

**О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН
В ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ**

B. M. Кузнецов

(Новосибирск)

Выводится приближенное уравнение неустановившегося распространения прямолинейных трещин. Рассматривается задача о равновесии и распространении симметричной системы трещин в упруго-хрупком теле.

1. Приближенное уравнение распространения трещины. До настоящего времени известно весьма небольшое количество работ [1-3], в которых движение трещины исследуется при помощи точных решений динамических уравнений теории упругости. Ввиду больших математических трудностей авторы этих исследований обычно рассматривают настолько искусственные постановки задач, что результаты их решений фактически не поддаются физической интерпретации. Естественны поэтому многочисленные попытки приближенного описания процесса развития трещин в постановках, более отвечающих реальным условиям. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении была работа Мотта [4], в которой автор, дополнив обычное энергетическое условие равновесия трещины [5]

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad (1.1)$$

производной по длине трещины l от кинетической энергии T :

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial \Pi}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l} \quad (1.2)$$

получил простую формулу

$$V = k \sqrt{E/\rho} (1 - l_0/l)^{1/2} \quad (1.3)$$

Здесь W — потенциальная энергия деформации, Π — поверхностная энергия, E — модуль Юнга, ρ — плотность, l_0 — длина равновесной трещины, k — эмпирическая константа. Мотт пользовался статическим выражением для потенциальной энергии деформации, что по-видимому, можно считать оправданным, так как в более поздней работе Уэльса и Поста [6] было экспериментально показано, что напряженное состояние в окрестности движущейся трещины несущественно отличается от статического случая. В этой же работе было показано, что формула (1.3) качественно неплохо описывает опытные данные, хотя и дает несколько завышенные значения скорости (при $k = 0.38$). Заметим, что работа Мотта основана на приближенной постановке. Отметим также, что уравнение (1.2) не соответствует закону сохранения энергии.

Действительно, если обозначить через A работу внешних сил, то должно иметь место равенство

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} \quad (1.4)$$

Так как граница области изменяется со временем, то $d/dt = \partial/\partial t + \partial/\partial l V$, где $\partial/\partial t$ означает производную по времени при постоянной границе. Очевидно, что

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial l} V \quad (1.5)$$

С другой стороны, по теореме о потенциальной энергии деформации [7], в плоском случае

$$A = 2W + \iint \rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dx dy \quad (1.6)$$

где u и v — компоненты вектора смещений. Комбинируя (1.4) — (1.6), получаем

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{\partial \Pi}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial l} \iint \rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dx dy \quad (1.7)$$

Как видно, это выражение отличается от (1.2) наличием добавочного члена в правой части.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в упругом материале имеется равновесная трещина, длина которой и растягивающее усилие на бесконечности удовлетворяют следующему условию

$$N = K \quad (1.8)$$

Здесь N — коэффициент интенсивности напряжения, K — коэффициент сужения.

В начальный момент времени $t = t_0$ растягивающее усилие мгновенно возрастает до величины $p > p_0$. Требуется определить скорость трещины. Прежде всего откажемся от условия плавности смыкания берегов трещины, сохранив лишь физически необходимое условие конечности напряжений.

Примем следующие гипотезы. 1. Компоненты вектора смещений в каждый момент времени определяются так же, как в статической задаче. 2. Разность между приложенными внешними силами и силами сцепления в носике трещины уравновешивается силами инерции.

Рассмотрим частицу среды, прилегающую к внутренней поверхности трещины в точке, находящейся на малом расстоянии s от ее конца. Если скорость поступательного движения концевой области есть V , то с точностью до малых высшего порядка в этой точке

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V \frac{\partial v}{\partial s} \quad (1.9)$$

Эта скорость приобретается частицей за время порядка s/V , так что ускорение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sim \frac{V^2}{s} \frac{\partial v}{\partial s} \quad (V = 4 \frac{1 - v^2}{E} N s^{1/2}) \quad (1.10)$$

Согласно первой гипотезе получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{2V^2(1 - v^2)}{E} \frac{N}{s^{3/2}} \quad (1.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что производная $\partial^2 v / \partial x^2$ есть величина того же порядка. Действительно, по [8]

$$v = \frac{4(1 - v^2)}{E} \operatorname{Im} \varphi(z), \quad \varphi(z) = \frac{p}{2} \sqrt{z^2 - l^2} \quad (1.12)$$

Таким образом, при $|x| \ll l$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2p(1 - v^2)}{E(l^2 - x^2)^{3/2}} \left[\frac{x^2}{l^2 - x^2} - 1 \right] \quad (1.13)$$

На расстоянии $s = l - x \ll l$ от конца трещины $\partial^2 v / \partial x^2$ есть величина порядка

$$N(1 - v^2) / Es^{1/2}.$$

Чисто формально, динамическое уравнение

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

в окрестности носика трещины превращается в статическое, если вместо N взять

$$N \left[1 - k \frac{V^2 p}{\mu} \right] \quad (1.15)$$

где k — эмпирический множитель.

Используя вторую гипотезу, следует принять

$$N - K = kN \frac{V^2 p}{\mu} \quad (1.16)$$

Для определения неизвестной постоянной k потребуем априори, чтобы предельная скорость расширения трещины была равна скорости распространения рэлеевских волн c . Это предположение опирается на известные результаты точных решений динамических задач [1-3].

Таким образом, из (1.16) получаем окончательное выражение

$$V = c \left(1 - \frac{K}{N} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

В том случае, если развитие трещины происходит под действием постоянных растягивающих напряжений, формуле (1.17) можно придать следующий вид:

$$V = c \left(1 - \sqrt{\frac{l_0}{l}} \right)^{1/2} \quad (1.18)$$

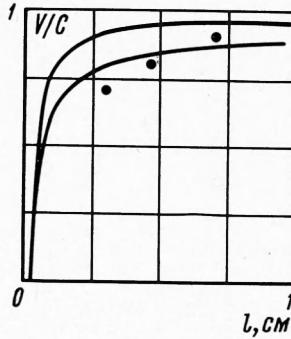
где l_0 — длина равновесной трещины, а l — длина трещины в данный момент времени.

Зависимость (1.18) графически изображена на фиг. 1 (кривая 1) вместе с формулой (1.3) (кривая 2) и тремя экспериментальными точками, полученными авторами [6].

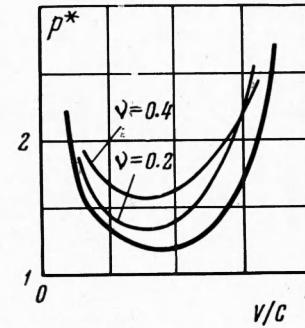
В работах [3, 9] исследована задача о распространении трещины с постоянной скоростью, начиная из состояния покоя. В этом случае $l = l_0 + Vt$, или, если пренебречь начальной длиной трещины, $l = Vt$, так что коэффициент интенсивности напряжений

$$N = \frac{p \sqrt{Vt}}{\sqrt{2}} \quad (1.19)$$

Из (1.17) следует, что модуль сцепления K также должен быть пропорционален $t^{1/2}$. В работе [9] показано, что этот случай осуществляется, если концевая область



Фиг. 1



Фиг. 2

трещины увеличивается с постоянной для данного материала скоростью. Тогда вместо модуля сцепления K вводится новая характеристика материала R , связанная с K соотношением:

$$K = R \sqrt{2t} \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) и (1.19) в (1.17), получаем

$$\frac{p \sqrt{c}}{R} = \frac{2}{\left(\frac{V}{c}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \quad (1.21)$$

На фиг. 2 изображен график, взятый из работы [9], на котором жирная кривая построена по формуле (1.21).

Как видно из фиг. 1 и 2, формула (1.17), учитывая весьма грубые допущения, сделанные при ее выводе, неплохо описывает результаты предыдущих авторов.

2. Равновесие системы параллельных трещин. В этом параграфе рассмотрим плоскую задачу о равновесии бесконечно большего числа трещин длиной $2l$ и $2m$, расположенных параллельно друг другу на расстоянии h одна от другой (фиг. 3) в упругом теле, растягиваемом на бесконечности постоянным напряжением p . Границы трещин, которые будем считать разрезами, свободны от напряжений. Будем решать эту задачу приближенным способом, предложенным в [10]. Накладывая на получающееся напряженное состояние всестороннее равномерное сжатие

$$\sigma_y = \sigma_x = -p$$

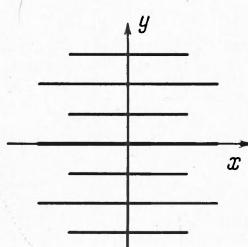
редуцируем поставленную задачу к задаче с нулевыми напряжениями на бесконечности и заданными напряжениями на берегах разрезов. В силу симметрии относительно любой прямой, проходящей через одну из трещин, ограничимся рассмотрением полосы $0 \leq y \leq h$ (фиг. 4). На границах ее имеют место следующие равенства:

$$\sigma_x = \sigma_y = -p, \quad y = 0, \quad |x| \leq l; \quad y = h, \quad |x| \leq m \quad (2.1)$$

и, в силу симметрии,

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad y = 0, \quad |x| > l; \quad y = h, \quad |x| > m \quad (2.2)$$

Здесь и ниже используем общепринятые обозначения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, v и v — компоненты вектора смещений.



Фиг. 3

Применяя к анализу данного напряженного состояния метод Колосова — Мусхелишвили [8], имеем соотношения, определяющие напряжение и смещение через две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (2.3)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

где μ — константа Ламе, ν — коэффициент Пуассона.

Нетрудно убедиться в том, что условия (2.1) и (2.2), вследствие (2.3) приводятся к граничным условиям для одной аналитической функции

$$\operatorname{Re} \varphi'(z) = -\frac{p}{2}, \quad y=0, \quad |x| \leq l; \quad y=h, \quad |x| \leq m \quad (2.4)$$

$$\operatorname{Im} \varphi'(z) = 0, \quad y=0, \quad |x| > l; \quad y=h, \quad |x| > m \quad (2.5)$$

Эта краевая задача решается следующим образом. Функция

$$\zeta = l^{\pi z/h} \quad (2.6)$$

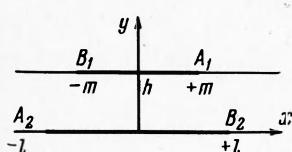
отображает полосу на верхнюю полуплоскость $\eta > 0$ с соответствием точек, показанным на фиг. 5. Для функции $f(\zeta) = \varphi'[z(\zeta)]$ имеют место следующие граничные условия:

$$\operatorname{Re} f(\zeta) = -\frac{p}{2}, \quad -a_1 < \zeta < -\frac{1}{a_1}, \quad a_2 < \zeta < \frac{1}{a_2}, \quad \eta = 0 \quad (2.7)$$

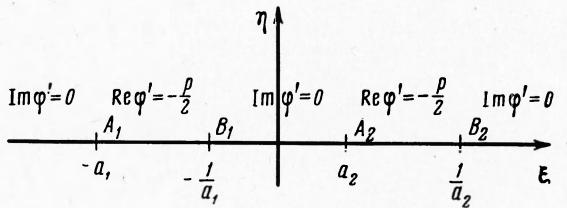
$$\operatorname{Im} f(\zeta) = 0, \quad -\frac{1}{a_1} < \zeta < a_2, \quad \zeta > \frac{1}{a_2}, \quad \zeta < -a_1, \quad \eta = 0 \quad (2.8)$$

$$(a_1 = e^{\frac{\pi m}{h}}, \quad a_2 = e^{-\frac{\pi l}{h}})$$

Решение этой задачи может быть получено при помощи формулы Келдыша — Седова [11].



Фиг. 4



Фиг. 5

В классе функций, имеющих интегрируемые особенности на концах отрезков A_1B_1, A_2B_2 (фиг. 5), это решение определяется с точностью до двух произвольных постоянных γ_0, γ_1 и имеет следующий вид:

$$f(\zeta) = \frac{p}{2} \left[\frac{1}{g(\zeta)} - 1 \right] + \frac{\gamma_0 + \gamma_1 \zeta}{\sqrt{(\zeta + a_1)(\zeta + a_1^{-1})(\zeta - a_2)(\zeta - a_2^{-1})}} \quad (2.9)$$

$$(g(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta + a_1^{-1})(\zeta - a_2^{-1})}{(\zeta + a_1)(\zeta - a_2)}})$$

Ветви радикалов выбраны таким образом, что они имеют положительные значения при $\zeta > 1/a_2$. Значение $f(\zeta)$ на бесконечности равно нулю. Исследуем особенности в точках A_1, B_1, A_2 и B_2 . Из (2.9) и (2.6) нетрудно вывести, что при подходе к этим точкам извне отрезков A_1B_1 и A_2B_2 действительная часть функции стремится к бесконечности по закону $\operatorname{const}/\sqrt{s}$, где s — расстояние от соответствующих точек, малое по сравнению длиной разреза, а именно:

в точке A_1

$$\sigma_y = 2\operatorname{Re} \varphi' = \frac{\gamma_0 - \gamma_1 a_1}{\sqrt{a_1(a_1 - a_1^{-1})(a_1 + a_2)(a_1 + a_2^{-1})}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} \equiv \frac{N_1}{\sqrt{s}} \quad (2.10)$$

в точке B_1

$$2\operatorname{Re} \varphi = p \sqrt{\frac{(a_1 - a_1^{-1})(a_1^{-1} + a_2^{-1})}{a_1^{-1}(a_1^{-1} + a_2^{-1})}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} - \\ - \frac{\gamma_0 - \frac{\gamma_1}{a_1}}{\sqrt{\frac{(a_1 - a_1^{-1})(a_1^{-1} + a_2)(a_1^{-1} + a_2^{-1})}{(a_1^{-1} - a_2)(a_1^{-1} + a_2)a_2}}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} \equiv \frac{N_1'}{V^s} \quad (2.11)$$

в точке A_2

$$2\operatorname{Re} \varphi' = - \frac{\gamma_0 + \gamma_1 a_2}{\sqrt{\frac{(a_1 + a_2)(a_1^{-1} + a_2)(a_2^{-1} - a_2)a_2}{(a_1^{-1} + a_1)(a_2^{-1} + a_1^{-1})(a_2^{-1} - a_2)a_2^{-1}}}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} \equiv \frac{N_2}{V^s} \quad (2.12)$$

в точке B_2

$$2\operatorname{Re} \varphi' = p \sqrt{\frac{(a_2^{-1} + a_1)(a_2^{-1} - a_2)}{(a_2^{-1} - a_2)a_2^{-1}}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} + \\ + \frac{\gamma_0 + \gamma_1/a_2}{\sqrt{\frac{(a_1^{-1} + a_1)(a_2^{-1} + a_1^{-1})(a_2^{-1} - a_2)a_2^{-1}}{(a_1^{-1} + a_1)(a_2^{-1} + a_1^{-1})(a_2^{-1} - a_2)a_2^{-1}}}} \sqrt{\frac{h}{\pi s}} \equiv \frac{N_2'}{V^s} \quad (2.13)$$

Для определения постоянных γ_0 и γ_1 потребуем выполнения равенств

$$N_1 = N_1', \quad N_2 = N_2' \quad (2.14)$$

вытекающих из физически очевидного условия симметрии относительно оси y . Из (2.14) и (2.10) — (2.13) получаем

$$\gamma_0 = p(a_1, a_2 - 1), \quad \gamma_1 = p(a_2 - a_1) \quad (2.15)$$

$$N_1 = p \sqrt{\frac{h}{\pi}} \sqrt{\frac{a_2(a_1^2 - 1)}{(a_1 + a_2)(1 + a_1 a_2)}}, \quad N_2 = p \sqrt{\frac{h}{\pi}} \sqrt{\frac{a_1(1 - a_2^2)}{(a_1 + a_2)(1 + a_1 a_2)}} \quad (2.16)$$

Согласно теории равновесных трещин [7], последние находятся в покое, если коэффициент интенсивности напряжений равен модулю сцепления K

$$N_1 = N_2 = K \quad (2.17)$$

Подставляя сюда (2.16), находим

$$a_1 = \frac{1}{a_2}, \quad l = m, \quad N_1 = N_2 = p \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \operatorname{th} \frac{\pi l}{h} \quad (2.18)$$

Таким образом, рассматриваемая система трещин может находиться в равновесии, если трещины имеют одинаковую длину, причем

$$\frac{p^2 h}{2\pi} \operatorname{th} \frac{\pi l}{h} = K^2 \quad (2.19)$$

при $h/l \rightarrow \infty$, получается выражение

$$p^2 l = 2K^2 \quad (2.20)$$

совпадающее с соответствующей формулой для изолированной трещины.

В другом предельном случае близко расположенных трещин при $h/l \rightarrow 0$ равновесное расстояние между трещинами не зависит от их длины

$$h = \frac{2\pi K^2}{p^2} \quad (2.21)$$

Предположим теперь, что в теле заранее имеется система трещин, изображенная на фиг. 3. Предположим далее, что к телу мгновенно приложены растягивающие усилия такие, что $N_1 > K$ и $N_2 > K$.

Тогда, очевидно, трещины начнут распространяться, и более длинная трещина будет расширяться быстрее, так как $N_2 > N_1$. Через некоторое время соотношение между длинами трещин может стать таким, что для коротких трещин N_1 станет меньше K . Тогда более короткие трещины будут слипаться. В этом случае скорость трещины, очевидно, должна определяться выражением

$$V = c \left(\frac{K}{N} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

3. Развитие системы трещин. Рассмотрим с точки зрения развитой в п. 1 приближенной теории задачу о распространении системы трещин двух различных длин, изображенной на фиг. 3. Имеем

$$\frac{dm}{dt} = c \left(1 - \frac{K}{N_1} \right)^{1/2}, \quad \frac{dl}{dt} = c \left(1 - \frac{K}{N_2} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

где N_1 и N_2 определяются соответственно формулами (2.16), которые после преобразований могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} N_1 &= p \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\operatorname{sh} \frac{\pi m}{h} \operatorname{sch} \frac{\pi(m+l)}{2h} \operatorname{sch} \frac{\pi(m-l)}{2h} \right)^{1/2} \\ N_2 &= p \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\operatorname{sh} \frac{\pi l}{h} \operatorname{sch} \frac{\pi(m+l)}{2h} \operatorname{sch} \frac{\pi(m-l)}{2h} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Начальные значения длин трещины обозначим через m_0 и l_0 . Соответствующие им значения a_1 , a_2 , N_1 и N_2 обозначим индексом нуль. Из (3.2) следует, что

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\operatorname{sh} \frac{\pi l}{h} \operatorname{csch} \frac{\pi m}{h} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

ак, что при $l > m$, $N_2 > N_1$.

Если $N_{10} = K$, $N_{20} = K$, то трещины не расширяются. При $N_{10} < K < N_{20}$ короткие трещины схлапываются, длинные — расширяются. Наконец, при $N_{10} > K$, $N_{20} > K$ происходит расширение обеих трещин со скоростями, определяемыми уравнениями (3.1). Так как скорости расширения не одинаковы, то с течением времени N_1 может стать меньше K , и развитие коротких трещин прекратится.

Действительно, рассмотрим случай трещин, расположенных близко одна к другой

$$\frac{l}{h} \gg \frac{m}{h} \gg 1 \quad (3.4)$$

В этом случае уравнения (3.1) приближенно записываются в виде

$$\frac{dm}{dt} = c \left[1 - \frac{K}{p} \sqrt{\frac{\pi}{h}} e^{-\frac{\pi(l-m)}{h}} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\frac{dl}{dt} = c \left[1 - \frac{K}{p} \sqrt{\frac{\pi}{h}} \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

Таким образом, скорость длинных трещин постоянна, а скорость коротких — убывает, обращаясь в нуль в некоторый момент времени, когда

$$l - m = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{p}{K} \sqrt{\frac{\pi}{h}} \quad (3.7)$$

Если трещины имеют одинаковые длины, то их распространение описывается одним уравнением

$$\frac{dl}{dt} = c \left(1 - \frac{K}{N} \right)^{1/2}, \quad N = p \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi l}{h}} \quad (3.8)$$

Исследуем это уравнение на устойчивость. Пусть

$$l = l_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll l_0, \quad N_0 = p \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi l_0}{h}} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.8) и производя соответствующие разложения по малому ϵ с точностью до членов первого порядка, получаем, полагая, что $dl_0 / dt \neq 0$

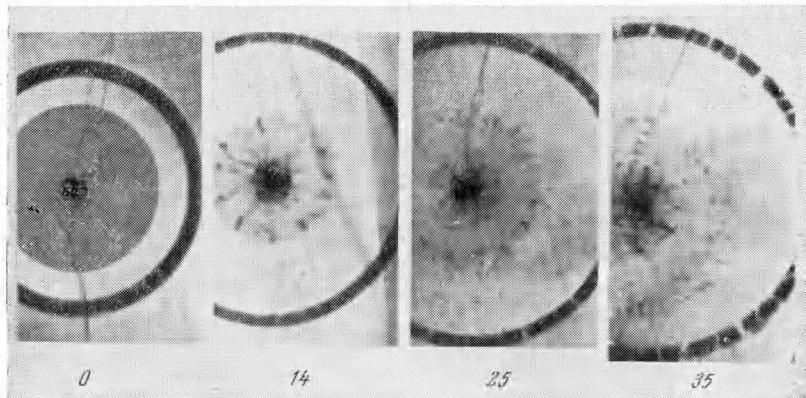
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dl_0}{dt} \frac{K}{N_0 - K} \frac{\pi\epsilon}{2h} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi l_0}{h}} \quad (3.10)$$

что с учетом (3.8) может быть проинтегрировано в виде

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{c} \frac{dl_0}{dt} \quad (3.11)$$

где ϵ_0 — величина начального возмущения.

Таким образом, если в некоторый момент времени скорость системы одинаковых трещин возрастает, то будет расти и малое возмущение — движение в этом случае неустойчиво. Наоборот, если трещины тормозятся — движение устойчиво. Развитие



Фиг. 6

системы одинаковых трещин обладает неустойчивостью и другого типа. Представим себе, что все трещины через одну получили одинаковые приращения длины, так что образовалась система, изображенная на фиг. 3. Распространение такой системы описывается уравнением (3.1).

Нетрудно убедиться в том, что система уравнений (3.1) неустойчива. Если обозначить через x и y малые возмущения величин m и l :

$$m = l_0 - y, \quad l = l_0 + x, \quad x, y \ll l_0 \quad (3.12)$$

то, производя разложение правых частей (3.1) в ряды Тейлора, до членов первого порядка, приходим к следующей линейной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha y + \beta x), \quad \frac{dy}{dt} = -A(\alpha x + \beta y) \quad (3.13)$$

где

$$A = \frac{\pi c}{4h} \frac{K}{N_0} \left(1 - \frac{K}{N_0}\right)^{-1/2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi l_0}{h}$$

$$\beta = \operatorname{cth} \frac{\pi l_0}{h} - \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi l_0}{h}$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$s^2 - (\beta^2 - \alpha^2) = 0 \quad (3.14)$$

Так как

$$\beta^2 - \alpha^2 = \operatorname{csch}^2 \frac{\pi l_0}{h}$$

Отсюда следует неустойчивость уравнений (3.1).

4. Хрупкое разрушение при взрывных нагрузках. Многие материалы, не являющиеся хрупкими в обычном смысле этого слова, под действием внезапно приложенных нагрузок, превышающих их прочность, разрушаются при помощи трещинообразования. К таким материалам относятся, например, металлы. На фиг. 6 показаны рентгенограммы разрушения дюралюминиевого кольца, снятые в различные моменты времени (цифры под снимками указывают время в микросекундах).

Математическая теория равновесных трещин не рассматривает вопросы, связанные с образованием трещины, а лишь позволяет рассчитать прочность материала при наличии в нем заданной конфигурации трещин. В связи с этим возникают некоторые трудности в интерпретации получающихся результатов. Действительно, в рассмотренной выше задаче о равномерном растяжении упругохрупкого тела, вообще говоря, возможны следующие четыре варианта трещинообразования при одинаковых нагрузках на бесконечности.

1. Возникает одна равновесная трещина, длина которой определяется выражением (2.20).

2. Возникает система равновесных трещин, расстояние между которыми и длина определяются выражением (2.19).

3. Возникает одна движущаяся трещина, длина которой больше равновесной, а скорость определяется формулой (1.21).

4. Возникает система трещин, движущихся со скоростью, определяемой по формулам (1.20), (2.18).

Для разрешения этих затруднений обратимся к эксперименту. Длина одной равновесной трещины связана с прочностью материала. Если реальная прочность материала есть σ_* , то, согласно (1.10) и (2.20), по порядку величины

$$\sigma_* \sim \sqrt{\frac{\gamma E}{l_0}} \quad (4.1)$$

Известно, что теоретическая прочность σ_T по порядку величины есть

$$\sigma_T \sim 0.1E \quad (4.2)$$

Положим, следуя [12],

$$\gamma \sim 0.1 b E \quad (4.3)$$

где b — межатомное расстояние.

Тогда, если обозначить через a число, показывающее, во сколько раз реальная прочность материала меньше теоретической, то из (4.1) — (4.3) следует, что

$$l_0 \sim 10a^2b \quad (4.4)$$

Например, для мягкой стали и дюралюминия $a \sim 10^2$, так что

$$l_0 \sim 10^5 b = 10^{-3} \text{ см} \quad (4.5)$$

Иногда говорят о динамической прочности материала, которая превышает его прочность, получаемую при статических испытаниях. При этом имеется в виду разрыв образца в одном месте, т. е. образование и развитие одной трещины. С точки зрения теории равновесных трещин это означает, что длина микротрещины, соответствующей динамической прочности меньше, чем для статической прочности.

Заметим, что здесь всюду идет речь о прочности на растяжение. Если достаточно тонкое упругое кольцо подвергнуто внутри статическому давлению p_0 , то каждый элемент кольца испытывает растяжение, приближенно равное

$$\sigma_\theta = p_0 \frac{r}{\delta} \quad (4.6)$$

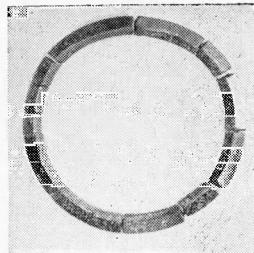
Если p_0 достаточно велико, так что $\sigma_\theta > \sigma_*$, то, как показывает опыт (фиг. 6), в кольце одновременно образуется большое количество трещин.

В этом случае, следовательно, первый и второй варианты не имеют места, а возможны второй и четвертый варианты. Вследствие отмеченной выше неустойчивости равновесия режим второго варианта легко переходит в режим четвертого варианта.

Каждый элемент кольца при малом отношении δ/r можно представить себе, как часть полосы ширины δ , растягиваемой на бесконечности напряжением p . Если пойти дальше и пренебречь в первом приближении влиянием свободных границ, то придем к задаче о распространении системы трещин в бесконечной плоскости.

Самой простой моделью такой системы трещин является система параллельных одна другой трещин, рассмотренная в п. 2 и 3. Если принять в качестве дополнительной гипотезы, что длина каждой трещины определяется только прочностью материала по формуле (4.4), то расстояние между первоначально возникшими микротрещинами определяется выражением

$$\frac{P^2 h}{2\pi} \text{ или } \frac{\pi l_0}{h} = K^2$$



Фиг. 7

Как было выяснено в п. 3, эта система трещин неустойчива. В частности, если все трещины через одну получили одинаковое приращение длины, то более длинные трещины будут развиваться быстрее, а более короткие медленнее. Через некоторое время короткие трещины остановятся и начнут схлопываться. Наличием коротких трещин можно пренебречь. Таким образом, образуется новая система трещин с удвоенным расстоянием между ними. Обозначим через N_2^* коэффициент интенсивности напряжений для системы трещин с расстоянием $2h$ между ними

$$N_2^* = p \sqrt{\frac{h}{\pi}} \left(\operatorname{th} \frac{\pi l}{2h} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

Сравним N_2^* с величиной N_2 , определяемой первой формулой (2.16). После некоторых преобразований отношение N_2^*/N_2 можно представить в виде

$$\frac{N_2^*}{N_2} = \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi m}{2h} \operatorname{sch}^2 \frac{\pi l}{2h} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

Если длина трещины в e раз больше первоначальной, то это выражение отличается от единицы в пределах 1—10% в зависимости от отношения l_0/h . Таким образом, если длина трещины в данный момент времени есть l , то число актов удвоения n равно $\ln(l/l_0)$, а расстояние между трещинами составляет $h = h_0 e^{2n}$. Отсюда получаем, что

$$h = h_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\ln 2} \quad (4.9)$$

Рассмотрим к примеру случай разрушения взрывом стального кольца (фиг. 7). При относительно небольших нагрузках разрушение происходит довольно симметрично, и разброс значений размеров осколков невелик.

Ниже приводятся значения длин осколков H мм, получающихся при разрушении кольца из мягкой стали диаметром $d = 80$ мм, шириной $b = 9$ мм, толщиной $\delta = 10$ мм зарядов ВВ весом 80 г:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H , мм	49	37.5	32	33.5	41	34	31	18	10.5	15.5	21	19.5

Приводим для колец толщиной $\delta = 2.6, 4.6, 9.0$ мм средние экспериментальные значения длины осколков H_0 мм (по трем опытам) при прочих одинаковых параметрах, а также для сравнения теоретические и экспериментальные значения этих длин H_T мм, вычисленные по формуле (4.9), и для сравнения значения этих величин в безразмерном виде.

δ , мм	H_0 , мм	H_T , мм	$H_0/2.6$	$H_T/0.495$
2.6	10.2	4.95	1	1
4.6	17.7	7.4	1.7	1.5
9.0	28.5	12.8	2.7	2.6

Первоначальное расстояние между трещинами определяется при заданных p и σ_* соотношением

$$\frac{h}{\pi l_0} \operatorname{th} \frac{\pi l_0}{h} = \frac{\sigma_*^2}{p^2} \quad (4.10)$$

Если растягивающее напряжение p на 10% превосходит прочность материала, то по этой формуле, расстояние между первоначально образующимися микротрещинами на порядок превосходит их длину, так что, учитывая (4.5), имеем

$$h_0 \sim 10^{-2} \text{ см} \quad (4.11)$$

Если, как сказано выше, пренебречь влиянием свободных границ, то размер осколка H определяется по формуле (4.9), в которой надо положить длину трещины l , равной ширине полосы (кольца) δ . Для $\delta = 1$ см длина осколка также есть величина порядка 1 см, что соответствует данным опыта (табл. 2). Что касается зависимости размеров осколков от ширины кольца, то она неплохо описывается формулой (4.9) при $h_0 = \text{const}$. Вообще говоря, если нагружение кольца происходит квазистатически, то вследствие (4.6) и (4.10) h_0 должно зависеть от ширины кольца. Однако, если начальное напряженное состояние создается ударной волной, то растягивающее напряжение и, следовательно, h_0 от толщины кольца не зависят.

Таким образом, видим, что рассматриваемая модель трещинообразования не противоречит результатам экспериментов. Конечно, такая простая модель выглядит довольно искусственно, но сам процесс «экранирования» малых трещин большими имеет ясный физический смысл. Наличие большой трещины рядом с малой приводит к разгрузке напряженного состояния в окрестности последней.

Поступила 26 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Yoffe E. H. The moving Griffith crack. Phil. mag., ser. 7, 1951, vol. 42, No. 330.
2. Craggs I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 1, p. 66—75.
3. Broberg K. B. The propagation of a brittle crack. Arkiv Fys., 1960, Bd. 18, No. 2, p. 159—192.
4. Mott N. F. Fracture of metals; theoretical consideration. Engeeniering, 1948, vol. 165, p. 16—18.
5. Griffith A. A. The theory of rupture Proc. 1-st 9 Inter. Congr. Appl. Mech. Delft, 1924, p. 55—63.
6. Wells A. A., Post D. The dynamics stress distribution surrounding a runnnig crack. Proc. Soc. Exptl. Stress Analysis, 1958, vol 16, No. 1, p. 69—96.
7. Я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. 5-е. Изд-во «Наука», 1966.
9. Баренблatt Г. И., Саганник Р. Л., Чеперанов Г. П. О неуставновившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
10. Кузнецов В. М. Об одном случае равновесия системы трещин в упругохрупком материале. ПМТФ, 1966, № 5.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2, Физматгиз, 1958.
12. Котрелл А. Прочность материалов. Сб. «Механические свойства новых материалов». Изд-во «Мир», 1966.
13. Irwin. Fracture. Handbuch der Physic. Bd. IV. 1958.

О ДОПУЩЕНИЯХ, ПОЛОЖЕННЫХ В ОСНОВУ ТЕОРИИ ДИФФУЗИОННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

K. K. Зилинг

(Новосибирск)

Приводятся результаты экспериментальной проверки допущений, лежащих в основе теории диффузионной ползучести [1,2], а именно предположения о малости коэффициента вязкости границ и эффективности границ как источников и стоков для вакансий. На основании непосредственного измерения пограничного скольжения, а также сопоставления профиля образцов при изгибе с результатами, даваемыми теорией, делается вывод о том, что названные допущения выполняются лишь для относительно небольшого (порядка 20%) количества кристаллитов. Таким образом, показано, что чисто диффузионная ползучесть не является механизмом, контролирующим высокотемпературную деформацию.

Однако полученные результаты не исключают возможности достаточно эффективного действия направленной самодиффузии для небольшого числа зерен, имеющих, по-видимому, наиболее удачную ориентацию относительно соседей. Исходя из вида зависимости $\dot{\epsilon} = \sigma$, естественно предполагать, что основным процессом, определяющим ползучесть в этих условиях, является переползание дислокаций.

Известно, что для успешного протекания деформации, обусловленной направленной самодиффузией, необходимо выполнение следующих двух условий.

1. Как показано И. М. Лиффицем [3], в общем случае кристалла с произвольной формой зерен диффузионная ползучесть обязательно должна сопровождаться скольже-