии с гипотезой Эрдогана – Си трещина растет по нормали к направлению наибольшего растягивающего напряжения таким образом, что компонента напряжения сдвига на линии ожидаемого распространения трещины равна нулю [25]. В левой части критерия Новожилова (10) интегрирование σ_1 выполнялось в направлении, нормальном направлению действия σ_1, а для градиентных критериев вычислялся градиент σ_1 в том же направлении. Потенциальные зоны разрушения определялись как области, в которых эквивалентное напряжение σ_{equ} превышало соответствующее критическое значение σ_{crit}. Четыре такие зоны для критерия максимальных растягивающих напряжений показаны на рис. 3.

Ниже представлены параметры трех типичных вариантов:

A — геометрия: $a = 14$ мм, $\alpha = 0^\circ$. Внутренне давление на трубу $p_w = 50$ МПа, напряжения породного массива: $\sigma_{\min} = 15$ МПа, $\sigma_{\max} = 45$ МПа. Полученные в расчете главные напряжения в точке максимальной концентрации: $\sigma_1 = 12.0043$ МПа, $\sigma_2 = -6.9055$ МПа, $\sigma_3 = -58.0411$ МПа;

B — геометрия: $a = 14$ мм, $\alpha = 45^\circ$. Внутренне давление на трубу $p_w = 30$ МПа, напряжения породного массива: $\sigma_{\min} = 15$ МПа, $\sigma_{\max} = 45$ МПа. Полученные в расчете главные напряжения в точке максимальной концентрации: $\sigma_1 = 10.8808$ МПа, $\sigma_2 = -6.4144$ МПа, $\sigma_3 = -53.6431$ МПа;

C — геометрия: $a = 14$ мм, $\alpha = 0^\circ$. Внутренне давление на трубу $p_w = 100$ МПа, напряжения породного массива: $\sigma_{\min} = 20$ МПа, $\sigma_{\max} = 25$ МПа. Полученные в расчете главные напряжения в точке максимальной концентрации: $\sigma_1 = 9.0136$ МПа, $\sigma_2 = -5.7463$ МПа, $\sigma_3 = -47.18$ МПа.

Представленное ниже значение величины $\sigma_{\text{equ}} - \sigma_{\text{crit}}$ (1) вычислялось по каждому критерию разрушения $(2)-(17)$ в расчетных случаях A, B, C.

Критерий разрушения	A	B	C
Максимальные растягивающие напряжения (2)	10.00	7.38	5.51
Максимальные касательные напряжения (3)	34.02	30.51	26.35
Ревуженко (5)	16.90	14.76	12.67
Кулона – Мора (6)	12.91	12.75	10.23
Конический Друкера – Прагера (8)	6.69	7.05	5.06
Конический Друкера – Прагера (9)	6.38	6.50	4.72
Параболический Друкера – Прагера (11)	32.76	28.45	24.12
Параболический Друкера – Прагера (12)	20,18	18.09	13.30
Вильяма – Варнке (13)	13.83	12.06	9.65
Новожилова (14)	9.62	6.36	4.46
Лайтая (16)	9.24	5.09	3.28
Новопашина – Сукнева (17)	7.60	3.96	2.52

На основании выполненных расчетов проведен сравнительный анализ локальных и нелокальных критериев разрушения, позволивший сделать аргументированный выбор нескольких критериев разрушения, потенциально пригодных для двумерной модели целостности цементной оболочки. Этот выбор базируется на следующих принципах: возможность практического применения, т. е. критерии содержат параметры материала, которые на практике обычно известны или для которых существуют отработанные методики измерения; наличие экспериментального подтверждения критерия в литературе либо другого научного обоснования; использование всех трех главных напряжений; учет эффекта размера; оптимистичность прогноза прочности. При отборе критериев разрушения необходимо рассматривать три основных режима разрушения цементной оболочки: сдвиговое разрушение; разрушение при растяжении; отслаивание цементной оболочки от обсадной колонны или прилегающей породы.

Все критерии, приведенные в таблице, имеют экспериментальное подтверждение, однако сильно различаются по значению величины $\sigma_{\text{equ}} - \sigma_{\text{crit}}$. Более оптимистичные прогнозы относительно сопротивления цемента нагрузкам дают критерии с минимальным значением разности $\sigma_{\text{equ}} - \sigma_{\text{crit}}$. Под оптимизмом понимается способность критерия давать более высокие значения критической нагрузки. К таким критериям относятся: максимальные растягивающие напряжения, оба конических критерия Друкера – Прагера, критерии Новожилова, Лайтая и Новопашина – Сукнева. По результатам пробных расчетов отобрано 6 перспективных критериев, наиболее подходящих для использования в компьютерной модели. Это конические критерии Друкера – Прагера (8), (9), параболический критерий Друкера – Прагера (12), критерии Вильяма – Варнке (13), Лайтая (16) и Новопашина – Сукнева (17). По режимам разрушения эти критерии распределены так: разрушение при сдвиге — конические и параболический Друкера – Прагера; разрушение при растяжении — Вильяма – Варнке, Лайтая, Новопашина – Сукнева; отслоение цементной оболочки от обсадной колонны или прилегающей породы — конический (8) и параболический Друкера – Прагера, Новопашина – Сукнева.

ВЫВОДЫ

Проанализированы преимущества и недостатки широко распространенных критериев разрушения хрупких материалов. Сформулированы требования к критериям разрушения: наличие экспериментального подтверждения, использование трех компонент главных напряжений и учет эффекта размера. В компьютерную модель деформирования цементной оболочки внутри обсаженной нефтяной скважины внедрены критерии прочности с целью определения режимов разрушения и потенциальных зон повреждения цементной оболочки. Выполнено исследование чувствительности модели к давлению в скважине и напряжениям в горном массиве. С помощью расчетов проведен сравнительный анализ локальных и нелокальных критериев разрушения, позволивший сделать обоснованный выбор нескольких критериев разрушения, потенциально пригодных для двумерной модели целостности цементной оболочки. Окончательное решение об адекватности и практическом применении каждого из критериев принимается после сравнения с экспериментальными данными на основе экспертной оценки инженерами-практиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carter B. J.** Size and stress gradient effects on fracture around cavities, Rock Mech. Rock Eng., 1992, Vol. 25, No. 3. — P. 167 – 186.
2. **Суднев С. В.** Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // Физ. мезомеханика. — 2018. — Т. 21. — № 4. — С. 22 – 32.
3. **Ревуженко А. Ф.** О критериях разрушения горных пород, основанных на новой системе инвариантов тензора напряжений // ФТПРПИ. — 2014. — № 3. — С. 33 – 39.
4. **Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.** Критерии предельного состояния и разрушения идеально связных и сыпучих тел // ФТПРПИ. — 2014. — № 4. — С. 55 – 60.
5. **Поль Б.** Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. — М.: Мир, 1975. — Т. 2.— С. 336 – 520.
6. **Boresi A. P., Schmidt R. J., and Sidebottom O. M.** Advanced mechanics of materials, 5th ed., N. Y., Wiley, 1993.
7. **Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлова В. Г.** О влиянии выбора реологического закона на результаты компьютерного моделирования субдукции плит // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2011. — Т. 14. — № 1. — С. 71 – 90.

8. **Vrech S. M. And Etse G.** Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker–Prager elastoplasticity, Int. J. of Plasticity, 2006, Vol. 22, No. 5. — P. 943 – 964.
9. **Willam K. J. and Warnke E. P.** Constitutive models for the triaxial behavior of concrete // Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses, Bergamo, Italy, 1974, Vol. 19. — P. 1 – 30.
10. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. — 1969. — Т. 33. — Вып. 2. — С. 212 – 222.
11. **Lajtai E. Z.** Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1972, Vol. 9, No. 5. — P. 569 – 578.
12. **Леган М. А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. — 1993. — Т. 34. — № 4. — С. 146 – 154.
13. **Леган М. А.** Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода // ПМТФ. — 1994. — Т. 35. — № 4. — С. 117 – 124.
14. **Суднев С. В., Новопашин М. Д.** Определение локальных механических свойств материалов // ДАН. — 2000. — Т. 373. — № 1. — С. 48 – 50.
15. **Суднев С. В., Новопашин М. Д.** Критерий образования трещин отрыва в горных породах при сжатии // ФТПРПИ. — 2003. — № 2. — С. 30 – 37.
16. **Новопашин М. Д., Суднев С. В.** Градиентные критерии предельного состояния // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2007. — № 4(54). — С. 316 – 335.
17. **Nesetova V., Lajtai E. Z.** Fracture from compressive stress concentrations around elastic flaws, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr, 1973, Vol. 10. — P. 265 – 284.
18. **Carter B. J., Lajtai E. Z., and Petukhov A.** Primary and remote fracture around underground cavities, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1991, Vol. 15, No. 1. — P. 21 – 40.
19. **Carter B. J., Lajtai E. Z., and Yuan Y.** Tensile fracture from circular cavities loaded in compression, Int. J. Fract. 1992, Vol. 57, No. 3. — P. 221 – 236.
20. **Yuan Y. G., Lajtai E. Z., and Ayari M. L.** Fracture nucleation from a compression-parallel, finite-width elliptical flaw, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1993, Vol. 30, No. 7. — P. 873 – 876.
21. **Ефимов В. П.** Применение градиентного подхода к определению прочности горных пород на растяжение // ФТПРПИ. — 2002. — № 5. — С. 49 – 53.
22. **Ефимов В. П.** Испытания горных пород в неоднородных полях растягивающих напряжений // ПМТФ. — 2013. — Т. 54. — № 5. — С. 199 – 209.
23. **Ефимов В. П.** Определение прочности горных пород на растяжение по результатам испытаний дисковых образцов с центральным отверстием // ФТПРПИ. — 2016. — № 5. — С. 54 – 60.
24. MARC Users Guide. Vol. A. — Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2018. — 1008 p.
25. **Erdogan F., Sih G. C.** On the crack extensions in plates under plane loading and transverse shear, J. of Basic Engineering, 1963, Vol. 85. — P. 519 – 527.

Поступила в редакцию 15/VIII 2019
После доработки 9/IX 2019
Принята к публикации 23/IX 2019