УДК 532.516

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И СТЕНКИ В ПРИСУТСТВИИ ПОКОЯЩЕЙСЯ СТЕНКИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Получено решение задачи о затухающем движении гидромеханической системы, состоящей из вязкой жидкости и граничащих с ней твердых стенок. Определено условие, при выполнении которого происходит резкое торможение гидромеханической системы.

Ключевые слова: вязкая жидкость, “свободная” и закрепленная твердые стенки, затухающее движение, резкое торможение гидромеханической системы.

DOI: 10.15372/PMTF20160208

1. В работах [1–3] рассмотрены задачи о движении вязкой жидкости и находящегося в ней “свободного” твердого включения.

В настоящей работе поставлена и решена задача о совместном затухающем движении вязкой жидкости и “свободной” твердой стенки в присутствии другой — закрепленной — твердой стенки.

Теоретическое изучение динамики гидромеханических систем, состоящих из вязкой жидкости и двух твердых стенок, в течение длительного времени сохраняет актуальность [4–12]. Характерным для работ, касающихся данного направления исследований, является то, что стенки испытывают внешние (по отношению к гидромеханической системе) силовые воздействия, покоятся либо совершают заданное движение. В частности, в [4] рассмотрена задача о течении вязкой жидкости между твердыми стенками, которые подвергаются внешним силовым воздействиям, обусловливающим то, что одна из стенок неподвижна, а другая, изначально покоящаяся, движется с заданной постоянной скоростью. В задаче, представленной в настоящей работе, гидромеханическая система также испытывает внешние силовые воздействия: внешние силы приложены к одной из стенок, обеспечивают ее неподвижность. Однако движение другой — “свободной” — стенки происходит исключительно под действием внутренних сил; совместное движение “свободной” стенки и жидкости подлежит определению. Такая задача ранее не рассматривалась.

1.1. Вязкая несжимаемая жидкость заполняет промежуток между двумя плоскими параллельными абсолютно твердыми стенками $S_{\text{п}}$ и $S_{\text{с}}$. В каждый момент времени t стенка $S_{\text{п}}$ покоится, а жидкость и стенка $S_{\text{с}}$ движутся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Границы стенок $S_{\text{п}}$, $S_{\text{с}}$ совпадают с плоскостями $Y = 0$, $Y = H$ ($H > 0$ — постоянная). При $t < 0$ на стенку $S_{\text{с}}$ оказываются внешние силовые воздействия; стенка $S_{\text{с}}$ и жидкость совершают заданное стационарное движение вдоль оси X.

При $t \geqslant 0$ внешние силовые воздействия на стенку $S_{\text{с}}$ отсутствуют. Величины, характеризующие гидромеханическую систему, не зависят от координат X, Z. Требуется определить совместное затухающее движение жидкости и стенки $S_{\text{с}}$ в присутствии стенки $S_{\text{п}}$.

1.2. Пусть $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_X$ — скорость стенки $S_{\text{с}}$ ($U = U(t)$; $\boldsymbol{e}_X = \{1, 0, 0\}$); $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_X$ — скорость жидкости ($V = V(Y, t)$); $V_0 = U_0 Y/H$ ($U_0 = U\big|_{t=0} > 0$); P — давление в жидкости; ρ и ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости; $s_{\text{с}}$ — часть стенки $S_{\text{с}}$, движение которой происходит под действием силы

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_X = -\sigma\rho\nu\,\frac{\partial V}{\partial Y}\Big|_{Y=H}\boldsymbol{e}_X$$

со стороны жидкости (σ — площадь поверхности соприкосновения жидкости и части $s_{\text{с}}$ стенки $S_{\text{с}}$); m — масса части $s_{\text{с}}$ стенки $S_{\text{с}}$.

1.3. Уравнение движения стенки $S_{\text{с}}$ (части $s_{\text{с}}$ стенки $S_{\text{с}}$), уравнение Навье — Стокса и условия, которые должны выполняться на границах стенок и в начальный момент времени, имеют следующий вид:

$$m\,\frac{dU}{dt} = F; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}; \tag{1.2}$$

$$V = 0 \qquad \text{при} \quad Y = 0; \tag{1.3}$$

$$V = U \qquad \text{при} \quad Y = H; \tag{1.4}$$

$$V = V_0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \tag{1.5}$$

2. Для решения поставленной задачи будем применять операционное исчисление [13, 14].

Используя (1.1)–(1.5), получим

$$m(pU^* - U_0) = -\sigma\rho\nu\,\frac{\partial V^*}{\partial Y}\Big|_{Y=H}; \tag{2.1}$$

$$pV^* - V_0 = \nu\,\frac{\partial^2 V^*}{\partial Y^2}; \tag{2.2}$$

$$V^* = 0 \qquad \text{при} \quad Y = 0; \tag{2.3}$$

$$V^* = U^* \qquad \text{при} \quad Y = H, \tag{2.4}$$

где p — комплексная переменная ($|p| \geqslant 0$, $-\pi \leqslant \arg p \leqslant \pi$);

$$U^* = \int\limits_0^\infty U\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt, \qquad V^* = \int\limits_0^\infty V\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Согласно (2.1)–(2.4)

$$U^* = \frac{U_0}{p}\Big(1 - \frac{\operatorname{sh}\eta}{\eta\Phi}\Big); \tag{2.5}$$

$$V^* = \Big(U^* - \frac{U_0}{p}\Big)\frac{\operatorname{sh}(\eta y)}{\operatorname{sh}\eta} + \frac{U_0}{p}\,y. \tag{2.6}$$

Здесь $\eta = \sqrt{p/\nu}\,H$; $\Phi = \lambda\eta\operatorname{sh}\eta + \operatorname{ch}\eta$ ($\lambda = m/(H\sigma\rho)$); $y = Y/H$.

Таким образом,

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} U^* \,\mathrm{e}^{pt}\, dp = \frac{U_0}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Big(1 - \frac{\operatorname{sh}\eta}{\eta\Phi}\Big) \frac{\mathrm{e}^{pt}}{p}\, dp; \tag{2.7}$$

$$V = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} V^* \,\mathrm{e}^{pt}\, dp = \frac{U_0}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Big(y - \frac{\operatorname{sh}(\eta y)}{\eta\Phi}\Big) \frac{\mathrm{e}^{pt}}{p}\, dp, \tag{2.8}$$

где $\alpha > 0$ — постоянная.

Функция $\Phi = \Phi(p)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$p = p_k = -(\nu/H^2)\xi_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

Здесь

$$(k-1)\pi < \xi_k < (k - 1/2)\pi \text{ —} \tag{2.10}$$

корни уравнения

$$\lambda\xi = \operatorname{ctg}\xi. \tag{2.11}$$

По теореме Коши

$$\int\limits_{acdefga} \Big(y - \frac{\operatorname{sh}(\eta y)}{\eta\Phi}\Big) \frac{\mathrm{e}^{pt}}{p}\, dp = 0; \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{abcdefga} \frac{\operatorname{sh}(\eta y)}{\eta\Phi} \frac{dp}{p} = 0, \tag{2.13}$$

где интегрирование производится по контурам, представленным на рис. 1.

Используя (2.7)–(2.9), (2.12), (2.13), получим

$$u = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\xi_k^2\tau}}{\xi_k^2(\lambda^2\xi_k^2 + \lambda + 1)}; \tag{2.14}$$

$$v = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\xi_k^2\tau} \sin(\xi_k y)}{\xi_k^2(\lambda^2\xi_k^2 + \lambda + 1)\sin\xi_k}; \tag{2.15}$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi_k y)}{\xi_k^2(\lambda^2\xi_k^2 + \lambda + 1)\sin\xi_k} = y. \tag{2.16}$$

Здесь $u = U/U_0$; $v = V/U_0$; $\tau = \nu t/H^2$.

Отметим, что согласно (2.10), (2.11) ряд в правой части (2.14) сходится при $\tau \geqslant 0$, ряд в правой части (2.15) сходится при $\tau \geqslant 0$, $1 \geqslant y \geqslant 0$ (оба ряда мажорируются сходящимся рядом $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^2\sqrt{\lambda^2\xi_k^2 + \lambda + 1}}$).

3. Из (2.14)–(2.16) следует, что

$$u \to 0, \quad v \to 0 \qquad \text{при} \quad \tau \to \infty; \tag{3.1}$$

$$\frac{du}{d\tau} < 0 \qquad \text{при} \quad \tau \geqslant 0;$$

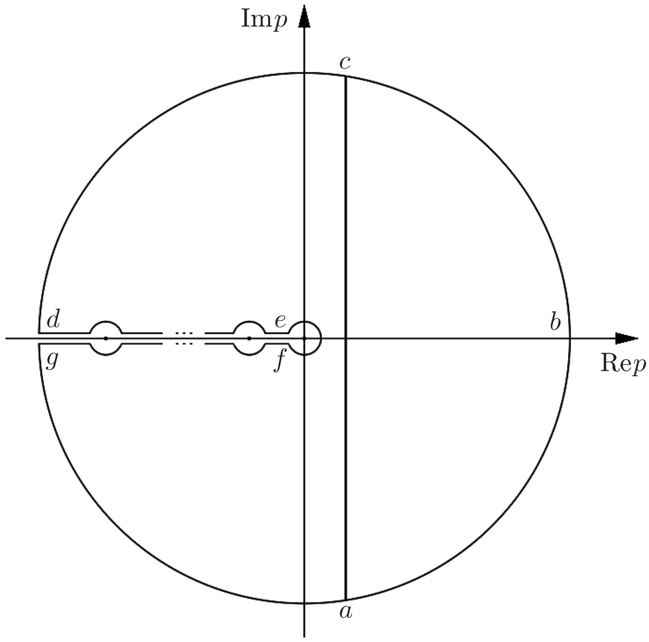

Рис. 1. Контуры интегрирования

$$\bar{v} = u/2 = 1/2 \qquad \text{при} \quad \tau = 0; \tag{3.2}$$

$$u/2 < \bar{v} < u/2 + \delta\, \mathrm{e}^{-\xi_1^2 \tau} \qquad \text{при} \quad \tau > 0. \tag{3.3}$$

Здесь

$$\bar{v} = \frac{\bar{V}}{U_0} = \frac{1}{U_0 H} \int\limits_0^H V\, dY$$

($\bar{V}$ — среднее значение скорости V по координате Y);

$$\delta = \frac{2\lambda - (2\lambda + 1)\cos\xi_1}{\xi_1^2(\lambda^2\xi_1^2 + \lambda + 1)\cos\xi_1}. \tag{3.4}$$

Формулы (3.1)–(3.3), в частности, свидетельствуют о том, что для любого $0 < \lambda < \infty$ величина $\bar{v} - u/2$ имеет хотя бы один максимум.

На рис. 2 линиями *1–3* представлены данные о зависимости u от τ соответственно при $\lambda = 0{,}1$; $1{,}0$; $10{,}0$.

На рис. 3 линиями *1–5* представлены данные о зависимости v от y соответственно при $\tau = 0$; $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}25$; $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}5$; $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}75$; $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 1$.

4. Пусть $\tau^* = \nu t^*/H^2$, t^* — характерное время торможения стенки S_c, которое определяется соотношением

$$U\big|_{t=t^*} = \frac{1}{2}\, U_0. \tag{4.1}$$

Согласно (2.14), (4.1)

$$0 < \theta < \tau^* < \theta + \varepsilon; \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(k-1/2)^2\pi^2\tau_0^*}}{(k-1/2)^2} = \frac{\pi}{4}. \tag{4.3}$$

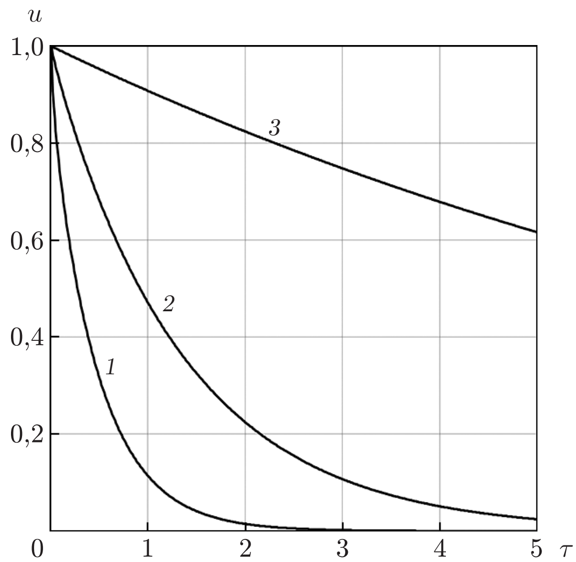

Рис. 2

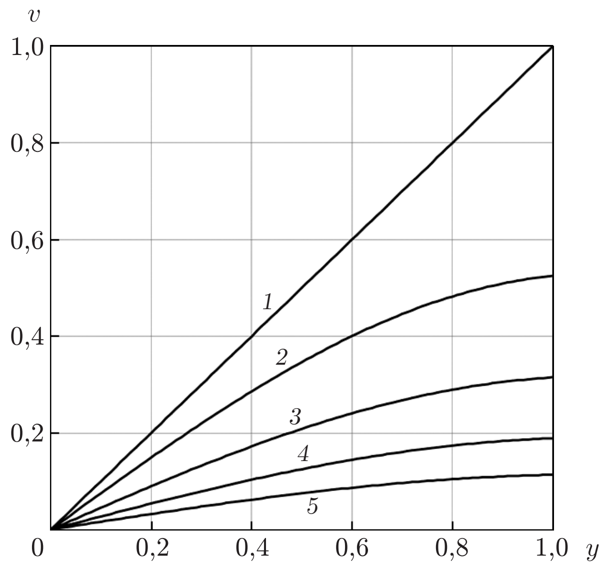

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость u от τ при различных значениях λ:
1 — $\lambda = 0{,}1$, *2* — $\lambda = 1{,}0$, *3* — $\lambda = 10{,}0$

Рис. 3. Зависимость v от y при различных значениях τ:
1 — $\tau = 0$, *2* — $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}25$, *3* — $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}5$, *4* — $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 0{,}75$, *5* — $\lambda = 0{,}1$, $\tau = 1$

Здесь

$$\theta = \frac{1}{\xi_1^2} \ln \frac{4}{\xi_1^2(\lambda^2\xi_1^2 + \lambda + 1)}; \tag{4.4}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{\xi_1^2} \ln \Big\{1 - \frac{8}{\pi^2}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\theta} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\theta}\,\big[1 - \operatorname{erf}(\pi\sqrt{\theta}\,)\big]\Big\}; \tag{4.5}$$

τ_0^* — значение τ^* при $\lambda = 0$.

Из (4.3) следует, что

$$\tau_0^* \approx 0{,}196\,73. \tag{4.6}$$

Используя (2.14), (4.1), (4.6), найдем

$$\frac{d\tau^*}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 2\tau_0^* + \Big(4\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-(k-1/2)^2\pi^2\tau_0^*}\Big)^{-1} \approx 0{,}791\,48.$$

На рис. 4 приведены графики функций $\theta = \theta(\lambda)$ (линия *1*), $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ (линия *2*), а также функции

$$\tau^* = 0{,}196\,73 + 0{,}791\,48\lambda \approx \tau_0^* + \frac{d\tau^*}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\lambda \tag{4.7}$$

(линия *3*).

Данные, представленные на рис. 4, свидетельствуют о том, что согласно (4.2), (4.4), (4.5), (4.7) имеет место приближенная формула

$$\tau^* = \theta \tag{4.8}$$

(для всех $0 < \lambda < \infty$).

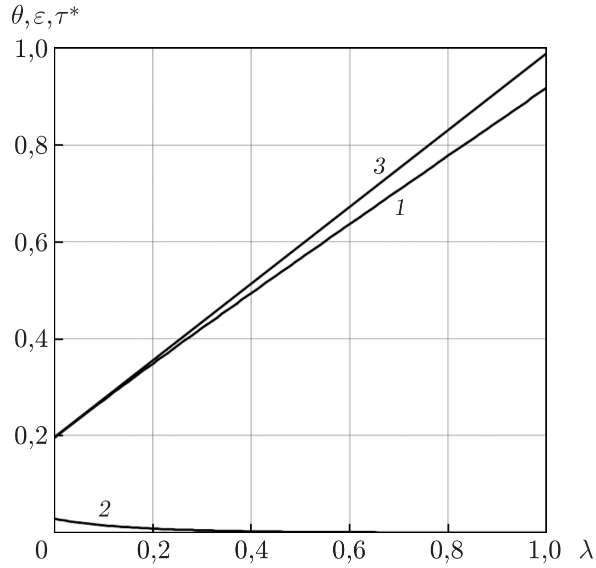

Рис. 4. Зависимости θ (*1*), ε (*2*), τ^* (*3*) от λ

Отметим, что

$$\tau_0^* - \theta\big|_{\lambda=0} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-4}, \qquad \frac{d\tau^*}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} - \frac{d\theta}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \approx -5{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

5. Пусть характерное время торможения стенки S_{c} мало по сравнению с характерным временем движения гидромеханической системы:

$$t^* \ll H/U_0. \tag{5.1}$$

Выполнение соотношения (5.1) соответствует осуществлению резкого торможения стенки S_{c}.

Из (4.8), (5.1) следует условие резкого торможения “свободной” стенки в виде

$$\theta \ll \nu/(HU_0). \tag{5.2}$$

6. Согласно (3.3), (3.4), (4.1), (4.2), (4.4), (4.5)

$$1/4 < \bar{v}\big|_{\tau=\tau^*} < 1/\pi. \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, что характерное время t^* торможения стенки S_{c} может рассматриваться как характерное время торможения жидкости (как целого). Это, в частности, означает, что при выполнении условия (5.2) происходит резкое торможение всей гидромеханической системы.

Автор выражает благодарность О. С. Пятигорской за участие в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
2. **Сенницкий В. Л.** О поведении пульсирующего твердого тела в вязкой жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 93–97.
3. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 81–87.

4. **Слезкин Н. А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
5. **Жмулин Е. М.** Движение вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися и гармонически колеблющимися пластинами // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1972. Т. 3, № 2. С. 51–59.
6. **Wang C.-Y.** The squeezing of a fluid between two plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1976. V. 43, N 4. P. 579–583.
7. **Secomb T. W.** Flow in a channel with pulsating walls // J. Fluid Mech. 1978. V. 88, pt 2. P. 273–288.
8. **Мануйлович С. В.** О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 12–19.
9. **Гурченков А. А.** Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 48–51.
10. **Аристов С. Н., Князев Д. В.** Течения вязкой жидкости между подвижными параллельными плоскостями // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 4. С. 55–61.
11. **Петров А. Г.** Точное решение уравнений Навье — Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 13–18.
12. **Петров А. Г.** О точных и асимптотических решениях уравнений Навье — Стокса в слое жидкости между сближающимися и удаляющимися пластинами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С. 44–57.
13. **Свешников А. Г.** Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. М.: Наука, 1967.
14. **Пчелин Б. К.** Специальные разделы высшей математики. М.: Высш. шк., 1973.

Поступила в редакцию 21/V 2014 г.,
в окончательном варианте — 2/XII 2014 г.