

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Ф. С. Латифов, М. З. Юсифов, Н. И. Ализаде

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
E-mails: flatifov@mail.ru, maarif_yusifov@mail.ru, alizade.niyaz@mail.ru

Исследуются собственные колебания подкреплённых поперечными ребрами неоднородных ортотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью. Изучены зависимости частотной характеристики от различных геометрических и физических параметров задачи.

Ключевые слова: свободные колебания, подкреплённая неоднородная ортотропная цилиндрическая оболочка, жидкость, заполняющая оболочку.

DOI: 10.15372/PMTF20200321

Оболочечные конструкции находят широкое применение в строительстве и технике. Основной постоянно действующей на оболочку нагрузкой является ее вес. Для увеличения прочности оболочек применяются легкие пористые материалы с малым объемным весом, однако данные материалы имеют низкие прочностные характеристики. Для компенсации этого недостатка создается технологическая неоднородность. При конструировании оболочек большое значение имеет выбор материала. В последнее время появились различные перспективные материалы, в частности полученные с использованием нанотехнологий. В качестве материала оболочки широко используется пористый алюминий с добавлением полимерных, углеродных или металлических частиц. Для создания неоднородности в несущих конструкциях в поверхностные слои материала методом диффузии или с помощью иных технологий добавляется другой материал с высокими прочностными характеристиками. В результате в конструкции появляется технологическая неоднородность с четко выраженным фронтом, разделяющим упрочненный и неупрочненный материалы.

Возникает необходимость разработки методов расчета напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек и исследования влияния неоднородности на частоты их собственных колебаний. Требуется алгоритмы определения резонансных частот, приводящих к разрушению исходного и упрочненного материалов неоднородных оболочек.

При использовании в инженерной практике полимерных материалов, в частности стеклопластиков, необходимо учитывать анизотропию упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек. Для увеличения жесткости тонкостенной части оболочки она подкрепляется ребрами, что существенно повышает ее прочность при незначительном увеличении массы конструкции.

Следует отметить, что при наличии у оболочки геометрической и физической нелинейности уравнения, описывающие ее напряженно-деформированное состояние, являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Для решения этих уравнений в работе [1] предложен метод последовательных нагружений [2, 3]. Для уменьшения погрешности в результате линеаризации уравнения и сокращения времени расчета используется двухшаговый метод последовательного возмущения параметров [4]. Влияние условий опирания по контуру на устойчивость полимербетонных оболочек исследовано в работе [5]. В [6] с использованием вариационного принципа Гамильтона — Остроградского изучены свободные колебания продольно подкрепленной ортотропной неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Работы [7–9] посвящены исследованию параметрических колебаний в вязкоупругой среде прямолинейного стержня из нелинейного и неоднородного по толщине материала с использованием контактной модели Пастернака. Изучено влияние основных факторов: упругости основания, повреждаемости материалов стержня и оболочки, зависимости коэффициента сдвига от частоты колебаний — на характеристики продольных колебаний точек стержня в вязкоупругой среде. Во всех исследуемых случаях построены зависимости размера и положения зоны динамической устойчивости колебаний стержня в вязкоупругой среде от параметров конструкции в плоскости нагрузка — частота. В работе [10] найдены частоты свободных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической анизотропной однородной оболочки из стеклопластика, заполненной жидкостью, при наличии граничных условий Навье. Результаты вычислений собственной частоты колебаний представлены в виде зависимостей этой величины от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика и от скорости движения жидкости при различных значениях параметра волнообразования и различных соотношениях геометрических параметров оболочки.

Настоящая работа посвящена исследованию частоты собственных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами неоднородной ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, заполненной жидкостью, при наличии граничных условий Навье. Результаты вычислений собственной частоты колебаний представлены в виде зависимостей этой величины от скорости движения жидкости и числа подкрепляющих элементов при различных значениях параметра волнообразования и различных отношениях модулей упругости.

Постановка задачи. При решении задачи будем применять вариационный принцип Гамильтона — Остроградского. Для этого запишем выражение для полной энергии исследуемой конструкции, состоящей из неоднородной оболочки цилиндрической формы и подкрепляющих кольцевых элементов, число которых варьируется. Внутренняя поверхность конструкции контактирует с движущейся жидкостью, причем предполагается, что жидкость полностью заполняет внутреннюю область оболочки (рис. 1).

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем использовать трехмерный функционал. В этом случае выражение для функционала полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \iiint \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \right) dx dy dz, \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты вектора смещения точек срединной поверхности оболочки вдоль образующей, в тангенциальном направлении и по нормали к срединной поверхности соответственно; h — толщина оболочки; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ — деформации срединной поверхности оболочки; ρ — плотность материала оболочки; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ — напряжения в оболочке; t — время.

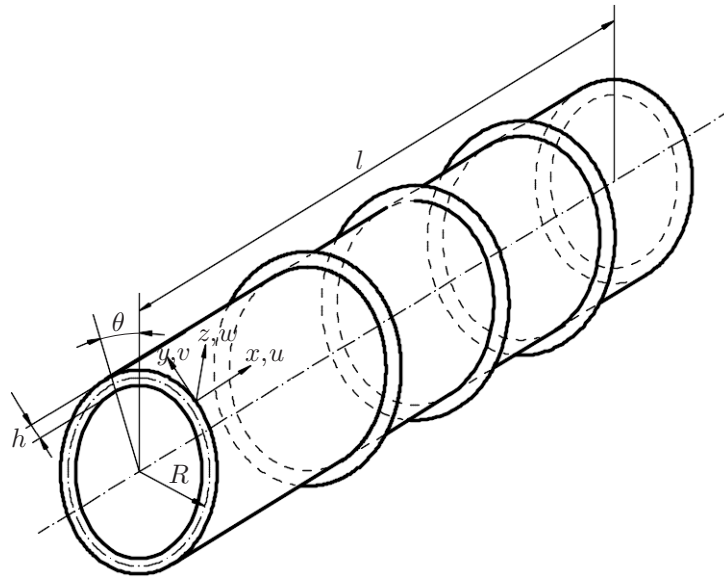


Рис. 1. Подкрепленная неоднородная цилиндрическая оболочка, заполненная жидкостью

Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из этих способов заключается в том, что модуль Юнга и плотность материала оболочки полагаются функциями нормальной и продольной координат [11]. Считается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае соотношение деформация — напряжение имеет вид

$$\sigma_{11} = b_{11}(z, x)\varepsilon_{11} + b_{12}(z, x)\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = b_{12}(z, x)\varepsilon_{11} + b_{22}(z, x)\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} = b_{66}(z, x)\varepsilon_{12}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Предположим, что

$$b_{11}(z, x) = \tilde{b}_{11}f_1(z)f_2(x), \quad b_{22}(z, x) = \tilde{b}_{22}f_1(z)f_2(x), \quad b_{12}(z, x) = \tilde{b}_{12}f_1(z)f_2(x), \quad (4)$$

$$b_{66}(z, x) = \tilde{b}_{66}f_1(z)f_2(x), \quad \rho(z, x) = \tilde{\rho}f_1(z)f_2(x).$$

Здесь $\tilde{b}_{11} = E_1/(1 - \nu_1\nu_2)$, $\tilde{b}_{22} = E_2/(1 - \nu_1\nu_2)$, $\tilde{b}_{12} = \nu_1 E_1/(-\nu_1\nu_2) = \nu_2 E_2/(1 - \nu_1\nu_2)$, $\tilde{b}_{66} = G$ — основные модули упругости однородного ортотропного материала оболочки; $\tilde{\rho}$ — плотность материала однородной оболочки; $f_1(z)$, $f_2(x)$ — функции неоднородности в направлении по нормали и вдоль образующей оболочки соответственно; ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона; E_1 , E_2 — модули Юнга материала оболочки в направлениях осей x , y соответственно.

Учитывая (4), из (2) получаем

$$\sigma_{11} = (\tilde{b}_{11}\varepsilon_{11} + \tilde{b}_{12}\varepsilon_{22})f_1(z)f_2(x), \quad \sigma_{22} = (\tilde{b}_{12}\varepsilon_{11} + \tilde{b}_{22}\varepsilon_{22})f_1(z)f_2(x), \quad (5)$$

$$\sigma_{12} = \tilde{b}_{66}(z, x)\varepsilon_{12}f_1(z)f_2(x).$$

Выражение для функционала полной энергии цилиндрической оболочки с учетом (5) имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z) dz \iint (\tilde{b}_{11}\varepsilon_{11}^2 + 2\tilde{b}_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \tilde{b}_{22}\varepsilon_{22}^2 + \tilde{b}_{66}\varepsilon_{12}^2) f_2(x) dx dy +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z) dz \iint \tilde{\rho} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) f_2(x) dx dy. \quad (6)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации j -го поперечного ребра записываются в виде

$$\begin{aligned} \Pi_j = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{yj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_j}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{крj} \left(\frac{\partial \varphi_{крj}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \right] dy, \quad (7) \end{aligned}$$

для кинетической энергии ребра — в виде

$$K_j = \rho_j F_j \int_0^{2\pi R} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{крj}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{крj}}{\partial t} \right)^2 \right] dy. \quad (8)$$

В (7), (8) $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{крj}$ — площадь и моменты инерции поперечного сечения j -го поперечного стержня соответственно относительно оси z и оси, параллельной оси y и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_j, \tilde{G}_j — модули упругости и сдвига материала j -го поперечного стержня соответственно; ρ_j — плотность материала, из которого изготовлен j -й поперечный стержень; u_j, v_j, w_j — компоненты вектора смещения точек осей j -го поперечного стержня; $\varphi_j, \varphi_{крj}$ — углы поворота и закручивания поперечного сечения j -го стержня, которые выражаются через смещения оболочки следующим образом:

$$\varphi_j(y) = \varphi_2(x_j, y) = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{r} \right) \Big|_{x=x_j}, \quad \varphi_{крj}(y) = \varphi_1(x_j, y) = - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_j}.$$

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости на оболочку, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное:

$$A_0 = - \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_z w dx dy. \quad (9)$$

Полная энергия системы равна сумме энергии упругих деформаций оболочки и всех поперечных ребер, а также потенциальных энергий внешних нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости:

$$J = V + \sum_{j=1}^{k_2} (\Pi_j + K_j) + A_0 \quad (10)$$

(k_2 — количество поперечных ребер).

Радиальное давление, действующее со стороны жидкости на стенку оболочки, определяется из решения волнового уравнения, записанного относительно потенциала возмущенных скоростей φ [12, 13]:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{R \partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Здесь a_0 — скорость распространения звука в жидкости; U — скорость потока жидкости.

Выражение для полной энергии системы (10) и уравнение движения жидкости (11) дополняются контактными условиями.

На контактной поверхности оболочка — жидкость выполняется условие непрерывности радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости стенки оболочки имеет вид [12]

$$v_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=R} = -\left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi}\right), \quad (12)$$

где v_r — радиальная скорость точек жидкости; $\omega_0 = \sqrt{E_1/[(1 - \nu_1^2)R^2\tilde{\rho}]}$; $t_1 = \omega_0 t$.

Условие равенства внешних поверхностных нагрузок и радиального давления, действующего со стороны жидкости на стенку оболочки, записывается в виде

$$q_z = -p|_{r=R}, \quad (13)$$

где давление p определяется через потенциал φ по формуле [12]

$$p = -\rho_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (14)$$

(ρ_m — плотность жидкости). Считается, что условия жесткого контакта между оболочкой и стержнями удовлетворены:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y), & v_j(y) &= v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y), & w_j(y) &= w(x_j, y), \\ \varphi_j(y) &= \varphi_2(x_j, y), & \varphi_{\text{кр}j}(y) &= \varphi_1(x_j, y), & h_j &= 0,5h + H_j^1. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь H_j^1 — расстояние от осей j -го стержня до поверхности цилиндрической оболочки; h_j — толщина j -го поперечного стержня. Полагается, что на линиях $x = 0$ и $x = l$ выполнены граничные условия Навье

$$v = 0, \quad w = 0, \quad T_{11} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad (16)$$

где l — длина оболочки; T_{11} , M_{11} — силы и моменты, действующие в поперечных сечениях цилиндрической оболочки.

Задача о собственных колебаниях подкрепленной кольцевыми ребрами неоднородной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, сводится к совместному интегрированию выражений для полной энергии системы (10), уравнения движения жидкости (11) с условиями (13), (15) на поверхности их контакта и граничными условиями (16).

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Сначала определим радиальное давление p , действующее со стороны жидкости на стенку оболочки.

Потенциал возмущенных скоростей φ будем искать в виде

$$\varphi(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos(n\theta) \sin(\chi\xi) \sin(\omega_1 t_1), \quad (17)$$

где $\omega_1 = \omega/\omega_0$; $\chi = kR = m\pi R/l$ и n — волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно; $\xi = x/R$; ω — искомая частота.

С учетом условия (12), используя (17), получаем

$$\varphi = -\frac{f(r)}{f'(R)} \left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right). \quad (18)$$

Для определения неизвестной функции $f(r)$ решение (17) подставляем в (11). В результате получаем уравнение Бесселя, решениями которого являются функции Бесселя. В зависимости от параметра $M_1 = (U + \omega_0 \omega_1/k)/a_0$ решением уравнения Бесселя при $M_1 < 1$ являются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка n $I_n(\beta_2 r)$

и $-K_n(\beta_2 r)$, при $M_1 > 1$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка n $J_n(\beta_1 r)$ и $Y_n(\beta_1 r)$, где $\beta_1^2 = -\beta_2^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)k^2$, а при $M_1 = 1$ — функции r^n и r^{-n} . Во всех указанных случаях при $r = 0$ модифицированная функция Бесселя $K_n(\beta_2 r)$ и функция Бесселя $Y_n(\beta_1 r)$ имеют особенность. Поэтому в решениях уравнения Бесселя используются модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n $I_n(\beta_2 r)$, функция Бесселя первого рода порядка n $J_n(\beta_1 r)$, а также функция r^n . Введем обозначение

$$\varphi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta_2 r)/I'_n(\beta_2 R), & M_1 < 1, \\ J_n(\beta_1 r)/J'_n(\beta_1 R), & M_1 > 1, \\ r^n/(nR^{n-1}), & M_1 = 1. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда выражения (14), (18) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= -\varphi_{\alpha n} \left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \varphi \xi} \right), \\ p &= \tilde{\varphi}_{\alpha n} \rho_m \left(\omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha n} = \varphi_{\alpha n}|_{r=R}$.

В выражении (10) варьируемыми величинами являются u , v , w . Эти неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos(\chi\xi) \cos(n\theta) \sin(\omega_1 t_1), & v &= v_0 \sin(\chi\xi) \sin(n\theta) \sin(\omega_1 t_1), \\ w &= w_0 \sin(\chi\xi) \cos(n\theta) \sin(\omega_1 t_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь u_0 , v_0 , w_0 — неизвестные постоянные. При вычислении энергии J в (10) приняты зависимости

$$f_1(z) = 1 + \alpha z/l, \quad f_2(x) = 1 + \beta x/l, \quad (22)$$

где α , β — постоянные параметры неоднородности в направлении по нормали и вдоль образующей оболочки соответственно, причем $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$.

Подставляя решение (21) в (10), с учетом выражений (22) и (10) получаем полином второго порядка относительно постоянных u_0 , v_0 , w_0 :

$$J = (\varphi_{11}u_0^2 + \varphi_{22}v_0^2 + \varphi_{33}w_0^2 + \varphi_{44}u_0v_0 + \varphi_{55}u_0w_0 + \varphi_{66}v_0w_0) \sin^2(\omega t).$$

Выражения для коэффициентов φ_{11} , φ_{22} , φ_{33} , φ_{44} , φ_{55} , φ_{66} имеют громоздкий вид, поэтому в данной работе не приводятся.

Частотное уравнение ребристой неоднородной оболочки, заполненной жидкостью, получено на основе принципа стационарности действия Остроградского — Гамильтона

$$\delta W = 0, \quad (23)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ — действие по Гамильтону; t' , t'' — заданные произвольные моменты времени.

Варьируя выражение W по константам u_0 , v_0 , w_0 и приравнявая коэффициенты при независимых вариациях к нулю, получаем

$$\begin{aligned} 2\varphi_{11}u_0 + \varphi_{44}v_0 + \varphi_{55}w_0 &= 0, \\ \varphi_{44}u_0 + 2\varphi_{22}v_0 + \varphi_{66}w_0 &= 0, \\ \varphi_{55}u_0 + \varphi_{66}v_0 + 2\varphi_{33}w_0 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как система (24) является однородной системой линейных алгебраических уравнений, необходимым и достаточным условием существования ее ненулевого решения является равенство ее главного определителя нулю. В результате имеем частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\varphi_{11} & \varphi_{44} & \varphi_{55} \\ \varphi_{44} & 2\varphi_{22} & \varphi_{66} \\ \varphi_{55} & \varphi_{66} & 2\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (25)$$

которое можно записать в виде

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \quad (26)$$

Анализ результатов численных расчетов. Уравнение (26) решалось численным методом при следующих значениях параметров: $\tilde{b}_{11} = 18,3$ ГПа, $\tilde{b}_{12} = 2,77$ ГПа, $\tilde{b}_{22} = 25,2$ ГПа, $b_{66} = 3,5$ ГПа, $\tilde{\rho} = \rho_j = 1850$ кг/м³, $\tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9$ Н/м², $m = 1$, $h_j = 1,39$, $R = 160$ см, $\alpha = 0,4$, $I_{крj} = 0,48$ мм⁴, $I_{xj} = 19,9$ мм⁴, $F_j = 0,45$ мм², $h = 0,45$ мм, $\nu_1 = \nu_2 = 0,35$, $l/R = 3$, $h/R = 1/6$, $a_0 = 1450$ м/с, $\rho_m = 1000$ кг/м³.

На рис. 2–5 приведены зависимости параметра частоты от количества подкрепляющих стержней k_2 на поверхности оболочки, параметра неоднородности в направлении образующей оболочки β , скорости движения жидкости U и волнового числа n в окружном направлении соответственно при различных значениях отношения модулей упругости материала оболочки. На рис. 2 видно, что с увеличением числа поперечных ребер значение параметра частоты увеличивается. Из рис. 3 следует, что по мере увеличения параметра неоднородности в направлении образующей оболочки β значение параметра частоты увеличивается. Кроме того, значение параметра частоты возрастает с увеличением отношения E_1/E_2 и уменьшается с увеличением скорости движения жидкости (см. рис. 4).

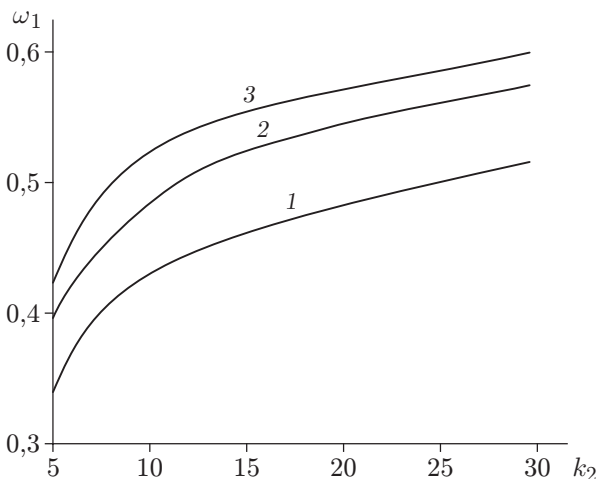


Рис. 2

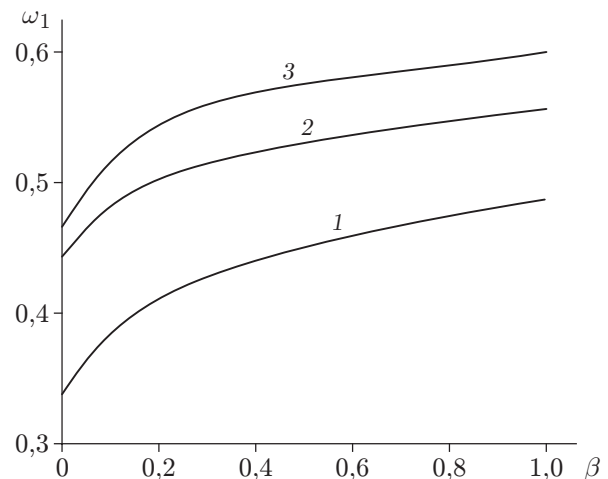


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость параметра частоты от количества подкрепляющих стержней k_2 при $n = 8$, $\beta = 0,6$, $U/a_0 = 0,1$ и различных значениях отношения E_1/E_2 : 1 — $E_1/E_2 = 0,75$, 2 — $E_1/E_2 = 1,0$, 3 — $E_1/E_2 = 1,25$

Рис. 3. Зависимость параметра частоты от параметра неоднородности в направлении образующей оболочки β при $n = 8$, $\alpha = 0,6$, $U/a_0 = 0,1$, $k_2 = 15$ и различных значениях отношения E_1/E_2 :

1 — $E_1/E_2 = 0,75$, 2 — $E_1/E_2 = 1,0$, 3 — $E_1/E_2 = 1,25$

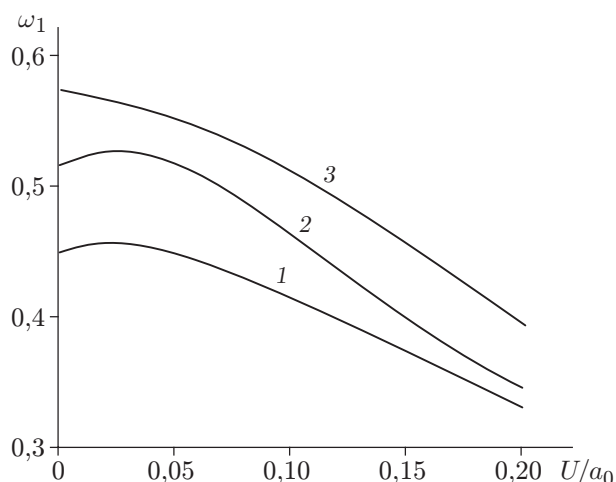


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость параметра частоты от скорости движения жидкости U/a_0 при $n = 8$, $\beta = 0,4$, $k_2 = 15$ и различных значениях отношения E_1/E_2 :

1 — $E_1/E_2 = 0,75$, 2 — $E_1/E_2 = 1,0$, 3 — $E_1/E_2 = 1,25$

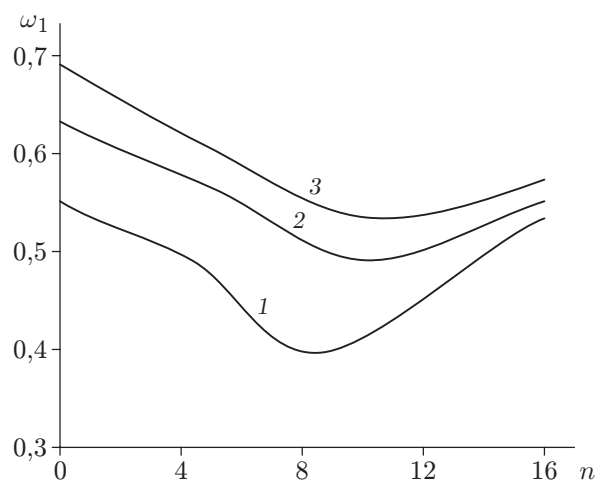


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость параметра частоты от волнового числа n в окружном направлении при $\beta = 0,4$, $k_2 = 15$ и различных значениях отношения E_1/E_2 :

1 — $E_1/E_2 = 0,75$, 2 — $E_1/E_2 = 1,0$, 3 — $E_1/E_2 = 1,25$

На рис. 5 видно, что с увеличением числа волн n в окружном направлении параметр частоты колебаний системы сначала уменьшается, а затем, достигнув минимума, начинает возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров В. В.** Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1975.
2. **Петров В. В.** Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала / В. В. Петров, И. В. Кривошеин. М.: Изд-во АСВ, 2009.
3. **Петров В. В., Кривошеин И. В.** Прочность и устойчивость нелинейно-деформируемых пологих оболочек // Academia. Архитектура и стр-во. 2009. № 3. С. 83–86.
4. **Петров В. В.** Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики твердого деформируемого тела // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Б. и., 2001. С. 6–12.
5. **Петров В. В., Кривошеин И. В.** Влияние условий опирания по контуру на устойчивость полимербетонных оболочек // Вестн. Волж. регион. отд-ния Рос. акад. архитектуры и строит. наук. 2010. Вып. 13. С. 175–182.
6. **Latifov F. S., Aghayev R. N.** Oscillations of longitudinally reinforced heterogeneous orthotropic cylindrical shell with flowing liquid // Intern. J. Tech. Phys. Problems Engng. 2018. V. 10, iss. 34. P. 41–45.
7. **Пирмамедов И. Т.** Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии со средой с учетом трения // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 1. С. 82–89.

8. **Пирмамедов И. Т.** Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с заполнителем с применением модели Пастернака // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 2. С. 93–99.
9. **Пирмамедов И. Т.** Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте // Механика машин, механизмов и материалов. 2009. № 3. С. 52–56.
10. **Латифов Ф. С., Сейфуллаев Ф. А., Алыев Ш. Ш.** Свободные колебания усиленной поперечными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с текущей в ней жидкостью // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 4. С. 158–162.
11. **Ломакин В. А.** Теория неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975.
12. **Вольмир С. А.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
13. **Латифов Ф. С.** Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999.

*Поступила в редакцию 6/II 2019 г.,
после доработки — 5/XI 2019 г.
Принята к публикации 25/XI 2019 г.*
