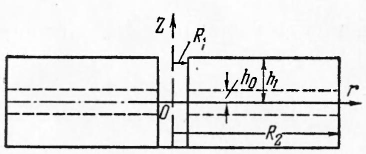
ПМТФ, № 5, 1961

СДАВЛИВАНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ КРУГЛЫМИ ПЛАСТИНКАМИ

Г. Т. Гасанов, Н. А. Гасанзаде, А. Х. Мирзаджанзаде

(Баку)

В связи с осложнениями, имеющими место в процессе бурения, в частности вытекание глин из пласта в скважину (см., например, [1, 2]), представляет интерес решение задачи о сдавливании вязко-пластичного слоя круглыми пластинками, одна из которых имеет круглое отверстие (фиг. 1) и движется под действием некоторого равномерно распределенного по площади пластинки давления p_3 со скоростью V, подлежащей определению. Положим, что на боковую цилиндрическую поверхность $r = R_2$ действует давление p_2, а на поверхность $r = R_1$ действует давление p_1. Предполагается, что движение стационарное и в основном радиальное, т. е.



Фиг. 1

$$v_r \gg v_z, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial z} \gg \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{1}$$

При принятых предположениях приближенные уравнения движения вязко-пластичного слоя и уравнение неразрывности запишутся в виде

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{2}$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} + \tau_0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{gathered} v_r(r, \pm h) = 0, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial z}(r, \pm h_0) = 0 \\ v_z(r, +h) = -V, \qquad v_z(r, -h) = 0 \\ P(R_1) = P_1, \qquad P(R_2) = P_2 \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь h_0 — размер ядра, так что $\tau_{rz}(r, \pm h_0) = \tau_0$. Из условия равновесия сил давления и предельного напряжения сдвига имеем

$$h_0 = \tau_0 \left(\frac{dp}{dr}\right)^{-1} \tag{4}$$

Используя принцип Даламбера, составим дифференциальное уравнение движения верхней пластинки

$$-\frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{g} P_3 \frac{d^2 h}{dt^2} = \pi(R_2^2 - R_1^2) P_3 - F \tag{5}$$

Здесь F — сила сопротивления сжатию круговой пластинки вязко-пластичного слоя. Для дифференциального уравнения (5) задаются следующие начальные условия:

$$h(0) = h_1, \qquad \frac{dh}{dt}(0) = 0 \tag{6}$$

В аналогичной постановке задача для случая вязкого слоя была решена Рейнольдсом (см., например, [3, 4, 5]). Некоторые задачи для случая вязко-пластичного слоя в аналогичной постановке были решены А. М. Гуткиным [6].

Решая (2) при первых условиях (3), получим

$$v_r = \frac{\tau_0}{\mu}(h - z) - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dr}(h^2 - z^2) \qquad \begin{pmatrix} R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ h_0 \leqslant z \leqslant h \end{pmatrix}$$
$$v_0 = \frac{\tau_0}{\mu}(h - h_0) - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dr}(h^2 - h_0^2) \qquad \begin{pmatrix} R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ 0 \leqslant z \leqslant h_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Интегрируя последнее уравнение (2) и используя вторые условия (3), а также выражения (7) для v_r, v_0 и формулу (4) для h_0, получим нелинейное, дифференциальное уравнение первого порядка для определения давления p. Вводя безразмерные переменные

$$p^\circ = \frac{P}{P_2}, \qquad r^\circ = \frac{r}{R_1}, \qquad V^\circ = \frac{V\mu}{h_1 \Delta p}, \qquad h^\circ = \frac{h}{h_1}$$

получим это уравнение в следующем виде:

$$\left(\frac{dp^\circ}{dr^\circ}\right)^3 + b\left(\frac{dp^\circ}{dr^\circ}\right)^2 + d = 0 \tag{8}$$

где

$$b = \frac{3\Pi_1^2(1 - \Pi_4)V^\circ r^\circ}{4h^{\circ 3}} + \frac{3A\mu}{2P_2 r^\circ h^{\circ 3} h_1^3} - \frac{3\Pi_1\Pi_5}{2h^\circ}, \qquad d = \frac{\Pi_1^3\Pi_5^3}{2h^{\circ 3}}$$

$$\Pi_1 = \frac{R_1}{h_1}, \qquad \Pi_4 = \frac{P_1}{P_2}, \qquad \Pi_5 = \frac{\tau_0}{P_2}$$

(A — постоянная интегрирования).

Для решения уравнения (8) приведем его к следующему виду:

$$y^3 + 3\alpha y + 2\beta = 0$$
$$y = \frac{dp^\circ}{dr^\circ} + \frac{b}{3}, \qquad 2\beta = \frac{2}{27}b^3 + d, \qquad 3\alpha = -\frac{1}{3}b^2 \tag{9}$$

Для упрощения дальнейших выкладок сделаем предположение

$$\alpha < 0, \qquad \beta < 0, \qquad \beta^2 + \alpha^3 < 0 \tag{10}$$

которое оправдывается в ряде практических случаев; при этом имеем

$$\frac{dP^\circ}{dr^\circ} = -(1 + 2B)\left[\frac{\Pi_1^2(1 - \Pi_4)V^\circ r^\circ}{4h^{\circ 3}} + \frac{A\mu}{2P_2 r^\circ h^{\circ 3} h_1^3} - \frac{\Pi_1\Pi_5}{2h^\circ}\right]$$
$$B = \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right), \qquad \cos\varphi = \frac{\beta}{-\alpha\sqrt{|\alpha|}} \tag{11}$$

Коэффициент B изменяется в пределах $-1/2 < B \leqslant 1$ и в первом приближении в расчетах принимается равным нулю. Интегрируя (11) при третьих из условий (3) и $B = \text{const}$, получим

$$p^\circ = 1 + (1 + 2B)\left[\frac{\Pi_1^2(1 - \Pi_4)V^\circ}{8h^{\circ 3}}(\Pi_2^2 - r^{\circ 2}) + \right.$$
$$\left. + \frac{A\mu \ln(\Pi_2/r^\circ)}{2p_2 h^{\circ 3} h_1^3} - \frac{\Pi_1\Pi_5}{2h^\circ}(\Pi_2 - r^\circ)\right] \tag{12}$$

$$A = -\frac{2h_1^3 h^{\circ 3}\Delta p}{(1 + 2B)\mu \ln \Pi_2} - \frac{h_1 \Delta p R_1^2 V^\circ(\Pi_2^2 - 1)}{4\mu \ln \Pi_2} + \frac{R_1\tau_0 h_1^2 h^{\circ 2}(\Pi_2 - 1)}{\mu \ln \Pi_2}$$
$$\Pi_2 = R_2/R_1, \qquad \Delta p = p_2 - p_1$$

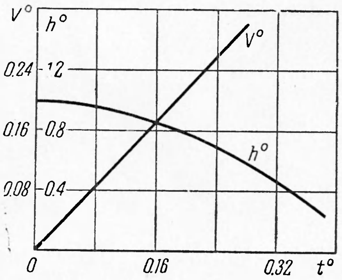
Для силы сопротивления сжатию круговой пластинки вязко-пластичного слоя получим

$$
\begin{aligned}
F^\circ = {} & \pi(\Pi_2^2 - 1) + 2\pi(1+2B)(\Pi_2^2-1)\Bigg[\frac{\Pi_1^2\Pi_2^2(1-\Pi_4)V^\circ}{16h^{\circ 3}} + \\
& + \frac{1-\Pi_4}{2(1+2B)(\Pi_2^2-1)} + \frac{\Pi_1^2(1-\Pi_4)V^\circ}{16h^{\circ 3}} - \frac{\Pi_1\Pi_5}{4h^\circ(\Pi_2+1)} - \frac{\Pi_1\Pi_2\Pi_5}{4h^\circ} - \\
& - \frac{\Pi_1^2(1-\Pi_4)(1+\Pi_2^2)}{32h^{\circ 3}}V^\circ + \frac{\Pi_1\Pi_5(\Pi_2^2+\Pi_2+1)}{6h^\circ(\Pi_2+1)} - \frac{(1-\Pi_4)}{4(1+2B)\ln\Pi_2} - \\
& - \frac{\Pi_1^2(1-\Pi_4)(\Pi_2^2-1)}{32h^{\circ 3}\ln\Pi_2}V^\circ + \frac{\Pi_1\Pi_5(\Pi_2-1)}{8h^\circ\ln\Pi_2}\Bigg] \qquad \left(F^\circ = \frac{F}{R_1^2 p_2}\right) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Для определения скорости погружения верхней пластинки надо решить задачу Коши для уравнения (5), которое в безразмерных переменных V°, $t^\circ = t\Delta p/\mu$ имеет вид

$$
\frac{dV^\circ}{dt^\circ} = \Pi_6 - \frac{\Pi_6 F^\circ}{\pi(\Pi_2^2-1)\Pi_3\Pi_4}
$$

$$
\Pi_3 = \frac{p_3}{p_1}, \quad \Pi_6 = \frac{g\mu^2}{h_1\Delta p^2}, \quad V^\circ = -\frac{dh^\circ}{dt^\circ} \qquad (14)
$$



Фиг. 2

Значения τ_0 и μ для глин, ввиду отсутствия данных, были приняты равными значениям τ_0 и μ для мерзлых грунтов [7].

Для условий бурения p_3 представляет собой полное горное давление, p_2 — боковое горное давление. Для расчетов были приняты значения:

$$
\Pi_1 = 0.01, \quad \Pi_2 = 2000, \quad \Pi_3 = 1.01
$$
$$
\Pi_4 = 0.99, \quad \Pi_5 = 0.005, \quad \Pi_6 = 0.001
$$

Численное решение дифференциального уравнения (14) получено методом Рунге — Кутта. Результаты вычислений представлены на фиг. 2. Следует отметить, что для рассматриваемого примера $v_r \gg v_z$ и выполняются условия (10).

Поступила 20 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Томир Дж. О вытекании глин в процессе бурения. IV международный нефтяной Конгресс ГИТТЛ, 1956, т. III.
2. Песляк Ю. А. О поведении глин в процессе проводки скважин. Гостоптехиздат, 1960, № 11.
3. Современные проблемы гидроаэромеханики. ГИТТЛ, 1952.
4. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТТЛ, 1955.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
6. Гуткин А. М. Течение вязко-пластичной среды между вращающимися дисками. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5.
7. Вялов С. С., Скибицкий А. М. Материалы к IV международному Конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. Изд-во АН СССР, 1957.