7. **Зиненко Ж. А., Столин А. М., Хрисостомов Ф. А.** Тепловые режимы куэттовского течения вязкой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 3.
8. **Столин А. М., Худяев С. И.** Неизотермическая неустойчивость течения вязкоупругих сред.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 1.
9. **Ратнер С. Б., Коробов В. И.** Саморазогрев полимеров при многократной деформации.— «Докл. АН СССР», 1965. т. 161, № 4.
10. **Ратнер С. Б., Коробов В. И.** Саморазогрев пластмасс при циклическом деформировании.— «Механика полимеров», 1965, № 3.
11. **Баренблатт Г. И., Козырев Ю. И., Малинин Н. И., Павлов Д. Я., Шестериков С.А.** О виброползучести полимерных материалов.— «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 4.
12. **Баренблатт Г. И., Козырев Ю. П., Малинин Н. И., Павлов Д. Я., Шестериков С. А.** О виброползучести полимерных материалов.— ПМТФ, 1965, № 5.
13. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей. Л., «Наука», 1975.
14. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
15. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1955.
16. **Тихонов А. Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
17. **Вольперт А. П., Худяев С. И.** Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.

УДК 536.24.01

ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

В. В. Никулин

(Новосибирск)

Обобщение [1] в данной работе подобно обобщению, сделанному в [2] по отношению к [3] без учета уравнения энергии. Исследование полученных обыкновенных дифференциальных уравнений в линейном приближении для случая теплоотдачи вращающегося диска в безграничную вращающуюся жидкость показало, что отношение толщины теплового пограничного слоя к толщине гидродинамического для фиксированного числа Pr зависит только от отношения угловых скоростей жидкости и диска и при их выравнивании стремится к ∞. Таким образом, вращающиеся системы дают пример такого движения, где за формирование теплового и гидродинамического пограничных слоев отвечают различные физические механизмы. Так, тепловой слой получается в результате того, что подток жидкости из бесконечности к диску препятствует неограниченной диффузии тепла, т. е. происходит ограничение диффузии за счет конвекции. Гидродинамический слой является слоем экмановского типа [4] и получается вследствие баланса сил кориолиса и трения.

1. Рассматривается полупространство, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью, ограниченное бесконечным диском. При этом жидкость на бесконечном удалении от диска имеет температуру T_∞ и вращается с угловой скоростью Ω. Диск имеет температуру T_0 и угловую скорость $\alpha\Omega$.

Уравнения неразрывности, Навье — Стокса и энергии в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью вращения, с учетом аксиальной симметрии течения (полагаем плотность жидкости $\rho = 1$) имеют вид

$$(1.1)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{u}{r^2}\right),\\
u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right),\\
u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{v}{r^2}\right),\\
u\frac{\partial T}{\partial r}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right)+\\
+\frac{2\nu}{c_V}\left(e_{rr}^2+e_{\varphi\varphi}^2+e_{zz}^2+2e_{r\varphi}^2+2e_{\varphi z}^2+2e_{rz}^2\right),
\end{gathered}
$$

где ν — кинематическая вязкость; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; c_V — удельная теплоемкость жидкости при постоянном объеме; e_{ij} — тензор скоростей деформаций; ν, $\varkappa$ и c_V считаются постоянными; (uwv)— радиальная, аксиальная и вращательная компоненты скорости в цилиндрической системе координат $(r\ z\ \varphi)$.

Следуя работам [1, 2], ищем решение (1.1) в виде

$$
\begin{gathered}
v/r=\Omega g(\zeta),\ w=(\nu\Omega)^{1/2}h(\zeta),\ u/r=-(\Omega/2)dh/d\zeta,\\
p=p(z)+(1/2)\Omega^2r^2,\\
T=(\nu\Omega/c_V)(\xi^2S(\zeta)+q(\zeta))+T_\infty,\\
z=(\nu/\Omega)^{1/2}\zeta,\ r=(\nu/\Omega)^{1/2}\xi.
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Тогда система (1.1) распадается на две, первая из которых решается независимо от второй:

$$
\begin{cases}\frac{1}{4}h'^2-\frac{1}{2}hh''-g^2=-1-\frac{1}{2}h''',\\ -gh'+g'h=g'';\end{cases}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{cases}S''-\sigma hS'+\sigma h'S=-\sigma\left(g'^2+\frac{1}{4}h''^2\right),\\ q''-\sigma hq'=-(4S+3\sigma h'^2)\end{cases}
\tag{1.4}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{cases}h(0)=h'(0)=0,\ g(0)=\alpha & \text{при } \zeta=0,\\ h'\to 0,\qquad g\to 1 & \text{при } \zeta\to\infty;\end{cases}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{cases}S(0)=0,\ q(0)=\frac{c_V}{\nu\Omega}(T_0-T_\infty) & \text{при } \zeta=0,\\ S\to 0,\qquad q\to 0 & \text{при } \zeta\to\infty\end{cases}
\tag{1.6}
$$

($\sigma=\nu/\varkappa$ — число Прандтля).

Исследованию уравнений (1.3) с условиями (1.5) посвящены работы [2, 5—7]. Если теперь известно решение системы (1.3), то уравнения (1.4) можно исследовать, согласно [1]. Отметим, что теплоотвод с вращающегося диска в невращающуюся жидкость был обобщен в [8] на случай сжимаемости и линейной зависимости вязкости от температуры. В [9] рассмотрен нестационарный теплоотвод в случае, когда температура диска изменялась *мгновенно*.

Рассмотрим случай, когда скорость вращения диска мало отличается от скорости вращения жидкости на бесконечном удалении от диска, т. е. $|1-\alpha|\ll 1$. Тогда, как следует из [4, 6], уравнения (1.3) линеаризуются и их решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.5), имеет вид

$$g(\zeta)= 1 +(\alpha - 1)\cos(\zeta)\exp(-\zeta),$$
$$h(\zeta)= -(\alpha - 1)(1 - \sin(\zeta)\exp(-\zeta)- \cos(\zeta)\exp(-\zeta)).$$

Отсюда следует, что толщина гидродинамического пограничного слоя не зависит от α и по переменной ζ есть величина ~ 1, т. е. в реальных координатах $\sim(\nu/\Omega)^{1/2}$.

Оценим величину теплового пограничного слоя. Используя результаты [1], решение первого уравнения из (1.4), удовлетворяющее (1.6), можно записать в виде

$$S(\zeta) = y_1 \left\{ \frac{\left(\int\limits_\zeta^\infty \frac{du}{y_1^2}\right)\left[\int\limits_0^\infty \frac{1}{y_1^2}\left(\int\limits_0^t M(u)\,y_1(u)\,du\right)dt\right]}{\int\limits_0^\infty \frac{du}{y_1^2}} - \right. \tag{1.7}$$
$$\left. - \int\limits_\zeta^\infty \frac{1}{y_1^2}\left(\int\limits_0^t M(u)\,y_1(u)\,du\right)dt\right\} \exp\left[-\beta\left(\zeta + \cos(\zeta)\exp(-\zeta)\right)\right],$$

где

$$\beta = \frac{\sigma(\alpha-1)}{2};\quad M(\zeta) = -\sigma\left(g'^2 + \frac{1}{4}h''^2\right)\exp\left(-\frac{\sigma}{2}\int h\,d\zeta\right) =$$
$$= -2\sigma(\alpha-1)^2\exp\left[-2\zeta + \beta\left(\zeta + \cos(\zeta)\exp(-\zeta)\right)\right];$$

$y_1(\zeta)$ — некое фундаментальное решение однородного уравнения

$$y_1'' + \left(\frac{3}{2}\sigma h' - \frac{\sigma^2 h^2}{4}\right)y_1 = 0, \tag{1.8}$$

которое получается из первого уравнения (1.4) путем замены $y = S(\zeta)\exp\left(-\frac{\sigma}{2}\int h\,d\zeta\right)$, кроме того, y_1 удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{y_1^2} < \infty. \tag{1.9}$$

Подставив в (1.8) выражения для h' и h, получим

$$y_1'' + [-\beta^2 - 2\beta(3-\beta)\sin(\zeta)\exp(-\zeta) - \tag{1.10}$$
$$- \beta^2\exp(-2\zeta)(1+\sin(2\zeta)) + 2\beta^2\cos(\zeta)\exp(-\zeta)]\,y_1 = 0.$$

Для исследования функции $S(\zeta)$ при больших ζ найдем асимптотику $y_1(\zeta)$ из (1.10).

1. Пусть $\alpha > 1$, т. е. $\beta > 0$. Обозначим $t = \beta\zeta$, $dy_1/dt = x$, тогда из (1.10) получим систему

$$dy_1/dt = x,\quad dx/dt = \varphi(t)y_1, \tag{1.11}$$

где

$$\varphi(t) = 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\beta}\right)\left(1 + \sin\left(\frac{2t}{\beta}\right)\right) + \frac{2}{\beta}(3 -$$
$$- \beta)\sin\left(\frac{t}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) - 2\cos\left(\frac{t}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right).$$

Систему (1.11) можно асимптотически проинтегрировать путем сведения ее к L-диагональному виду [10]. Асимптотическое интегрирование возможно в области $t_0 \leqslant t < \infty$, где справедливо $\varphi(t) \geqslant k > 0$. Считая $\beta \leqslant 1/10$ и полагая $t_0 = 2\beta \ln(1/\beta)$, получим, что для $t \in [t_0\infty)$ неравенство $\varphi(t) \geqslant \geqslant k > 0$ выполнено.

В качестве фундаментального решения (1.11) на $[t_0\infty)$ возьмем

$$(1.12) \qquad y_1 = (\gamma + \eta) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi}\, du\right), \quad x = (\gamma - \eta) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi}\, du\right),$$

где γ и η удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$(1.13) \qquad \gamma = 1 + \int\limits_{t}^{\infty} \frac{\varphi'}{4\varphi} (\gamma - \eta)\, du,$$

$$\eta = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'}{4\varphi} (\gamma - \eta) \exp\left(-2 \int\limits_{u}^{t} \sqrt{\varphi}\, du\right) du.$$

Можно проверить, что так определенные y_1 и x удовлетворяют системе (1.11). Как показано в [10], уравнения (1.13) имеют единственное непрерывное ограниченное решение на $[t_0\infty)$. Тогда из (1.13) получаем

$$\gamma = 1 + O\left(\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)\right), \quad \eta = O(\beta \exp(-2t)).$$

Заметим, что $\gamma \to 1$, $\eta \to 0$ для любого t из $[t_0\infty)$ при $\beta \to 0$. Отсюда и из (1.12) с учетом того, что $\sqrt{\varphi} = 1 + f(t)$, где $|f(t)| < (7/\beta)\exp(-t/\beta)$, получим оценку $y_1(t)$ для достаточно малых β и $t \in [t_0\infty)$.

Оценим теперь $y_1(t)$ на отрезке $[0t_0]$. Из ограниченности γ, η на $[t_0\infty)$ при $\beta \leqslant 1/10$ и из (1.12) следует, что $y_1(t_0)$, $y_1'(t_0)$ также ограничены и $y_1(t_0) > 0$, $y_1'(t_0) > 0$ для достаточно малых β. Тогда для $y_1(t)$ имеем

$$(1.14) \qquad y_1(t) = y_1(t_0) + y_1'(t_0)(t - t_0) + \int\limits_{t}^{t_0} du \int\limits_{u}^{t_0} \varphi(u)\, y_1(u)\, du.$$

Обозначим

$$\delta = \int\limits_{0}^{t_0} du \int\limits_{0}^{t_0} |\varphi(u)|\, du.$$

Для достаточно малых β выполнено $\delta < 1$, и, кроме того, $\delta \to 0$ при $\beta \to 0$. Тогда из (1.14) получим

$$\sup_{t \in [0t_0]} |y_1(t) - y_1(t_0)| \leqslant \frac{|y_1(t_0)|\,\delta + |y_1'(t_0)|\, t_0}{1 - \delta}.$$

Таким образом, при достаточно малых β величина $y_1(t) > 0$ и ограничена на $[0t_0]$, так как $y_1(t_0) \to 1$ при $\beta \to 0$. В силу этого и асимптотического выражения (1.12) условие (1.9) выполнено.

Используя (1.12) и выражение для $\varphi(t)$, из (1.7) получим асимптотику $S(\zeta)$ для $\zeta > \zeta_0$, где $\zeta_0 = t_0/\beta = 2\ln(1/\beta)$,

$$(1.15) \qquad S(\zeta) = O(\beta^2 \exp(-2\beta\zeta)).$$

Отсюда следует, что толщина теплового пограничного слоя будет $\sim 1/2\beta$ или в реальных координатах $\sim(\nu/\Omega)^{1/2}(1/2\beta)$, т. е. при малых β во много раз превзойдет толщину гидродинамического.

2. Пусть $\alpha < 1$, т. е. $\beta < 0$. Обозначая $t = -\beta\zeta$, получим систему, аналогичную (1.11), только в выражении для $\varphi(t)$ β заменится на $-\beta$. Проделав ту же процедуру, что и в случае $\alpha > 1$, найдем асимптотику

$y_1(\zeta)$. Она будет выражаться аналогично (1.12), т. е. $y_1(\zeta) \sim \exp(-\beta\zeta)$. Подставив последнее в (1.7), получим, что $S(\zeta)$ не стремится к нулю при $\zeta \to \infty$. Таким образом, в случае, когда жидкость на бесконечности вращается быстрее диска, стационарного решения нет. Физически это объясняется тем, что в таких условиях жидкость оттекает от диска и диффузия тепла ничем не ограничена.

Выражение для q находится непосредственным интегрированием второго уравнения (1.4)

$$q = \frac{c_V}{\nu\Omega}\frac{(T_0 - T_\infty)}{J_1}\int\limits_\zeta^\infty \exp\left(\sigma\int hdu\right)du + \frac{J_2}{J_1}\int\limits_\zeta^\infty \exp\left(\sigma\int hdu\right)du - \tag{1.16}$$

$$- \int\limits_\zeta^\infty \exp\left(\sigma\int hdu\right)\left[\int\limits_0^u N(u)\exp\left(-\sigma\int hdu\right)du\right]du,$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^\infty \exp\left(\sigma\int hdu\right)du;$$

$$J_2 = \int\limits_0^\infty\left[\exp\left(\sigma\int hdu\right)\int\limits_0^u N(u)\exp\left(-\sigma\int hdu\right)du\right]du;$$

$$N(\zeta) = -\left(4S + 3\sigma h'^2\right) = -4\left(S + \frac{12}{\sigma}\beta^2\sin^2(\zeta)\exp(-2\zeta)\right).$$

Из (1.15), (1.16) получим

$$q = O(\exp(-2\beta\zeta)).$$

Из (1.16) также видно, что решение для q, удовлетворяющее граничным условиям (1.6), существует лишь для $\beta > 0$, даже если пренебречь диссипацией, т. е. положить $N(\zeta) = 0$.

2. Рассматривается течение между двумя соосными бесконечными вращающимися дисками, отстоящими друг от друга на расстояние l. Температуры и угловые скорости дисков T_1, Ω_1 и T_2, Ω_2. Течение между бесконечными соосными параллельными дисками исследовалось в [2, 5, 11]. Задача, как и в случае одного диска, может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Отличие состоит в том, что давление вместо (1.2) ищется в виде $p = P(z) + (1/2)\lambda^2 r^2$, где λ находится из граничных условий. Так, в [5] показано, что если скорости вращения дисков близки, то $\lambda = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Граничные условия (1.6) заменятся на

$$S(0) = S(l) = q(l) = 0, \quad q(0) = (c_V/\nu\Omega)(T_1 - T_2).$$

Если известны h и g, функции S и q определяются по соотношениям

$$S(\zeta) = y_1\left[\frac{-\left(\int\limits_0^\zeta \frac{du}{y_1^2}\right)\left(\int\limits_0^l \frac{1}{y_1^2}\left(\int\limits_0^u M(u)\,y_1(u)\,du\right)du\right)}{\int\limits_0^l \frac{du}{y_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\zeta \frac{1}{y_1^2}\left(\int\limits_0^u M(u)\,y_1(u)\,du\right)du\right]\exp\left(\frac{\sigma}{2}\int hd\zeta\right),$$

где y_1 — некое фундаментальное решение однородного уравнения (1.8)

$$q(\zeta) = \frac{c_V}{\nu\Omega}(T_1 - T_2)\left[1 - \frac{\int\limits_0^\zeta \exp\left(\sigma \int h du\right) du}{I_1}\right] -$$

$$- \frac{I_2}{I_1}\int\limits_0^\zeta \exp\left(\sigma \int h du\right) du + \int\limits_0^\zeta \exp\left(\sigma \int h du\right)\left(\int\limits_0^u N(u) \exp\left(-\sigma \int h du\right) du\right) du,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^l \exp\left(\sigma \int h du\right) du;$$

$$I_2 = \int\limits_0^l \exp\left(\sigma \int h du\right) \int\limits_0^u N(u) \exp\left(-\sigma \int h du\right) du du.$$

После того, как распределение температуры найдено, можно вычислить теплоотвод с любой части диска.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за поддержку работы.

Поступила 24 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Millsaps K., Pohlhausen K.** Heat transfer by laminar flow from a rotating plate.— «J. Aeron. Sci.», 1952, vol. 19, p. 120.
2. **Batchelor G. K.** Note on a class of solutions of Navier — Stokes equation representing steady rotationally-symmetric flow.— «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1951, vol. 4, p. 29—41.
3. **Kármán Th. V.** Über laminare und turbulente Reibung.— «Z. angew. Math. Mech.», 1921, vol. 1, p. 233.
4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. **Stewartson K.** On the flow between two rotating coaxial disks.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1953, vol. 49, N 2.
6. **Rogers M. H., Lance G. N.** The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk.— «J. Fluid Mech.», 1960, vol. 7, p. 617.
7. **Weidman P. D., Redekopp L. G.** On the motion of a rotating fluid in the presence of an infinite rotating disk.— «Arch. Mech.», 1976, vol. 28, N 5—6.
8. **Riley N.** The heat transfer from a rotating disk.— «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1964, vol. 17, p. 331.
9. **Andrews R. D., Riley N.** Unsteady heat transfer from a rotating disk.— «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1969, vol. 22, p. 19.
10. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
11. **Holodnik M., Kubicek M., Hlavacek V.** Computation of the flow between two rotating coaxial disks.— «J. Fluid Mech.», 1977, vol. 81, pt 4, p. 689.