УДК 532.517.013.4

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ В МОДЕЛИ МИКРОКОНВЕКЦИИ

В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Исследована устойчивость равновесного состояния плоского слоя, ограниченного твердыми стенками, в модели микроконвекции. Поведение комплексного декремента в случае длинноволновых возмущений имеет асимптотический характер. Приводятся результаты расчетов полной спектральной задачи для расплава кремния. В отличие от классической модели Обербека — Буссинеска возмущения не являются монотонными. Показано, что при малом параметре Буссинеска спектр данной задачи аппроксимирует спектры соответствующих задач для вязкой теплопроводной жидкости или тепловой гравитационной конвекции, когда число Рэлея конечно.

**1. Основные уравнения**. Модель Обербека — Буссинеска достаточно точно описывает тепловую гравитационную конвекцию в земных условиях. Однако в очень слабых силовых полях отброшенные члены в уравнении неразрывности при замене его уравнением $\operatorname{div}\, \boldsymbol{u} = 0$ могут оказаться столь же существенными, как и член $-\beta\theta\boldsymbol{g}$, выражающий вклад сил плавучести в уравнение импульса. В связи с этим в работе [1] В. В. Пухначевым предложена модель микроконвекции, в которой зависимость плотности от температуры имеет вид

$$\rho = \rho_1(1+\beta\theta)^{-1},$$

где $\rho_1$, $\beta$ — положительные постоянные. При малых $\beta$, так же как в классической модели Обербека — Буссинеска, получим $\rho \approx \rho_1(1-\beta\theta)$.

Пусть $\boldsymbol{u}(x,y,z,t) = (u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t))$ — вектор скорости, $p(x,y,z,t)$ — давление жидкости. Следуя [1], введем новые неизвестные

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \beta\chi\nabla\theta; \tag{1.1}$$

$$q = \rho_1^{-1}(p - \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}) - \beta(\nu-\chi)\chi\Delta\theta, \tag{1.2}$$

где $\chi$ — температуропроводность; $\lambda$ — коэффициент второй вязкости; $\nu = \mu/\rho_1$ — кинематическая вязкость. После некоторых преобразований [2] получим систему уравнений относительно функций $\boldsymbol{w}$, $q$, $\theta$

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{w} + \beta\chi \operatorname{rot}\boldsymbol{w}\times\nabla\theta + \beta^2\chi^2 \operatorname{div}(\nabla\theta\otimes\nabla\theta - |\nabla\theta|^2 I) = \\ = (1+\beta\theta)(-\nabla q + \nu\Delta\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{g}; \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0; \tag{1.4}$$

$$\theta_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\theta + \beta\chi|\nabla\theta|^2 = (1+\beta\theta)\chi\Delta\theta, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения. Считается, что вклад диссипативной функции и сил давления в уравнение притока тепла (1.5) пренебрежимо мал.

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта № 5 СО РАН.

В начальный момент времени необходимо задать вектор $\boldsymbol{w}$ и температуру $\theta$:

$$\boldsymbol{w}|_{t=0} = \boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}_1 - \beta\chi\nabla\theta_1, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{w}_1 = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_1(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

На твердых стенках выполнены условия

$$\boldsymbol{w} + \beta\chi\nabla\theta = 0; \tag{1.7}$$

$$\theta = \theta_w(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{или} \quad k_1\,\frac{\partial\theta}{\partial n} + b(\theta - \theta_g) = Q. \tag{1.8}$$

Равенство (1.7) есть условие прилипания ($\boldsymbol{u} = 0$) на неподвижной стенке; первое равенство в (1.8) задает ее температуру, второе — теплообмен с окружающей средой (при $b = 0$ поток тепла).

Замечание 1. Для конвекции в замкнутой полости $\Omega$ из (1.4), (1.7) следует равенство

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\theta}{\partial n}\,d\Gamma = 0, \tag{1.9}$$

где $\Gamma$ — твердая стенка, окружающая жидкость. Если предположить, что $\rho = \rho(\theta)$, то из законов сохранения массы, энергии и из условия прилипания получим

$$\int\limits_{\Gamma} V_\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial n}\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega} V_{\theta\theta}|\nabla\theta|^2\,d\Omega, \tag{1.10}$$

где $V = 1/\rho(\theta)$ — удельный объем. Для модели (1.3)–(1.5) $V = (1 + \beta\theta)/\rho_1$, и вновь из (1.10) получается равенство (1.9). Условие (1.9) (или более общее (1.10)) необходимо для выполнения условия независимости плотности от давления.

Предположим, что $l_*$, $\theta_*$ — характерные длина и температура. Введем безразмерные переменные соотношениями

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow l_*\boldsymbol{x}, \quad t \leftrightarrow l_*^2 t/\chi, \quad \boldsymbol{w} \leftrightarrow l_*^{-1}\chi\boldsymbol{w}, \quad \theta \leftrightarrow \theta_*\theta, \quad q \leftrightarrow q\nu\chi l_*^{-2}. \tag{1.11}$$

Тогда система (1.3)–(1.5) запишется в следующем виде:

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}\nabla\boldsymbol{w} + \varepsilon\ \operatorname{rot}\boldsymbol{w} \times \nabla\theta + \varepsilon^2\operatorname{div}(\nabla\theta\otimes\nabla\theta - |\nabla\theta|^2 I) = \\ = (1 + \varepsilon\theta)(-\nabla\bar q + \Delta\boldsymbol{w})\operatorname{Pr} - \varepsilon\boldsymbol{\eta}(t)\operatorname{Pr}\theta; \tag{1.12}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0; \tag{1.13}$$

$$\theta_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\theta + \varepsilon|\nabla\theta|^2 = (1 + \varepsilon\theta)\Delta\theta, \tag{1.14}$$

где $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\varepsilon = \beta\theta_*$ — параметр Буссинеска; $\boldsymbol{\eta} = l_*^3\boldsymbol{g}(t)/(\nu\chi)$ — векторный параметр микроконвекции. В частности, если $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$, то $\eta = l_*^3 g/(\nu\chi)$ – параметр микроконвекции. При $\eta < 1$ [1] приближение Обербека — Буссинеска непригодно для описания конвекции. Граничное условие (1.7) примет вид

$$\boldsymbol{w} + \varepsilon\nabla\theta = 0. \tag{1.15}$$

В уравнении (1.12) аналог модифицированного давления равен $\bar q = q - l_*^3\boldsymbol{g}(t)\cdot\boldsymbol{x}/(\nu\chi)$.

Параметр $\varepsilon$ входит в систему (1.12)–(1.15) регулярным образом (в реальных ситуациях его значение редко превышает $10^{-2}$). Поэтому из анализа уравнений (1.12)–(1.15) можно сделать следующие выводы:

1. При умеренных числах Прандтля и $\varepsilon \to 0$ система микроконвекции аппроксимирует уравнения вязкой теплопроводной жидкости.

2. Если $\operatorname{Pr} \gg 1$, то в пределе получаем систему "ползущего" движения

$$\Delta\boldsymbol{w} - \nabla\bar q = \varepsilon\boldsymbol{\eta}(t)\theta, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0, \tag{1.16}$$

$$\theta_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\theta + \varepsilon|\nabla\theta|^2 = (1+\varepsilon\theta)\Delta\theta.$$

3. Если $\varepsilon\boldsymbol{\eta}(t) \to \mathbf{R}(t) \neq 0$ при $\varepsilon \to 0$, то получаем модель Обербека — Буссинеска ($\mathbf{R}(t)$ — вектор чисел Рэлея). Отметим, что $\Pr\,\varepsilon\boldsymbol{\eta}(t) = \beta\theta_* l_*^3 \boldsymbol{g}(t)/\chi^2 = \mathbf{Gr}$ ($\mathbf{Gr}$ — вектор чисел Грасгофа).

Разложив решение в ряд по $\varepsilon$ (или в ряд по $\Pr^{-1}$ в случае 2), в нулевом приближении получим одну из указанных выше моделей. В работе [3] доказано существование аналитического по $\varepsilon$ решения в классах Гёльдера задачи (1.3)–(1.7). Микроконвекция рассматривалась в замкнутой области $\Omega$, и граничное условие (1.8) бралось в виде $\partial\theta/\partial n = Q/k_1$. Поскольку в [3] в качестве характерных скоростей и давлений взяты величины, отличные от (1.11), предельная при $\varepsilon = 0$ задача не поддается физической интерпретации.

Следуя [3], можно строго математически обосновать выводы 1, 2. В данной работе это сделано на примере численного решения полной спектральной задачи, возникающей при изучении устойчивости равновесия жидкости в модели микроконвекции.

**2. Равновесное состояние.** В равновесном состоянии $\boldsymbol{u} = 0$, $\theta_t = p_t = 0$. Поэтому из (1.1) следует

$$\boldsymbol{w}_0 = -\beta\chi\nabla\theta_0$$

(индекс 0 соответствует равновесному состоянию), и согласно (1.4) температура является гармонической функцией:

$$\Delta\theta_0 = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (1.5) выполняется тождественно, а (1.3) эквивалентно следующему:

$$\nabla q_0 = \boldsymbol{g}/(1+\beta\theta_0). \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу соотношений (1.2), (2.1) $q_0 = p_0/\rho_1$. Поэтому необходимое условие равновесия имеет вид $\boldsymbol{g}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{g} = 0$. Для постоянного вектора внешних сил оно выполняется, и из (2.2) следует

$$\nabla\theta_0 \times \boldsymbol{g} = 0. \tag{2.3}$$

Если $\boldsymbol{g} = (0,0,-g)$ ($g = \mathrm{const} > 0$), то (2.3) справедливо только при $\theta_0 = \theta_0(z)$. В этом случае из (2.1) получим $\theta_0(z) = c_1 z + c_2$ ($c_1, c_2 = \mathrm{const}$). В частности, равновесное состояние слоя с твердыми стенками ($|z| = l$), на которых поддерживается постоянная температура $\theta_1$ и $\theta_2$, описывается формулами

$$\begin{gathered} \boldsymbol{w}_0 = (0,0,\beta\chi(\theta_2-\theta_1)/(2l)), \qquad \theta_0 = (\theta_1-\theta_2)z/(2l) + (\theta_1+\theta_2)/2, \\ q_0 = -\frac{2lg}{\beta(\theta_1-\theta_2)}\ln\Bigl(1+\beta\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\beta\,\frac{\theta_1-\theta_2}{2l}\,z\Bigr) + c_3, \qquad c_3 = \mathrm{const}\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь в отличие от классического случая аналог давления — функция $q_0(z)$ — распределен по логарифмическому закону, а не по линейному. Кроме того, решение (2.4) удовлетворяет системе (1.16).

Замечание 2. Из (2.4) при $\beta \to 0$ получаем

$$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \theta_0 = (\theta_1-\theta_2)z/(2l) + (\theta_1+\theta_2)/2, \quad q_0 = c_4 - gz, \quad c_4 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5}$$

Поскольку давление $p_0 = q_0\rho_1$, система (2.5) соответствует равновесному состоянию слоя вязкой теплопроводной жидкости. Это следует из того, что согласно замене (1.1), (1.2) система (1.3)–(1.5) при $\beta \to 0$ аппроксимирует уравнения Навье — Стокса вязкой теплопроводной жидкости.

Замечание 3. Если в выражении для $q_0(z)$ из (2.4) удержать члены второго порядка малости по $\beta$ и через $\bar p_0(z)$ обозначить отклонение давления от гидростатического, то приходим к равновесному состоянию в модели Обербека — Буссинеска (см. [4, 5])

$$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2l}\, z + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \frac{d\bar p_0}{dz} = \rho_1 g \beta \theta_0(z). \tag{2.6}$$

**3. Линеаризованная задача о малых возмущениях в модели микроконвекции.** Пусть $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$, $q(\boldsymbol{x}, t)$, $\theta(\boldsymbol{x}, t)$ — известное основное движение, $\tilde{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)$, $\tilde q(\boldsymbol{x}, t) = q(\boldsymbol{x}, t) + Q(\boldsymbol{x}, t)$, $\tilde\theta(\boldsymbol{x}, t) = \theta(\boldsymbol{x}, t) + T(\boldsymbol{x}, t)$ — возмущенное движение. Будем считать, что $\boldsymbol{W}$, $Q$, $T$ и их производные малы. Подставляя $\tilde{\boldsymbol{w}}$, $\tilde q$, $\tilde\theta$ в уравнения (1.3)–(1.5), получим линейную задачу относительно $\boldsymbol{W}$, $Q$, $T$ [2]

$$\begin{gathered}\boldsymbol{W}_t + \boldsymbol{w}\nabla\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\nabla\boldsymbol{w} + \beta\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{W} \times \nabla\theta + \operatorname{rot}\boldsymbol{w} \times \nabla T) + {}\\ + \beta^2\chi^2[\Delta\theta\nabla T + \Delta T\nabla\theta - \nabla\theta\nabla(\nabla T) - \nabla T\nabla(\nabla\theta)] = {}\\ = (1 + \beta\theta)(-\nabla Q + \nu\Delta\boldsymbol{W}) + \beta T(-\nabla q + \nu\Delta\boldsymbol{w}); \end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{W} = 0; \tag{3.2}$$

$$T_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla T + \boldsymbol{W}\cdot\nabla\theta + 2\beta\chi\nabla\theta\cdot\nabla T = (1 + \beta\theta)\chi\Delta T + \beta\chi T\Delta\theta. \tag{3.3}$$

Заметим, что в (3.1) выражение при $\beta^2\chi^2$ равно $\operatorname{div}[\nabla\theta \otimes \nabla T + \nabla T \otimes \nabla\theta - 2I\nabla\theta\cdot\nabla T]$, так как $\nabla\theta\nabla(\nabla T) + \nabla T\nabla(\nabla\theta) = \nabla(\nabla\theta\cdot\nabla T)$.

На твердых стенках выполнены условия

$$\boldsymbol{W} + \beta\chi\nabla T = 0, \qquad T = 0 \tag{3.4}$$

либо

$$\boldsymbol{W} + \beta\chi\nabla T = 0, \qquad k_1\frac{\partial T}{\partial n} + bT = 0.$$

Система (3.1)–(3.3) дополняется начальными данными

$$\boldsymbol{W}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{W}_1(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{W}_1(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad T\Big|_{t=0} = T_1(\boldsymbol{x}). \tag{3.5}$$

Рассмотрим задачу (3.1)–(3.5) в случае равновесия в слое с твердыми стенками, заданного формулами (2.4). Введем безразмерные переменные ($\boldsymbol{W} = (U, V, W)$)

$$\begin{gathered}\xi = x/(2l), \quad \eta = y/(2l), \quad \zeta = z/(2l), \quad \tau = \chi t/(4l^2),\\ U_1 = 2lU/\chi, \quad V_1 = 2lV/\chi, \quad W_1 = 2lW/\chi, \quad Q_1 = 4l^2Q/(\nu\chi), \quad T_1 = T/(\mu(\theta_1 - \theta_2)),\\ l_* = 2l, \qquad \theta_* = \mu(\theta_1 - \theta_2)\end{gathered}$$

($\mu = 1$, если $\theta_1 > \theta_2$; $\mu = -1$, если $\theta_1 < \theta_2$). После подстановки этих переменных в (3.1)–(3.4) получим систему (индекс 1 опущен)

$$\begin{gathered}U_\tau - \varepsilon\mu W_\xi - \mu\varepsilon^2 T_{\xi\zeta} = (1 + \beta\theta_0)(-Q_\xi + \Delta U)\Pr,\\ V_\tau - \varepsilon\mu W_\eta - \mu\varepsilon^2 T_{\eta\zeta} = (1 + \beta\theta_0)(-Q_\eta + \Delta V)\Pr,\\ W_\tau - \varepsilon\mu W_\zeta + \mu\varepsilon^2(T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}) = (1 + \beta\theta_0)(-Q_\zeta + \Delta W)\Pr + \mathrm{Gr}T/(1 + \beta\theta_0),\\ U_\xi + V_\eta + W_\zeta = 0,\\ T_\tau + \varepsilon\mu T_\zeta + \mu W = (1 + \beta\theta_0)\Delta T,\end{gathered}\tag{3.6}$$

где $\varepsilon = \beta|\theta_1 - \theta_2|$ — параметр Буссинеска; $\mathrm{Gr} = \mu\beta(\theta_1 - \theta_2)(2l)^3 g/\chi^2$ — число Грасгофа; $\theta_0(\zeta) = (\theta_1 - \theta_2)\zeta + (\theta_1 + \theta_2)/2$.

Граничные условия (3.4) на твердых стенках ($\zeta = -1/2$, $\zeta = 1/2$) примут вид

$$U + \varepsilon T_\xi = 0, \quad V + \varepsilon T_\eta = 0, \quad W + \varepsilon T_\zeta = 0, \quad T = 0. \tag{3.7}$$

Будем искать решение краевой задачи (3.6), (3.7) в виде нормальных волн

$$(U, V, W, Q, T) = (U(\zeta), V(\zeta), W(\zeta), Q(\zeta), T(\zeta)) \exp\left(i(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta - C\tau)\right). \tag{3.8}$$

Здесь $\alpha_1$, $\alpha_2$ — безразмерные волновые числа вдоль осей $x$ и $y$ соответственно; $C$ — комплексный декремент, определяющий временной ход возмущения. Если $C = C_r + iC_i$, то возмущения осциллируют с частотой $C_r$; затухание или нарастание возмущений определяется знаком $C_i$.

Подставляя (3.8) в (3.6), получим спектральную задачу относительно параметра $C$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-iCU - i\alpha_1\mu\varepsilon W - i\alpha_1\mu\varepsilon^2 T' = (1 + \beta\theta_0)[U'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)U - i\alpha_1 Q]\,\mathrm{Pr}; \tag{3.9}$$

$$-iCV - i\alpha_2\mu\varepsilon W - i\alpha_2\mu\varepsilon^2 T' = (1 + \beta\theta_0)[V'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)V - i\alpha_2 Q]\,\mathrm{Pr}; \tag{3.10}$$

$$-iCW - \mu\varepsilon W' - [\mu\varepsilon^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \mathrm{Gr}/(1 + \beta\theta_0)]T =$$
$$= (1 + \beta\theta_0)[W'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)W - Q']\,\mathrm{Pr}; \tag{3.11}$$

$$i\alpha_1 U + i\alpha_2 V + W' = 0; \tag{3.12}$$

$$-iCT + \mu\varepsilon T' + \mu W = (1 + \beta\theta_0)[T'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)T] \tag{3.13}$$

при $|\zeta| < 1/2$ (штрих означает дифференцирование по $\zeta$).

Граничные условия (3.7) при $|\zeta| = 1/2$ имеют вид

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W + \varepsilon T' = 0, \qquad T = 0. \tag{3.14}$$

К задаче (3.9)–(3.14) применимо преобразование Сквайра [6]. Умножив (3.9) на $i\alpha_1$, а (3.10) на $i\alpha_2$ и обозначив $Z = i\alpha_1 U + i\alpha_2 V$, получим задачу

$$-iCZ + \mu\varepsilon k^2 W + \mu\varepsilon^2 k^2 T' = (1 + \beta\theta_0)(Z'' - k^2 Z + k^2 Q)\,\mathrm{Pr}; \tag{3.15}$$

$$-iCW - \mu\varepsilon W' - (\mu\varepsilon^2 k^2 + \mathrm{Gr}/(1 + \beta\theta_0))T = (1 + \beta\theta_0)(W'' - k^2 W - Q')\,\mathrm{Pr}; \tag{3.16}$$

$$Z + W' = 0; \tag{3.17}$$

$$-iCT + \mu\varepsilon T' + \mu W = (1 + \beta\theta_0)(T'' - k^2 T), \tag{3.18}$$

где $k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ — модифицированное волновое число.

При $|\zeta| = 1/2$ имеем

$$Z = 0, \qquad W + \varepsilon T' = 0, \qquad T = 0. \tag{3.19}$$

Для "грубой" неустойчивости состояния равновесия (3.4) (т. е. неустойчивости в первом приближении) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одного собственного значения было выполнено условие $\operatorname{Im} C > 0$.

Замечание 4. Система (3.15)–(3.18) при $C = 0$ может быть сведена к одному уравнению шестого порядка на возмущение температуры

$$L^2(xLT - \varepsilon^2 T') + (k^2\mathrm{R}/x^2)T = 0, \qquad T = T' = T'' = 0, \qquad x = 1 + \beta\theta_{1,2},$$

где $x = 1 + \beta\theta_0(\zeta)$; $L = \varepsilon^2 d^2/dx^2 - k^2$. Однако даже в этом случае последнее уравнение не удается явно проинтегрировать и найти критические числа Рэлея R в явном виде.

Замечание 5. Поскольку $\mathrm{Gr} = \varepsilon\eta\,\mathrm{Pr}$ ($\eta = (2l)^3 g/(\nu\chi)$ — параметр микроконвекции), для умеренных чисел Прандтля краевая задача (3.15)–(3.19) при $\varepsilon \to 0$ аппроксимирует задачу об устойчивости равновесия (2.5) (см. замечание 2). Если $\mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}_0 > 0$ при $\varepsilon \to 0$, то приходим к задаче об устойчивости равновесия (2.6) в модели Обербека — Буссинеска.

**4. Асимптотика длинных волн.** Рассмотрим асимптотическое поведение амплитудных уравнений при $k \to 0$.

Поскольку в систему всюду входит $k^2$, положим

$$Z = Z_0 + k^2 Z_1 + \ldots, \qquad W = W_0 + k^2 W_1 + \ldots,$$
$$Q = Q_0 + k^2 Q_1 + \ldots, \qquad T = T_0 + k^2 T_1 + \ldots, \qquad C = C_0 + k^2 C_1 + \ldots.$$

Подстановка этих выражений в (3.15)–(3.18) в нулевом приближении приводит к системе

$$\begin{gathered}
-iC_0 Z_0 = (1+\beta\theta_0) Z_0'' \,\mathrm{Pr}, \\
-iC_0 W_0 - \mu\varepsilon W_0' - \mathrm{Gr} T_0/(1+\beta\theta_0) = (1+\beta\theta_0)(W_0'' - Q_0')\,\mathrm{Pr}, \\
Z_0 + W_0' = 0, \\
-iC_0 T_0 + \mu\varepsilon T_0' + \mu W_0 = (1+\beta\theta_0) T_0''.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Граничные условия для $Z_i$, $W_i$, $Q_i$, $T_i$ $(i = 0, 1)$ совпадают с (3.19).

Запишем уравнение для $Z_0$ в виде $Z_0'' = -iC_0 Z_0/((1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr})$. Умножив его на комплексно-сопряженную величину $Z_0^*$ и проинтегрировав по отрезку $[-1/2; 1/2]$, получим

$$\frac{iC_0}{\mathrm{Pr}} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{|Z_0|^2\,d\zeta}{1+\beta\theta_0} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |Z_0'|^2\,d\zeta.$$

Отсюда следует, что величина $C_0$ мнимая ($C_0 = iC_{0i}$, причем $C_{0i} < 0$). Значит, длинноволновые возмущения затухают монотонно независимо от знака разности $\theta_1 - \theta_2$. Легко можно уточнить вид $C_{0i}$. Действительно, замена $x = 1 + \beta\theta_0(\zeta) = 1 + \beta(\theta_1 - \theta_2)\zeta + \beta(\theta_1 + \theta_2)/2$ приводит к уравнению $xZ_0'' + \mu_0 Z_0 = 0$, где $\mu_0 = iC_0/(\mathrm{Pr}\ \varepsilon^2)$; по доказанному выше $\mu_0 > 0$. В свою очередь последнее уравнение имеет общее решение

$$Z_0 = \sqrt{x}\,(h_1 J_1(2\sqrt{\mu_0 x}) + h_2 Y_1(2\sqrt{\mu_0 x})), \qquad h_1, h_2 = \mathrm{const},$$

где $J_1$, $Y_1$ — бесселевы функции первого и второго рода. Поскольку $Z_0(x_{1,2}) = 0$ ($x_{1,2} = 1 + \beta\theta_{1,2} > 0$), то $\tau = 2\sqrt{\mu_0 x_1}$ — корень трансцендентного уравнения

$$J_1(\tau) Y_1(\lambda_0\tau) - J_1(\lambda_0\tau) Y_1(\tau) = 0, \qquad \lambda_0 = \sqrt{x_2/x_1}.$$

Последнее уравнение имеет счетное число вещественных корней $\tau_n$ [7]. Отсюда

$$C_{0n} = -(\mathrm{Pr}\ \varepsilon^2 \tau_n^2/(4x_1))i \equiv iC_{0i}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим систему первого приближения по $k^2$. Вместо (4.1) получим систему

$$\begin{gathered}
-i(C_0 Z_1 + C_1 Z_0) + \varepsilon W_0 + \mu\varepsilon^2 T_0' = (1+\beta\theta_0)(Z_1'' - Z_0 + Q_0)\,\mathrm{Pr}, \\
-i(C_0 W_1 + C_1 W_0) - \mu\varepsilon W_1' - \mathrm{Gr} T_1/(1+\beta\theta_0) - \mu\varepsilon^2 T_0 = \\
= (1+\beta\theta_0)(W_1'' - W_0 - Q_1')\,\mathrm{Pr}, \\
Z_1 + W_1' = 0, \\
-i(C_1 T_0 + C_0 T_1) + \mu\varepsilon T_1' + \mu W_1 = (1+\beta\theta_0)(T_1'' - T_0).
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Из (4.3) для $Z_1$ получим краевую задачу

$$Z_1'' + iC_0 Z_1/(\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)) = (-iC_1 Z_0 + \mu\varepsilon W_0 + \mu\varepsilon^2 T_0')/(\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)) + Z_0 - Q_0,$$
$$Z_1(\pm 1/2) = 0.$$

Для однозначной разрешимости этой задачи необходимо и достаточно, чтобы правая часть последнего уравнения была ортогональна решению однородного сопряженного уравнения, т. е. $Z_0^*$. Отсюда

$$iC_1 = \Big[\int\limits_{-1/2}^{1/2} \Big(\frac{\mu\varepsilon W_0 + \mu\varepsilon^2 T_0'}{(1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr}} - Q_0 + Z_0\Big) Z_0^*\,d\zeta\Big]\Big(\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{|Z_0|^2}{1+\beta\theta_0}\,d\zeta\Big)^{-1}. \tag{4.4}$$

Можно показать, что $iC_1$ — вещественное число.

**5. Численное решение задачи на собственные значения.** Для отыскания численного решения методом ортогонализации [8] систему (3.15)–(3.18) приведем к виду $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y}(\xi)$ — вектор неизвестных; $A(\xi)$ — матрица коэффициентов; $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Сделаем замену

$$\xi = \zeta + 1/2, \quad y_1 = Z, \quad y_2 = Z', \quad y_3 = Z'', \quad y_4 = W, \quad y_5 = T, \quad y_6 = T'. \tag{5.1}$$

Исключая $Q$ из (3.15), (3.16), получим следующую систему уравнений:

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_3, \qquad y_4' = -y_1, \qquad y_5' = y_6,$$
$$y_3' = \frac{\varepsilon Ci}{(1+\beta\theta_0)^2\,\mathrm{Pr}}\,y_1 + \Big(2k^2 - \frac{Ci}{(1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr}}\Big)y_2 +$$
$$+ \Big(k^4 - \frac{k^2 Ci}{(1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr}} + \frac{\varepsilon k^2(\varepsilon-\mu)}{\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)^2}\Big)y_4 - \frac{\mu\varepsilon^2 k^2 Ci + k^2\,\mathrm{Gr}}{(1+\beta\theta_0)^2\,\mathrm{Pr}}\,y_5 + \frac{\varepsilon^3 k^2(1-\mu)}{\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)^2}\,y_6,$$
$$y_6' = \frac{\mu}{1+\beta\theta_0} y_4 + \Big(k^2 - \frac{Ci}{1+\beta\theta_0}\Big)y_5 + \frac{\varepsilon\mu}{1+\beta\theta_0}\,y_6.$$

Здесь $\theta_0 = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2)\xi$. Граничные условия (3.19) в силу замены (5.1) примут вид $y_1 = 0$, $y_4 + \varepsilon y_6 = 0$, $y_5 = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Таким образом, решается система вида $\boldsymbol{y}' = A(\xi)\boldsymbol{y}$ с краевыми условиями $B\boldsymbol{y}(0) = 0$ и $D\boldsymbol{y}(1) = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ соответственно. Матрица $A$ размерности $6 \times 6$ имеет следующие элементы:

$$a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0, \qquad a_{12} = 1,$$
$$a_{21} = a_{22} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0, \qquad a_{23} = 1,$$
$$a_{31} = \frac{\varepsilon Ci}{(1+\beta\theta_0)^2\,\mathrm{Pr}}, \quad a_{32} = 2k^2 - \frac{Ci}{(1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr}}, \quad a_{33} = 0,$$
$$a_{34} = k^4 - \frac{k^2 Ci}{(1+\beta\theta_0)\,\mathrm{Pr}} + \frac{\varepsilon k^2(\varepsilon-\mu)}{\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)^2}, \quad a_{35} = -\frac{\mu\varepsilon^2 k^2 Ci + k^2\,\mathrm{Gr}}{(1+\beta\theta_0)^2\,\mathrm{Pr}}, \quad a_{36} = \frac{\varepsilon^3 k^2(1-\mu)}{\mathrm{Pr}(1+\beta\theta_0)^2},$$
$$a_{41} = -1, \qquad a_{42} = a_{43} = a_{44} = a_{45} = a_{46} = 0,$$
$$a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{55} = 0, \qquad a_{56} = 1,$$
$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = 0, \quad a_{64} = \frac{\mu}{1+\beta\theta_0}, \quad a_{65} = k^2 - \frac{Ci}{1+\beta\theta_0}, \quad a_{66} = \frac{\varepsilon\mu}{1+\beta\theta_0}.$$

Матрицы $B$ и $D$ размерности $3 \times 6$ совпадают, и их элементы имеют значения
$$b_{11} = d_{11} = b_{24} = d_{24} = b_{35} = d_{35} = 1, \qquad b_{26} = d_{26} = \varepsilon.$$
Остальные элементы обеих матриц равны нулю.

Решение ищется в виде
$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{3} p_j \boldsymbol{y}^j, \tag{5.2}$$
где коэффициенты $p_j$ находятся из системы $D\boldsymbol{y}(1) = 0$; $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$, $\boldsymbol{y}^3$ — линейно независимые векторы, такие что
$$\boldsymbol{y}^1(0) = (0,0,0,-\varepsilon,0,1), \qquad \boldsymbol{y}^2(0) = (0,1,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{y}^3(0) = (0,0,1,0,0,0).$$

Для определения собственного значения $C$ необходимы два начальных приближения $C_0$ и $C_1$, которые выбираются из условий (4.2), (4.4). Через крайний левый участок выполним интегрирование уравнений для $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$, $\boldsymbol{y}^3$ с заданной длиной шага по $\xi$. Полученные на правом конце участка векторы проортогонализируем. Через следующий участок будем интегрировать решения, для которых начальными данными являются векторы, полученные в результате ортогонализации. Решения на правом конце второго участка вновь проортогонализируем, и т. д., пока не дойдем до точки $\xi = 1$. Для интегрирования используем метод Рунге — Кутты — Мерсена четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования. Поскольку для каждого из векторов $\boldsymbol{y}^j$ может быть свой шаг интегрирования, из трех полученных значений при автоматическом выборе шага оставляем наименьший. Достигнув правого конца участка интегрирования — точки $\xi = 1$, получим систему трех уравнений $D\boldsymbol{y}(1) = 0$ для нахождения трех неизвестных $p_j$, где $\boldsymbol{y}$ имеет вид (5.2). Определитель системы, составленный из коэффициентов $y_i^j$ ($j = 1, 2, 3$, $i = 1, \ldots, 6$), возьмем в качестве характеристического многочлена $F(C)$. Для того чтобы система $D\boldsymbol{y}(1) = 0$ имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (в данном случае $F(C)$) был равен нулю. Таким образом, задача свелась к решению нелинейного уравнения $F(C) = 0$. Уравнение решаем методом секущих, используя в качестве начальных приближений выбранные $C_0$ и $C_1$. Полученный корень уравнения $F(C) = 0$ и есть искомое собственное значение при заданном значении волнового числа $k$. Рассматриваем длинноволновые возмущения, т. е. $k \to 0$. Сдвигаясь по $k$ от значения $k = 10^{-5}$, находим зависимость $C(k)$. По знаку мнимых частей $C$, полученных на каждом шаге по $k$, определяем интервалы устойчивости.

Исследовалась устойчивость слоя с твердыми стенками для расплава кремния при следующих значениях параметров: $\nu = 2{,}65 \cdot 10^{-3}$ см$^2$/с, $\chi = 0{,}49$ см$^2$/с, $\beta = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$ °C$^{-1}$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$. Расчеты проводились для модуля разности температур на стенках $|\theta_1 - \theta_2| = 10$; 1000 °C. Это означает изменение безразмерного параметра $\varepsilon = \beta|\theta_1 - \theta_2|$. Линейный размер слоя выбирался таким, чтобы выполнялось неравенство $(2l)^3 g/(\nu\chi) < 1$, которое является критерием применимости рассматриваемой модели микроконвекции (см. [1, 9]). Малость параметра $\eta = (2l)^3 g/(\nu\chi)$ может достигаться за счет уменьшения как масштаба длины, так и ускорения свободного падения $g$ (например, в условиях невесомости, когда $g \approx (10^{-2} \div 10^{-3}) g_0$, где $g_0 = 981$ см/с$^2$ — ускорение свободного падения вблизи земли). В данных расчетах $g \approx 10^{-3} g_0$, т. е. $2l < 0{,}11$ см. При указанных значениях $l$, $\beta$, $\chi$, $\nu$ найдена зависимость параметров $C_i = \operatorname{Im} C$ и $C_r = \operatorname{Re} C$ от волнового числа $k$.

На рис. 1 представлены зависимости $C_i(k)$ при $\varepsilon = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ ($|\theta_1 - \theta_2| = 10$ °C) и $\mathrm{R} = 4{,}21 \cdot 10^{-4}$. Штриховая кривая соответствует случаю нагрева сверху ($\theta_1 > \theta_2$), сплошная кривая — случаю нагрева снизу ($\theta_1 < \theta_2$). (Далее кривые, соответствующие случаю, когда жидкость нагревается сверху, будем обозначать $C_i^-$, снизу — $C_i^+$.)

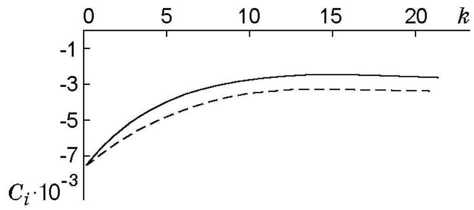


Рис. 1

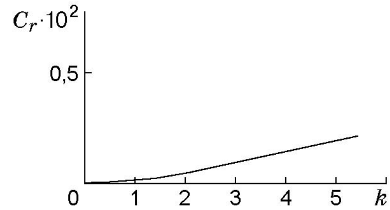


Рис. 2

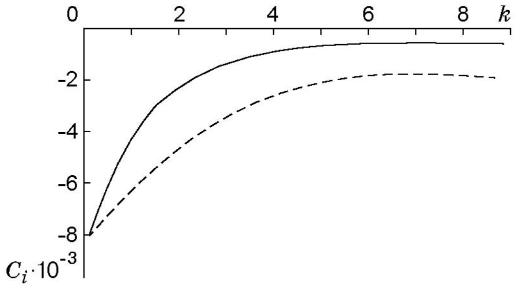


Рис. 3

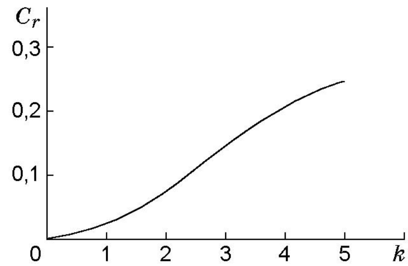


Рис. 4

На рис. 2 приведена зависимость $C_r(k)$ при тех же значениях параметров $\varepsilon$ и R, что на рис. 1. Поскольку значения $C_r^+(k)$ и $C_r^-(k)$ различаются не более чем на $10^{-6}$, соответствующие кривые на рис. 2 совпадают.

На рис. 3 представлены зависимости $C_i^+(k)$, $C_i^-(k)$ (сплошная и штриховая кривые соответственно) при $\varepsilon = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ ($|\theta_1 - \theta_2| = 1000$ °C) и $\mathrm{R} = 4{,}21 \cdot 10^{-2}$. На рис. 4 приведена зависимость $C_r(k)$ при тех же значениях $\varepsilon$, R, что на рис. 3.

Заметим, что с увеличением $\varepsilon$ (т. е. разности температур на стенках) кривые $C_i(k)$ быстрее возрастают от значения $C_{0i}$. Для всех кривых $C_i^-(k)$ характерно более медленное возрастание по сравнению с соответствующими кривыми $C_i^+(k)$. С ростом $\varepsilon$ модуль разности $|C_i^+ - C_i^-|$ увеличивается. Для любых $k$ все значения $C_i < 0$, т. е. равновесное состояние устойчиво.

Для всех кривых $C_r(k)$ характерен незначительный рост с увеличением $k$ ($10^{-7} \leqslant k \leqslant 1$). При всех рассмотренных значениях $\varepsilon$ выполняются следующие условия: 1) $C_r > 0$ для всех $k$, более того, значения $C_r$ близки к нулю ($C_r \approx 10^{-12}$) вплоть до $k = 0{,}05$; 2) $C_r$ практически не изменяются при $k \geqslant 5$, $|C_r(5) - C_r(20)| \leqslant 10^{-12}$; 3) все значения $C_r^-$ лежат ниже соответствующих значений $C_r^+$, $|C_r^+(k) - C_r^-(k)| < 10^{-6}$.

Устойчивость равновесия (2.4) для расплава кремния не является неожиданной, так как $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$ (см. замечание 5). Положив в (3.15)–(3.19) $\varepsilon = 0$, получим задачу об устойчивости равновесия (2.5) вязкой теплопроводной жидкости

$$-iCZ = (Z'' - k^2 Z + k^2 Q)\,\mathrm{Pr}, \quad -iCW = (W'' - k^2 W - Q')\,\mathrm{Pr}, \quad -iCT + \mu W = T'' - k^2 T,$$
$$Z + W' = 0, \quad -1/2 < \xi < 1/2, \qquad Z = W = T = 0, \quad \xi = \pm 1/2.$$

Данная спектральная задача легко решается: сначала определяются $Z$ и $W$, затем возмущение температуры. Явные выражения здесь не приводятся, однако заметим, что имеет место интегральное тождество

$$\Bigl(k^2 - \frac{iC}{\mathrm{Pr}}\Bigr) \int\limits_{-1/2}^{1/2} (k^2|W|^2 + |Z|^2)\,d\xi + \int\limits_{-1/2}^{1/2} (k^2|W'|^2 + |Z'|^2)\,d\xi = 0.$$

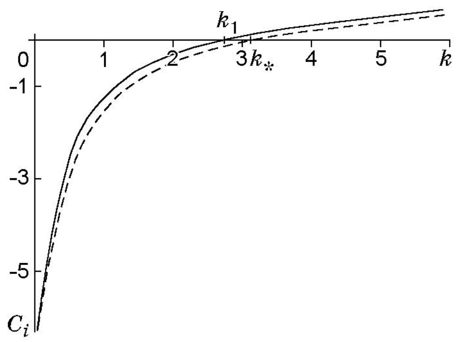


Рис. 5

Отсюда следует, что $-iC < 0$ — вещественное число. Иными словами, предельное при $\beta \to 0$ для (2.4) равновесное состояние (2.5) всегда устойчиво. Можно показать, что комплексный декремент есть решение одного из уравнений

$$x \operatorname{tg} x = -k \operatorname{th}(k/2), \qquad (1/x) \operatorname{tg} x = (1/k) \operatorname{th}(k/2),$$

где $x = (iC/\Pr - k^2)^{1/2}/2$. Последние уравнения имеют счетное число вещественных решений.

Как известно, линеаризованная задача о конвективной неустойчивости неподвижной жидкости в модели Обербека — Буссинеска является самосопряженной (при нагреве снизу) [4], поэтому вещественная часть собственного значения $C_r$ равна нулю. Возмущения затухают или усиливаются монотонно, а возникающее движение стационарно. Равновесное состояние (2.6) горизонтального слоя жидкости толщиной $2l$ с направленным вниз градиентом температуры ($(\theta_2 - \theta_1)/(2l) > 0$) становится неустойчивым, если $\mathrm{R} = g\beta(\theta_2 - \theta_1)(2l)^3/(\nu\chi) > \mathrm{R}_* = 1708$, причем соответствующее безразмерное значение волнового числа $k_* = 3{,}12$.

Представляет интерес (см. замечания 3, 5) сравнить данный классический результат с результатами численного решения спектральной задачи (3.15)–(3.19), когда число Рэлея $\mathrm{R} = \varepsilon\eta$ конечно при $\varepsilon \ll 1$. Расчеты проводились для расплава кремния при тех же значениях физических параметров и $\theta_2 - \theta_1 = 1000$ °C. С увеличением $\eta$ кривая $C_i(k)$ приближается к оси $C_i = 0$ и впервые пересекает эту ось при $k = k_1 = 2{,}84 < k_*$, когда $\eta_1 = 225\,193{,}33$. В этом случае $\mathrm{R}_1 = \varepsilon\eta_1 = 1688{,}95 < \mathrm{R}_*$, а толщина слоя $2l_1 = 6{,}68$ см при $g = 10^{-3}g_0$. На рис. 5 сплошной линией показана зависимость $C_i(k)$ для модели микроконвекции, штриховой — для модели Обербека — Буссинеска. Таким образом, в модели микроконвекции неустойчивость равновесия возникает при меньших волновых числах. По-видимому, это связано с большей подвижностью (сжимаемостью) жидкости в данном случае. Значения $C_r$ при $\mathrm{R} > 10^3$ для всех $k$ близки к $10^{-12}$, спектральная задача (3.15)–(3.19) становится "более самосопряженной". С уменьшением параметра Буссинеска $\varepsilon$ критические значения числа Рэлея и волнового числа увеличиваются. Так, при $\varepsilon = 0{,}75 \cdot 10^{-4}$ и $\theta_2 - \theta_1 = 10$ °C $k_1 = 2{,}99$, $\mathrm{R}_1 = 1694{,}54$, что согласуется с замечанием 5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
2. **Andreev V. K., Bekezhanova V. B.** Development of thermal convection under low gravity // Joint X Europ. and VI Russ. symp. on phys. sci. in microgravity: Abstr., S-Peterburg, June 15–21, 1997. M.: Inst. Probl. Mech., 1997. P. 10, 11.

3. **Pukhnachov V. V.** Solvability of initial boundary value problem in non-standard model of convection // Зап. науч. семинаров С.-Петерб. отд-ния Мат. ин-та / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1996. Т. 233. С. 217–226.
4. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
6. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидродинамика. М.: Наука, 1965. Ч. 1.
7. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М.: Наука, 1977.
8. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171–174.
9. **Пухначев В. В.** Микроконвекция в вертикальном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 5. С. 76–84.


*Поступила в редакцию 10/XII 2001 г.*