

УДК 536.2.01+517.9

Точное решение для теплового анализа цилиндрического объекта с использованием гиперболической модели теплопроводности

С. Саедодин, М.С.М. Барфоруш

Университет Семнана, Семнан, Иран

E-mail: ms.motaghedi@yahoo.com

Решается гиперболическое уравнение теплопроводности для цилиндра с заданным тепловым потоком в качестве граничного условия. Уравнение решается аналитически и с использованием метода разделения переменных. В результате расчета получены температурные профили, которые позволяют сделать вывод о волновом характере этого вида теплопроводности. Установлено, что по мере увеличения числа Верногта температура может достигать более высоких значений. Кроме того, из полученных профилей видно, что температура в разных точках объекта может становиться даже ниже своего начального значения.

Ключевые слова: закон Фурье, время релаксации, теплопроводность, аналитическое решение, разделение переменных.

Введение

Согласно классической теории теплопроводности, тепловой поток прямо пропорционален градиенту температуры (закон Фурье):

$$q = -k\vec{\nabla}T. \quad (1)$$

Подстановка выражения (1) в первый закон термодинамики приводит к параболическому уравнению теплопроводности для температурного поля

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{S}}{\rho c}. \quad (2)$$

Однако это уравнение не обеспечивает достаточной точности при применении к системам, работающим при очень низких температурах или подвергающимся действию чрезвычайно высоких и быстро меняющихся тепловых потоков [1, 2]. Для таких систем модель тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью, подходит лучше, чем модель диффузионного процесса с его бесконечной скоростью. Волновая модель, впервые предложенная в работах [3, 4], была усовершенствована в 1958 году авторами работ [5, 6], которые в нестационарное уравнение теплопроводности внесли дополнительный член, содержащий время тепловой релаксации. Время тепловой релаксации, являющееся свойством теплопроводной среды, определяет конечное время запаздывания между тепловым потоком и градиентом температуры. Поскольку новый член включает в себя производную времени второго порядка, модифицированное нестационарное уравнение

теплопроводности становится гиперболическим с соответствующими характеристиками. Хорошо известное уравнение Каттанео–Вернотта представляется следующим образом:

$$\bar{q} + \tau \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -k \bar{\nabla} T. \quad (3)$$

В сочетании с законом сохранения энергии оно дает дифференциальное гиперболическое уравнение теплопроводности (ННСЕ) в частных производных [7]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{S}}{\rho c}, \quad (4)$$

которое включает в себя скорость распространения тепловой волны $\sqrt{\alpha/\tau}$ для $\tau > 0$.

Справедливость уравнения (4) была экспериментально подтверждена при очень низких температурах для таких веществ, как NaF и Bi при примерно 10 К [8] и 3,4 К [9] соответственно. Позднее уравнение ННСЕ использовалось для предсказания температур в биологических исследованиях. Авторами работы [10] была предложена двумерная осесимметричная модель двухфазного запаздывания (DPL) для описания теплообмена в живых биологических тканях с неоднородной внутренней структурой. Кроме того, они разработали одномерную модель двухфазного запаздывания при теплообмене в биосреде для исследования теплового отклика живых биологических тканей на лазерное излучение [11]. В работе [12] для исследования повреждения кожного покрова было выведено и использовано одномерное тепловое уравнение в векторной форме для теплопереноса в биосреде.

В литературе можно найти различные аналитические и численные решения ННСЕ [13–17]. Большинство исследователей решали уравнение ННСЕ в одномерной постановке. Авторы работы [18] изучали случай тонкой пленки с двусторонним симметричным нагревом. В работе [19] исследовалась гиперболическая теплопроводность в конечной среде с произвольным источником, а в работе [20] она рассматривалась с произвольными начальными условиями. Авторы [21] изучали задачи при периодических тепловых граничных условиях с наличием ребер, когда процесс переноса тепла не подчинялся закону Фурье. В работе [22] была также представлена модель с источниками тепла, не подчиняющаяся закону Фурье. Авторы [23] использовали преобразование Лапласа, программный пакет MATLAB и ряд Тейлора для решения одномерных ННСЕ. В работе [24] было представлено полностью аналитическое решение для гиперболической задачи теплопроводности в однородной полый сфере при мгновенном изменении температуры на внутренней и наружной поверхностях, а в работе [25] было предложено аналитическое решение для осесимметричного температурного поля, не подчиняющегося закону Фурье, в конечном полой цилиндре с учетом соответствующего соотношения для теплового потока Каттанео–Вернотта.

Существует множество публикаций, в которых ННСЕ решается численно. Так, в работе [26] был применен гибридный численный метод к одномерной пространственной задаче, а в работе [27] применялся модифицированный алгоритм Ньютона–Рафсона с концепцией для определения пограничного теплового потока в одномерной гиперболической задаче теплопроводности. Авторы работы [28] представили модель тепловой волны для теплопередачи в биосреде вместе с семипотоковой моделью распространения света и уравнением для скорости процесса повреждения ткани. В работе [29] решалась обратная одномерная гиперболическая задача теплопроводности методом итеративной регуляризации. Автор [30] применил разностный метод для решения двумерных уравнений ННСЕ, а также получил условия устойчивости для данной задачи. Авторы работы [31] исследовали

гиперболическую теплопроводность в полых цилиндрах из функционально-градиентных материалов. Они предположили, что все свойства материала цилиндра изменяются вдоль радиального направления за исключением времени равномерной тепловой релаксации.

В некоторых работах предлагались совместные численно-аналитические решения уравнений ННСЕ. Например, в работе [32] аналитически и численно исследовались ННСЕ в двумерных цилиндрических координатах. Кроме того, приближенные аналитические решения с применением гомотопического метода возмущений и вариационного метода итерации использовались для решения задач конвективного и конвективно-радиационного охлаждения в уравнении переноса тепла теплопроводностью, не подчиняющемся закону Фурье и включающему зависимость от температуры теплоемкость [33, 34]. Справедливость различных моделей, не подчиняющихся закону Фурье, — спорный вопрос, и окончательного вывода по нему в настоящее время не сделано из-за многообразия систем теплопередачи.

Получение аналитического решения уравнения ННСЕ представляет научный интерес. В настоящей работе аналитическое выражение для поля температур получено для цилиндра, поэтому уравнение ННСЕ решается в цилиндрических координатах. Фактически двумерное аналитическое решение задачи получается при использовании метода разделения переменных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндр, изображенный на рис. 1. Тепловой поток приложен по нормали к верхней поверхности цилиндра ($z=L$) в области $r > r_1$. Без учета тепловыделения двумерное основное уравнение ННСЕ для цилиндра может быть записано как

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Для этого случая граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0, \quad T(R, z, t) = T_\infty, \quad T(r, 0, t) = T_\infty, \quad k \frac{\partial T}{\partial z}(r, L, t) = \begin{cases} 0, & r < r_1, \\ q, & r > r_1. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим твердое тело, изначально находившееся при температуре окружающего воздуха. Тогда

$$T_i = T_\infty. \quad (7)$$

Следовательно, начальные условия будут иметь вид

$$T(r, z, 0) = T_\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(r, z, 0) = 0. \quad (8)$$

2. Аналитическое решение

Для удобства дальнейшего анализа введем следующие безразмерные величины:

$$\theta = k \frac{T - T_\infty}{Lq}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \omega = \frac{z}{L}, \quad \text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \text{Ve} = \sqrt{\frac{\alpha \tau}{L^2}}, \quad (9)$$

$$M = (L/R)^2, \quad \xi_1 = r_1/R.$$

При вводе безразмерных величин безразмерная температу-

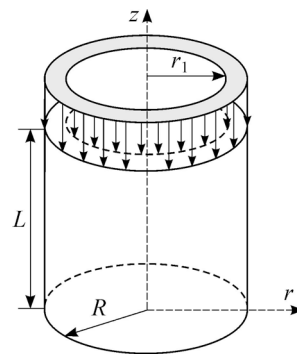


Рис. 1. Конфигурация цилиндра.

ра цилиндра удовлетворяет уравнению

$$\text{Ve}^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} = M \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{M}{\xi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega^2}. \quad (10)$$

Кроме того, граничные условия будут иметь вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \omega, \text{Fo}) = 0, \quad \theta(1, \omega, \text{Fo}) = 0, \quad \theta(\xi, 0, \text{Fo}) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi, 1, \text{Fo}) = \begin{cases} 0, & \xi < \xi_1, \\ 1, & \xi > \xi_1. \end{cases} \quad (11)$$

Начальные условия запишутся как

$$\theta(\xi, \omega, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}}(\xi, \omega, 0) = 0. \quad (12)$$

Для применения известного метода разделения переменных нужно, во-первых, разложить уравнение (10) с граничными (11) и начальными (12) условиями на более простые задачи. В работе [2] решения уравнения (10) были найдены из соотношения

$$\theta(\xi, \omega, \text{Fo}) = \psi(\xi, \omega, \text{Fo}) + \phi(\xi, \omega), \quad (13)$$

где температура $\phi(\xi, \omega)$ определялась из уравнения

$$M \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{M}{\xi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} = 0 \quad (14)$$

при

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(0, \omega) = 0, \quad (15)$$

$$\phi(1, \omega) = 0, \quad (16)$$

$$\phi(\xi, 0) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega}(\xi, 1) = \begin{cases} 0, & \xi < \xi_1, \\ 1, & \xi > \xi_1, \end{cases} \quad (18)$$

а температура $\psi(\xi, \omega, \text{Fo})$ находилась из уравнения

$$\text{Ve}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \text{Fo}} = M \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{M}{\xi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} \quad (19)$$

при

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0, \omega, \text{Fo}) = 0, \quad (20)$$

$$\psi(\xi, 0, \text{Fo}) = 0, \quad (21)$$

$$\psi(1, \omega, \text{Fo}) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega}(\xi, 1, \text{Fo}) = 0, \quad (23)$$

$$\psi(\xi, \omega, 0) = -\phi(\xi, \omega), \quad (24)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \text{Fo}}(\xi, \omega, 0) = 0. \quad (25)$$

Для решения (14) используем следующее разделение переменных:

$$\phi(\xi, \omega) \equiv X(\xi)Z(\omega). \quad (26)$$

Подставляя уравнение (26) в уравнение (14) и осуществляя перестановку, получим

$$M \left(\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{dX}{d\xi} \right) = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{d\omega^2} = -\beta^2. \quad (27)$$

Наконец, задача может быть отдельно выражена в ξ - и ω -координатах следующим образом:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dX}{d\xi} + m^2 X = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d}{d\xi} X(0) = 0, \quad (29)$$

$$X(1) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\omega^2} - \beta^2 Z = 0, \quad (31)$$

$$Z(0) = 0, \quad (32)$$

где

$$m^2 = \beta^2 / M. \quad (33)$$

Решая уравнения (28) и (31) с использованием уравнений (29), (30) и (32), получим

$$X(\xi) = C J_0(\xi m_n), \quad (34)$$

$$Z(\omega) = D \sinh(\beta_n \omega), \quad (35)$$

где m_n — корни $J_0(x) = 0$, β_n — собственные значения $J_0(\beta_n / \sqrt{M}) = 0$. Подставляя уравнения (34) и (35) в уравнение (26), получим следующее решение уравнения (14):

$$\phi(\xi, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\beta_n \omega) J_0(m_n \xi). \quad (36)$$

Используя граничное условие (уравнение (18)) и условие ортогональности, находим

$$a_n \beta_n \cosh \beta_n = \int_{\xi_1}^1 \xi J_0(m_n \xi) d\xi \Big/ \int_0^1 \xi J_0^2(m_n \xi) d\xi. \quad (37)$$

В решении уравнения (37) постоянная a_n определяется как

$$a_n = 2 \left(-\xi_1 J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{M}} \xi_1 \right) + J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{M}} \right) \right) \Big/ \left(\frac{\beta_n^2}{\sqrt{M}} \cosh \beta_n \left[J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{M}} \right) \right]^2 \right). \quad (38)$$

Чтобы решить уравнение (19), необходимо использовать следующее разделение переменных:

$$\psi(\xi, \omega, Fo) \equiv X_1(\xi)Z_1(\omega)T_1(Fo). \quad (39)$$

Подставив уравнение (39) в уравнение (19) и осуществив перестановку, получим

$$\frac{Ve^2}{T_1} \cdot \frac{d^2 T_1}{dFo^2} + \frac{1}{T_1} \cdot \frac{dT_1}{dFo} = M \left(\frac{1}{X_1} \cdot \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \frac{1}{X_1 \xi} \cdot \frac{dX_1}{d\xi} \right) + \frac{1}{Z_1} \cdot \frac{d^2 Z_1}{d\omega^2} = \pm \eta^2 \pm \gamma^2. \quad (40)$$

Для данной задачи подходит $-\eta^2$. Наконец, задача, выраженная в ξ -, ω - и Fo-координатах, представляется следующим образом:

$$d^2 Z_1 / d\omega^2 + \eta^2 Z_1 = 0, \quad (41)$$

$$Z_1(0) = 0, \quad (42)$$

$$(d/d\omega)Z_1(1) = 0, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dX_1}{d\xi} + \frac{\gamma^2}{M} X_1 = 0, \quad (44)$$

$$\frac{d}{d\xi} X_1(0) = 0, \quad (45)$$

$$X_1(1) = 0, \quad (46)$$

$$Ve^2 \frac{d^2 T_1}{dFo^2} + \frac{dT_1}{dFo} + (\eta^2 + \gamma^2)T_1 = 0, \quad (47)$$

$$\frac{d}{dFo} T_1(0) = 0. \quad (48)$$

Решение уравнений (41), (44) и (47) с помощью уравнений (42), (43), (45), (46) и (48) позволяет записать:

$$Z_1(\omega) = A \sin(\eta_g \omega), \quad (49)$$

$$X_1(\xi) = B J_0\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}} \xi\right), \quad (50)$$

где η_g и γ_f — это собственные величины для $\cos \eta_g = 0$ и $J_0(\gamma_f / \sqrt{M}) = 0$ соответственно.

Для уравнения (47) при $1 - 4Ve^2 \mathcal{G}_{g,f}^2 > 0$ получаем

$$T_{1g,f}(Fo) = e^{-Fo/(2Ve^2)} \left(c_1 \sinh\left(\frac{k_{g,f} Fo}{2Ve^2}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{k_{g,f} Fo}{2Ve^2}\right) \right), \quad (51)$$

где $\mathcal{G}_{g,f}^2 = \eta_g^2 + \gamma_f^2;$ (52)

при $1 - 4Ve^2 \mathcal{G}_{g,f}^2 < 0$ получаем

$$T_{1g,f}(Fo) = e^{-Fo/(2Ve^2)} \left(c_1 \sin\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) \right), \quad (53)$$

где $k_{g,f} = \sqrt{1 - 4Ve^2 \mathcal{G}_{g,f}^2},$ (54)

$$k_{g,f} = i(k_{g,f})_i. \quad (55)$$

Подставив уравнения (51) и (53) в уравнение (48) для исключения c_1 или c_2 , получим

$$T_{1g,f}(Fo) = C_{12} \begin{cases} e^{-Fo/(2Ve^2)} \left\{ \frac{1}{k_{g,f}} \sinh\left(\frac{k_{g,f} Fo}{2Ve^2}\right) + \cosh\left(\frac{k_{g,f} Fo}{2Ve^2}\right) \right\}, & k_{g,f} = \text{real} \\ e^{-Fo/(2Ve^2)} \left\{ \frac{1}{(k_{g,f})_i} \sin\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) + \cos\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) \right\}, & k_{g,f} = i(k_{g,f})_i. \end{cases} \quad (56)$$

Подставив уравнения (49), (50) и (56) в уравнение (39), получим следующее уравнение для $\psi(\xi, \omega, Fo)$:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \omega, Fo) = & \sum_{f=1}^F \sum_{g=0}^G C_{fg} \exp\left(-\frac{Fo}{2Ve^2}\right) \left[\frac{1}{k_{g,f}} \sinh\left(\frac{k_{g,f}Fo}{2Ve^2}\right) + \right. \\ & \left. + \cosh\left(\frac{k_{g,f}Fo}{2Ve^2}\right) \right] \sin(\eta_g \omega) J_0\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}} \xi\right) + \sum_{f=F+1}^{\infty} \sum_{g=G+1}^{\infty} C_{fg} \exp\left(-\frac{Fo}{2Ve^2}\right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{(k_{g,f})_i} \sin\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) + \cosh\left(\frac{(k_{g,f})_i Fo}{2Ve^2}\right) \right] \sin(\eta_g \omega) J_0\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}} \xi\right). \end{aligned} \quad (57)$$

Используя уравнение (24) и условие ортогональности, находим

$$C_{fg} = -a_f \int_0^1 \sinh(\gamma_f \omega) \sin(\eta_g \omega) d\omega \Big/ \int_0^1 \sin^2(\eta_g \omega) d\omega. \quad (58)$$

Наконец,

$$C_{fg} = -4 \left(\left(-\xi_1 J_1\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}} \xi_1\right) + J_1\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}}\right) \right) \Big/ \frac{\lambda_f}{\sqrt{M}} \left[J_1\left(\frac{\gamma_f}{\sqrt{M}}\right) \right]^2 \right) \frac{(-1)^g}{(\eta_g^2 + \gamma_f^2)}. \quad (59)$$

3. Результаты и обсуждение

Используя разработанный алгоритм решения и основываясь на уравнениях (13), (36) и (57), авторы выполнили предварительные численные расчеты температурных контуров и профилей для цилиндра, изображенного на рис. 1. Результаты расчетов показаны на рис. 2–6.

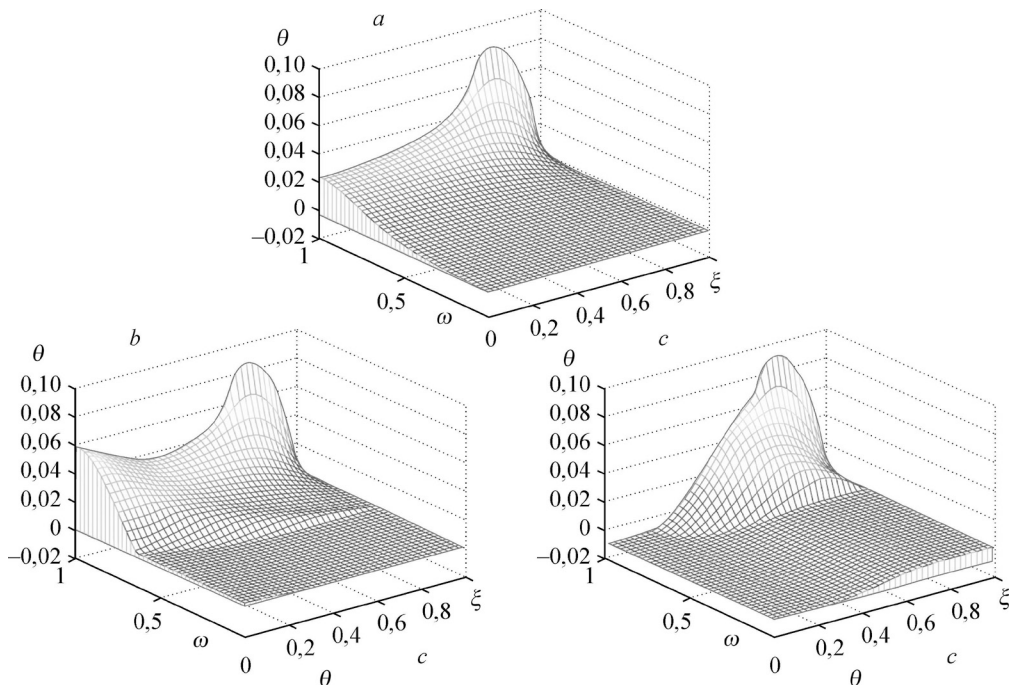


Рис. 2. Распределение температуры с $\xi_1 = 0,8$, $Fo = 0,1$ и $M = 4$ при разных числах Вернотта. $Ve = 0,1$ (a), $0,3$ (b), $0,6$ (c).

На рис. 2 показаны распределения температурного поля для трех чисел Вернотта. Безразмерное время моделирования составило 0,1, а величины ξ_1 и M равнялись соответственно 0,7 и 4. Видно, что по мере увеличения числа Вернотта цилиндр может иметь более высокую температуру. Кроме того, хорошо видны тепловые волны. Из рисунка следует, что с ростом числа Вернотта, отражающим уменьшение скорости тепловой волны в конкретное безразмерное время, тепловая волна скорее всего не достигнет осевой линии цилиндра, как это показано на рис. 2с.

На рис. 3 изображено распределение температурного поля для случая теплового потока меньшей толщины с $\xi_1 = 0,9$ при тех же значениях остальных параметров, что и на рис. 2. Из сравнения фрагментов рис. 2 и 3 видно, что при равных числах Вернотта тепловая волна проходит одинаковое расстояние в объекте. Например, тепловая волна на рис. 2b и 3b достигает $\omega = 0,5$. Как и ожидалось, увеличение величины ξ_1 приводит к снижению температуры в цилиндре, что видно при сравнении рис. 2a и 3a. Кроме того, можно заметить, что чем меньше число Вернотта, тем быстрее достигается равновесное распределение температуры в цилиндре.

На рис. 4 показано распределение температурного поля при тех же значениях параметров, что и на рис. 2, но для более длительного времени, характерного для $Fo = 0,5$. При $Ve = 0,6$ на рис. 4с явно видна тепловая волна, которая практически затухает при $Ve = 0,3$ (рис. 4b) и объект достигает равновесной температуры. При $Ve = 0,6$ цилиндру требуется больше времени для достижения равновесной температуры. Интересно отметить, что даже при $Fo = 0,5$ у дна цилиндра наблюдается взаимодействие тепловых волн, следовательно, эта часть объекта достигает равновесной температуры позже, чем любая другая часть цилиндра.

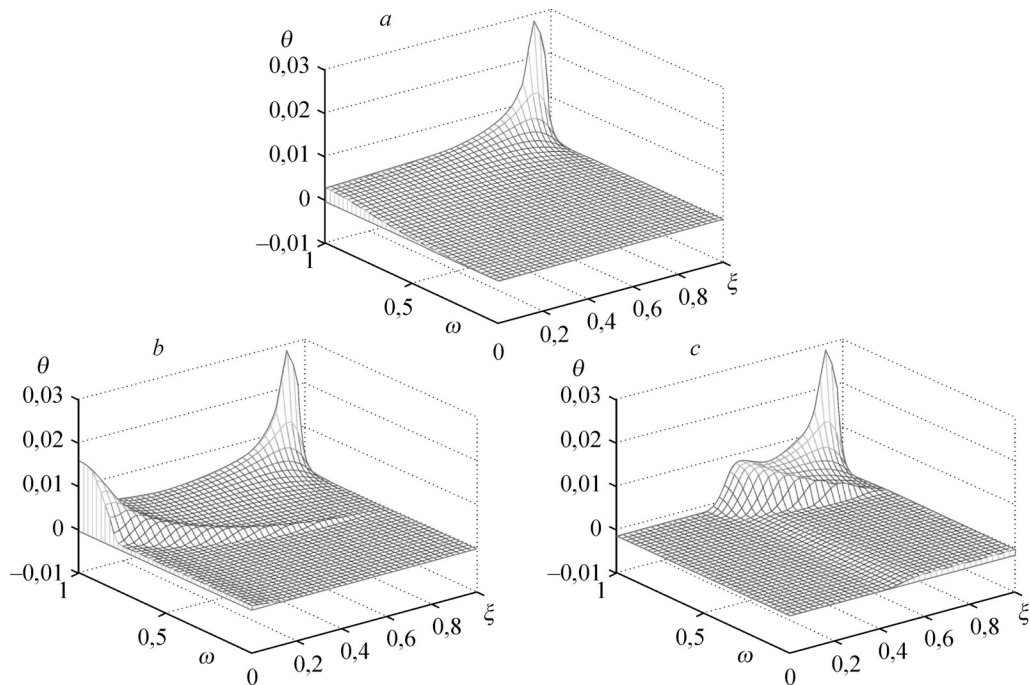


Рис. 3. Эволюция температуры поверхности при $\xi_1 = 0,9$, $Fo = 0,1$ и $M = 4$ при разных числах Вернотта. $Ve = 0,1$ (a), $0,3$ (b), $0,6$ (c).

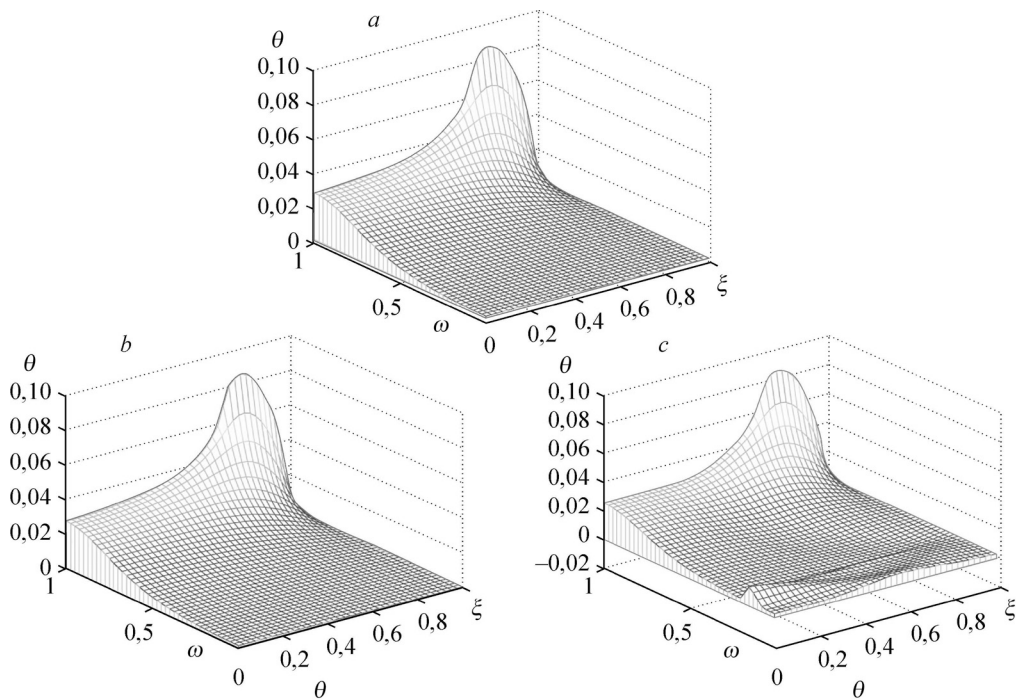


Рис. 4. Эволюция температуры поверхности при $\xi_1 = 0,7$, $Fo = 0,5$ и $M = 4$ при разных числах Вернотта. $Ve = 0,1$ (a), $0,3$ (b), $0,6$ (c).

На рис. 5 представлено распределение температурного поля при тех же значениях параметров, что и на рис. 2. Число Фурье, которое использовалось при моделировании, также равнялось $0,1$, но ξ_1 и M равнялись $0,7$ и 16 соответственно. Как упоминалось

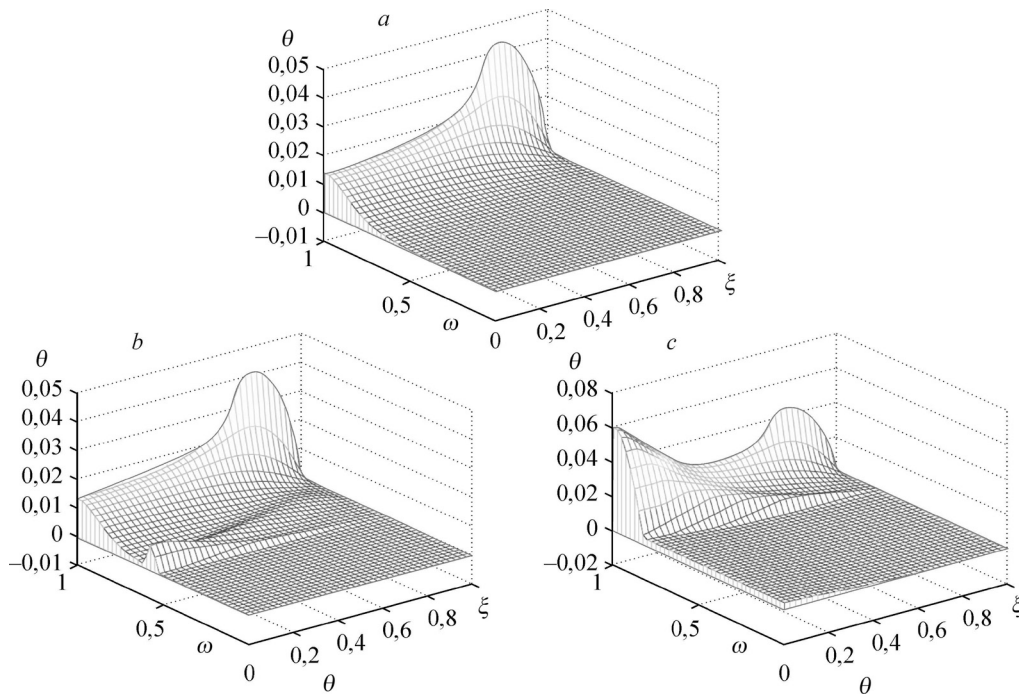


Рис. 5. Эволюция температуры поверхности при $\xi_1 = 0,7$, $Fo = 0,1$ и $M = 16$ при разных числах Вернотта. $Ve = 0,1$ (a), $0,3$ (b), $0,6$ (c).

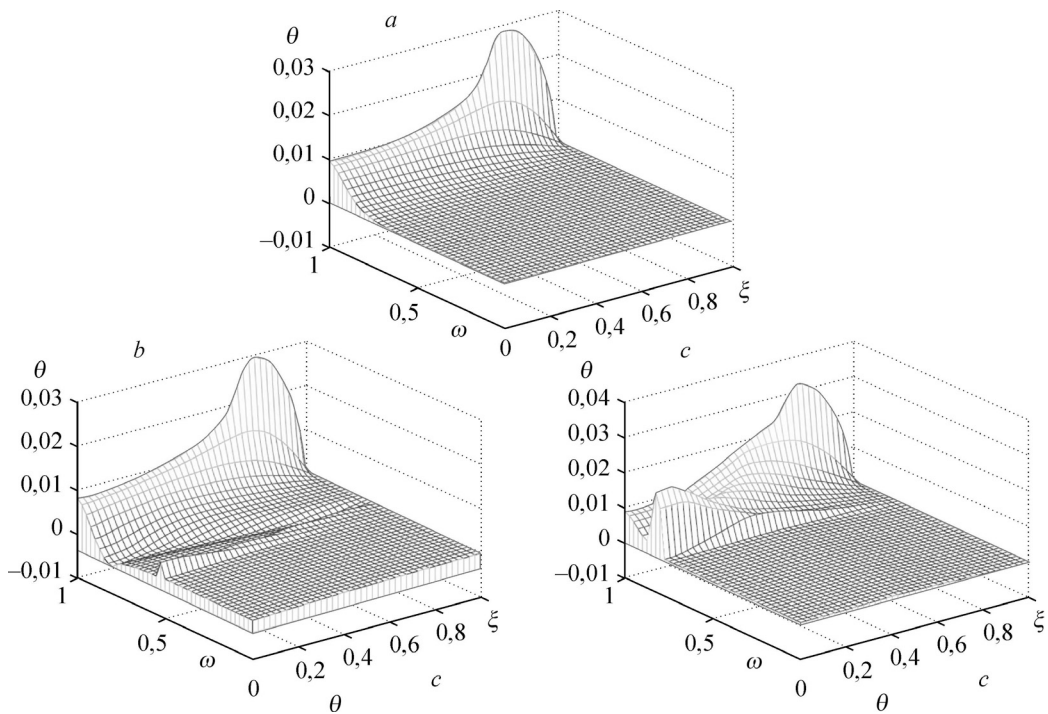


Рис. 6. Эволюция температуры поверхности при $\xi_1 = 0,7$, $Fo = 0,1$ и $M = 36$ при разных числах Вернотта. $Ve = 0,1$ (a), $0,3$ (b), $0,6$ (c).

ранее, большая величина M указывает на большое значение L или малое значение R . При сравнении рис. 2а и 5а видно, что увеличение M приводит к снижению значения максимальной температуры. Более того, можно сделать вывод, что по мере увеличения M , увеличивается время, необходимое для достижения равновесной температуры. Это происходит из-за того, что по мере увеличения M время, необходимое для достижения тепловой волной другой стороны цилиндра, возрастает.

На рис. 6 показано распределение температурного поля при тех же значениях параметров, что и на рис. 5, но для $M = 36$. Полученные данные еще раз подтверждают результаты, представленные на рис. 5. Видно, что при значении M , соответствующем рис. 6, пиковой температуре, а также тепловой волне требуется больше времени, чтобы достичь той же точки на оси ω , чем для значений M , указанных на рис. 4 и 5. Температура в некоторых точках цилиндра может быть даже ниже первоначальной температуры (см. рис. 6).

Заключение

В настоящей работе двумерные гиперболические уравнения теплопроводности решались аналитически для случая цилиндра с заданным тепловым потоком в качестве граничного условия. Установлено, что, чем больше число Вернотта, тем больше времени требуется для достижения точки тепловой волной. Также видно, что чем больше число Вернотта, тем больше времени требуется для достижения равновесного распределения температуры в цилиндре. Другими словами, большее время тепловой релаксации приводит к меньшей скорости тепловой волны и более высокой энергии, поэтому волне требуется больше времени для достижения конкретной точки объекта. Из-за того, что большее время тепловой релаксации приводит к большей энергии и большему времени существования тепловой волны, объекту требуется большее время для исчезновения тепловых волн и достижения равновесного распределения температуры.

Список обозначений

$A, B, C, D, a_n, c_1, c_2, C_{fg}$ — постоянные коэффициенты,	Ve — число Вернотта,
c — удельная теплоемкость,	r, z — пространственные координаты,
Fo — число Фурье,	S — объемное тепловыделение,
\vec{q} — вектор теплового потока,	t — время,
k — теплопроводность,	T — температура,
L — высота цилиндра,	T_∞ — температура окружающей среды,
R — радиус цилиндра,	T_i — начальная температура,
r_1 — радиус приложения теплового потока,	M — квадрат отношения высоты к радиусу цилиндра.

Греческие символы

α — температуропроводность,	τ — время тепловой релаксации,
ρ — массовая плотность,	θ — безразмерная температура,
Δ — дифференциальный оператор Лапласа,	ξ, ω — безразмерные пространственные координаты,
$\bar{\Delta}$ — оператор градиента,	$\beta_n, \gamma_f, \eta_g$ — собственные значения.

Список литературы

1. **Maurer M.J., Thompson H.A.** Non-fourier effects at high heat flux // *J. of Heat Transfer*. 1973. Vol. 95. P. 284–286.
2. **Özisik M.N.** Finite Difference Methods in Heat Transfer. Boca Raton: CRC Press, 1994. 432 p.
3. **Maxwell J.C.** On the dynamic theory of gases // *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*. 1867. Vol. 157. P. 49–88.
4. **Morse P.M., Feshbach H.** Methods of theoretical physics, Vol. 1. N. Y.: McGraw-Hill, 1953.
5. **Cattaneo C.** Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanée (in French) // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
6. **Vernotte P.** Les paradoxes de la théorie continue de l'equation de la chaleur (in french) // *Comptes Rendus de l'Académie des Sci.* 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.
7. **Shen W., Han S.** A numerical solution of two-dimensional hyperbolic heat conduction with non-linear boundary conditions // *Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 39, No. 5, 6. P. 499–507.
8. **Jackson H.E., Walker C.T.** Thermal conductivity, second sound, and phonon-phonon interactions in NaF // *Physical Review B*. 1971. Vol. 3, No. 4. P. 1428–1439.
9. **Narayanamurti V., Dynes R.C.** Observation of second sound in bismuth // *Physical Review Letters*. 1972. Vol. 28, No. 22. P. 1461–1465.
10. **Zhou J., Zhang Y., Chen J.K.** An axisymmetric dual-phase-lag bioheat model for laser heating of living tissues // *Intern. J. of Thermal Sci.* 2009. Vol. 48, No. 8. P. 1477–1485.
11. **Zhou J., Chen J.K., Zhang Y.** Dual-phase-lag effects on thermal damage to biological tissues caused by laser irradiations // *Computers in Biology and Medicine*. 2009. Vol. 39, No. 3. P. 286–293.
12. **Xu F., Seffen K.A., Liu T.J.** Non-fourier analysis of skin biothermomechanics // *Intern. J. of Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 51, No. 9, 10. P. 2237–2259.
13. **Korner C., Bergmann H.W.** The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation // *Applied Physics A*. 1998. Vol. 67, No. 4. P. 397–401.
14. **Al-Nimr M., Naji M.** On the phase-lag effect on the nonequilibrium entropy production // *Microscale Thermophysical Engineering*. 2000. Vol. 4, No. 4. P. 231–243.
15. **Galovic S., Kostoski D., Stamboliev G., Suljovrujic E.** Thermal wave propagation in media with thermal memory induced by pulsed laser irradiation // *Radiation Physics and Chemistry*. 2003. Vol. 67, No. 3, 4. P. 459–461.
16. **Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G.** Extended irreversible thermodynamics // *Reports on Progress in Physics*. 1988. Vol. 51, No. 8. P. 1105–1179.
17. **López Molina J.A., Rivera M.J., Trujillo M., Berjano E.J.** Thermal modeling for pulsed radiofrequency ablation: analytical study based on hyperbolic heat conduction // *Medical Physics*. 2009. Vol. 36, No. 4. P. 1112–1119.
18. **Lewandowska M., Malinowski L.** An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides // *Intern. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2006. Vol. 33, No. 1. P. 61–69.
19. **Moosaie A.** Non-fourier heat conduction in a finite medium with arbitrary source term and initial conditions // *Forschung im Ingenieurwesen*. 2007. Vol. 71, No. 3, 4. P. 163–169.
20. **Moosaie A.** Non-fourier heat conduction in a finite medium with insulated boundaries and arbitrary initial conditions // *Intern. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 35, No. 1. P. 103–111.
21. **Tang D.W., Araki N.** Non-fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance // *Intern. J. of Heat and Mass Transfer*. 1996. Vol. 39, No. 8. P. 1585–1590.
22. **Zhang D., Li L., Li Z., Guan L., Tan X.** Non-fourier conduction model with thermal source term of ultra short high power pulsed laser ablation and temperature evolvment before melting // *Physica B*. 2005. Vol. 364, No. 1–4. P. 285–293.

23. **Saleh A., Al-Nimr M.** Variational formulation of hyperbolic heat conduction problems applying laplace transform technique // Intern. Communications in Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 35, No. 2. P. 204–214.
24. **Jiang F.M., Sousa A.C.M.** Analytical solution for hyperbolic heat conduction in a hollow sphere // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2005. Vol. 19, No. 4. P. 595–598.
25. **Atefi G., Talaei M.R.** Non-fourier temperature field in a solid homogeneous finite hollow cylinder // Archive of Applied Mechanics. 2011. Vol. 81. P. 569–583.
26. **Chen H.T., Lin J.Y.** Numerical analysis for hyperbolic heat conduction // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 1992. Vol. 36, No. 11. P. 2891–2898.
27. **Yang C.Y.** Direct and inverse solutions of hyperbolic heat conduction problems // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2005. Vol. 19, No. 2. P. 217–225.
28. **Zhou J., Zhang Y., Chen J.K.** Non-fourier heat conduction effect on laser-induced thermal damage in biological tissues // Numerical Heat Transfer Part A. 2008. Vol. 54, No. 1. P. 1–19.
29. **Huang C.H., Lin C.Y.** Inverse hyperbolic conduction problem in estimating two unknown surface heat fluxes simultaneously // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2008. Vol. 22, No. 4. P. 766–774.
30. **Yang C.Y.** Direct and inverse solutions of the two-dimensional hyperbolic heat conduction problems // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33, No. 6. P. 2907–2918.
31. **Babaei M.H., Chen Z.** Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2010. Vol. 24, No. 2. P. 325–330.
32. **Torabi M., Saedodin S.** Analytical and numerical solutions of hyperbolic heat conduction in cylindrical coordinates // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2011. Vol. 25, No. 2. P. 239–253.
33. **Torabi M., Yaghoobi H., Saedodin S.** Assessment of homotopy perturbation method in nonlinear convective-radiative non-fourier conduction heat transfer equation with variable coefficient // Thermal Sci. 2011. Vol. 15, suppl. 2. P. S263–S274.
34. **Saedodin S., Yaghoobi H., Torabi M.** Application of the variational iteration method to nonlinear non-fourier conduction heat transfer equation with variable coefficient // Heat Transfer — Asian Research. 2011. Vol. 40, No. 6. P. 513–523.

*Статья поступила в редакцию 25 июня 2015 г.,
после доработки — 22 сентября 2017 г.*