УДК 539.30

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

В. Е. Агеев, Г. И. Быковцев, В. В. Колокольчиков

(Куйбышев)

Обзор исследований реологических свойств материалов при больших скоростях деформирования содержится в [1—4], поэтому ограничимся рассмотрением основных результатов. В [5] обнаружено различие в пределах текучести при статических и динамических испытаниях, что в дальнейшем привело к представлению о динамической диаграмме растяжение — сжатие образца в пластической области, определенной впервые в [6]. Более точные эксперименты обсуждены в [7], где определялась остаточная деформация при соударении стержней, а динамическая диаграмма определялась по методике [8].

В [9, 10], видимо, впервые обнаружено, что в меди волны распространяются с упругими скоростями не только в упругой области, но и за пределом текучести. В последующем эти результаты подтверждены более тонкими экспериментами [11, 12] и на других материалах, что приводит к выводу о необходимости учета влияния скорости пластического деформирования при исследовании волновых процессов. Из многочисленных работ, посвященных изучению влияния скорости деформации, представляются интересными исследования [13, 14], в которых алюминиевые и стальные образцы изучались при сложном напряженном состоянии. В этих работах показано, что в процессе скоростного нагружения второй инвариант тензора напряжений J_2 зависит не только от второго инварианта тензора деформаций I_2, но и от $\dot{I}_2$.

Общие соотношения для сред, чувствительных к скорости деформации, предложены в [15, 16], где для случая сложного напряженного состояния обобщены соотношения, предложенные в [9]. Другой вариант обобщения соотношений Малверна предложен в [17]. Теории, сформулированные в [15—17], содержат некоторые функции, которые необходимо определять экспериментально. В [15] найдены некоторые аппроксимации для этих функций из экспериментальных данных [18], где определена зависимость предела текучести мягкой стали от скорости деформации в диапазоне $0 \leqslant \dot{\varepsilon} \leqslant 200\ с^{-1}$. В [19] изучены законы распространения волн в средах, чувствительных к скоростям пластических деформаций. Ниже предлагается методика измерения реологических свойств материалов, основанная на решениях, полученных в [19]. Эта методика реализована в лабораториях Куйбышевского госуниверситета.

Полные деформации складываются из упругой и пластической частей

$$e_{ij} = e^{e}_{ij} + e^{p}_{ij}. \tag{1}$$

Упругие составляющие e^{e}_{ij} связаны с напряжениями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e^{e}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^{e}_{ij}, \quad e^{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}s_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \tag{2}$$

где λ, μ — постоянные Ламэ; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ — девиатор напряжений.

Для сред, чувствительных к скоростям пластических деформаций, следует положить [20], что поверхность нагружения зависит от скоростей пластических деформаций

$$f\left(\sigma_{ij}, e^{p}_{ij}, \dot{e}^{p}_{ij}, \chi_i\right) = 0, \tag{3}$$

где χ_i — некоторые параметры истории пластического деформирования.

Скорости пластических деформаций определяются из ассоциированного закона течения

$$\dot{e}^{p}_{ij} = \Psi\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \tag{4}$$

где Ψ — неопределенный положительный множитель, уравнение для которого получаем, подставляя (4) в (3):

$$f\left(\sigma_{ij}, e^{p}_{ij}, \Psi\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \chi_i\right) = 0. \tag{5}$$

Если $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ не зависит от скорости пластических деформаций, то из (5) получим, что $\Psi = \Psi(\sigma_{ij}, e^{p}_{ij}, \chi_i)$, т. е. Ψ не зависит от $\dot{e}^{p}_{ij}$. В этом случае из общих соотношений (1)—(4) следуют результаты [15, 16], если положить

$$(6) \qquad \Psi = \gamma \langle \Phi(F) \rangle, \quad F = \frac{f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p)}{\varkappa} - 1, \quad \varkappa = \varkappa\left(\int_0^t \sigma_{ij} de_{ij}^p\right).$$

Соотношения, предложенные в [17], получаются, если в (1)—(5) положить

$$(7) \qquad \Psi = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{1}{\sigma_i}, \quad F = \frac{\sigma_i}{f(e_i)} - 1, \quad f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p) = \sigma_i - f(e_i) - \Phi^{-1}\left(\frac{\dot{e}_i^p}{\gamma}\right),$$

здесь γ — коэффициент вязкости; σ_i, e_i — интенсивности девиаторов напряжений и деформаций; $\dot{e}_i^p$ — интенсивность скорости пластической деформации; Φ^{-1} — функция, обратная функции Φ, $\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F)$ при $F > 0$, $\langle \Phi(F) \rangle = 0$ при $F \leqslant 0$.

При экспериментальном изучении связи между напряжениями и деформациями следует различать две задачи. Первая задача — изучение поведения материала при сколь угодно медленном деформировании $\dot{e}_{ij} = 0$, т. е. изучение изменения поверхности нагружения. В [15, 16] эта задача сводится к определению $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p)$, в [17] — к определению зависимости $\sigma_i = f(e_i)$. Теория [17] является теорией изотропного упрочнения. Вторая задача — это определение влияния скоростей деформирования, т. е. определение $\Phi(F)$ в рассмотренных выше теориях. Если первая задача хорошо известна и решается в теории пластичности чисто экспериментально, то для решения второй задачи при больших скоростях деформирования возникают дополнительные трудности, связанные прежде всего с разделением влияния сил инерции, которые при этом возникают от влияния скоростей деформирования. Для такого разделения необходимо знать свойства решений уравнений динамики упругопластических сред, чувствительных к скоростям деформирования при достаточно произвольных реологических соотношениях, т. е. при произвольных $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p, \chi_i)$ или произвольных $\Phi(F)$ в [15—17]. Некоторые такие свойства изучены в [19], где функция $f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p, \chi_i)$ принималась в виде

$$(8) \qquad (s_{ij} - ce_{ij}^p - \eta\dot{e}_{ij}^p)(s_{ij} - ce_{ij}^p - \eta\dot{e}_{ij}^p) - \frac{2}{3}k^2 = 0.$$

Здесь удобно полагать величины c и k функциями e_{ij}^p, χ_i, которые определяются из испытаний при медленных нагружениях, η — функцией интенсивности скоростей пластических деформаций $\dot{e}_i^p = \sqrt{\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p}$, k — предел текучести при растяжении. В [19] показано, что в материалах, чувствительных к скоростям деформирования, могут существовать только два типа волн, распространяющихся с упругими скоростями $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$, $\rho c_2^2 = \mu$. Этот факт хорошо согласуется с экспериментальными результатами [9—12]. При этом на волнах, распространяющихся со скоростями c_1, выполняются соотношения

$$(9) \qquad [v_i] = \omega \nu_i, \quad c_1[\sigma_{ij}] = -\omega(\lambda\delta_{ij} + 2\mu\nu_i\nu_j),$$

где ν_i — нормаль к фронту волны; ω — интенсивность волны, изменение которой при движении вдоль нормали описывается дифференциальным уравнением

$$(10) \qquad \frac{\delta\omega}{\delta t} = c_1\Omega\omega + \frac{\mu}{\rho c_1}\left[\dot{e}_{ij}^p\right]\nu_i\nu_j,$$

где $[v_i]$, $[\sigma_{ij}]$, $[\dot{e}^p_{ij}]$ — скачки скоростей перемещений, напряжений и скоростей пластических деформаций за фронтом волны; Ω — средняя кривизна волновой поверхности.

На волнах, распространяющихся со скоростью c_2, выполняются соотношения

$$(11)\qquad [\sigma_{ij}] = -\rho c_2([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_j),\quad [v_k]\nu_k = 0.$$

Величины $[v_i]$ изменяются при движении вдоль нормали к волновой поверхности согласно уравнениям

$$(12)\qquad \frac{\delta [v_i]}{\delta (t)} = c_2\Omega [v_i] + c_2([\dot{e}^p_{ij}]\nu_j - [\dot{e}^p_{kl}]\nu_k\nu_l\nu_i).$$

Наиболее просто экспериментально создать волну (9), поэтому в дальнейшем ограничимся анализом только случая, когда рассматриваемая волна распространяется в покоящуюся среду со скоростью c_1. За фронтом волны при этом пластические деформации равны нулю и для теории Пежины [15, 16] получаем скорости пластических деформаций в виде

$$(13)\qquad \dot{\varepsilon}^p_{ij} = \gamma\Phi_{\rm P}(F)\, s_{ij},$$

где $F = -1 + \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2k^2}$, т. е. в начальном состоянии поверхность текучести является кругом Мизеса. Для теории Калисского получаем

$$(14)\qquad \dot{\varepsilon}^p_{ij} = \gamma\Phi_{\rm K}(F)\, s_{ij}/\sqrt{s_{kl}s_{kl}}.$$

Из (13), (14) очевидно, что функции $\Phi_{\rm P}(F)$ и $\Phi_{\rm K}(F)$, входящие в обе теории, связаны соотношениями

$$(15)\qquad (F+1)\sqrt{\frac{2}{3}}\,k\Phi_{\rm P}(F) = \Phi_{\rm K}(F).$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только соотношений (13).

Если принять, что поверхность нагружения имеет вид (8), то из (3), (4) получаем для скоростей пластических деформаций уравнение

$$(16)\qquad s_{ij} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,k\dot{e}^p_{ij}}{\sqrt{\dot{e}^p_{kl}\dot{e}^p_{kl}}} + \eta\dot{e}^p_{ij}.$$

Соотношения (16) определяют девиатор напряжений через скорости пластических деформаций, а соотношения (13), наоборот, определяют скорости пластических деформаций через напряжения. Так как перед фронтом волны $\sigma_{ij} = 0$, то из соотношений (9) следует, что за фронтом волны будут выполняться соотношения

$$(17)\qquad \sigma_{ij} = \frac{\omega}{c_1}(\lambda\delta_{ij} + 2\mu\nu_i\nu_j),\quad s_{ij} = \frac{2\mu\omega}{c_1}\left(\nu_i\nu_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right),\quad \sigma_i = \frac{2\mu\omega}{c_1}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Скачки скоростей пластических деформаций для модели [15, 16] определяются из соотношений (13), откуда

$$(18)\qquad [\dot{e}^p_{ij}] = -\gamma\Phi_{\rm P}(F)\frac{2\mu\omega}{c_1}\left(\nu_i\nu_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right),\quad F = \frac{2\mu\omega}{kc_1} - 1.$$

Для поверхности нагружения (8) скорости пластических деформаций за фронтом волны определяются из соотношений (16), откуда

$$(19)\qquad \frac{2\mu\omega}{c_1}\left(\nu_k\nu_l - \frac{1}{3}\delta_{kl}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,k\dot{e}^p_{kl}}{\dot{e}^p_i} + \eta(\dot{e}^p_i)\,\dot{e}^p_{kl}.$$

Из (19) для определения $\dot e_i^p$ получаем уравнение

$$\dot e_i^p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{k}{\dot e_i^p}+\eta\left(\dot e_i^p\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{2\mu\omega}{c_1} \tag{20}$$

и для определения пластических деформаций выражение

$$\left[\dot e_{kl}^p\right]=-\sqrt{\frac{3}{2}}\,\dot e_i^p\left(\nu_k\nu_l-\frac{1}{3}\,\delta_{kl}\right), \tag{21}$$

где $\dot e_i^p$ выражается через ω по уравнению (20). Если в материале экспериментально реализовать плоскую волну нагрузки и замерить $\omega(x)$ — интенсивность волны в момент прохождения фронта точки с координатой x — , то, используя соотношения (10), получим

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{\mu}{\rho c_1^2}\left[\dot e_{ij}^p\right]\nu_i\nu_j. \tag{22}$$

При обработке экспериментальных данных по теории [15, 16] удобно построить значения $d\omega/dx$ как функции $F=2\mu\omega/kc_1-1$. Тогда из соотношений (22), (18) получаем

$$\gamma\Phi_P(F)=-\frac{3\rho c_1^2}{2\mu k\,(F+1)}\,\frac{d\omega}{dx}. \tag{23}$$

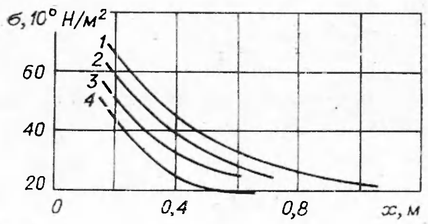
При обработке экспериментальных данных по теории с поверхностью нагружения (8) удобно построить зависимость ω от $-\dfrac{\rho c_1^2}{\mu}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{d\omega}{dx}$, так как из соотношений (22), (21) следует

$$\dot e_i^p=-\frac{\rho c_1^2}{\mu}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{d\omega}{dx}.$$

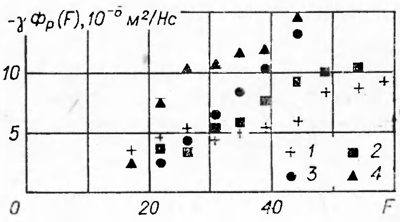
Тогда из эксперимента определяется значение ω как функции $\dot e_i^p$, и из (20) получаем

$$\eta\left(\dot e_i^p\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{2\mu\omega\left(\dot e_i^p\right)-c_1k}{c_1\dot e_i^p}\right). \tag{24}$$

Эксперимент проводился на образцах из эпоксидной смолы ЭД-6, отвержденной малеиновым отвердителем. Образцы изготавливались путем заливки смеси смолы с отвердителем в стеклянную трубку с укрепленными по оси датчиками давления. В качестве датчиков давления использовались таблетки титаната бария диаметром 3 мм и толщиной 0,8 мм, предварительно оттарированные по методике [21]. Размеры образца: диаметр 40 мм, длина 1200 мм. Образец нагружался ударной волной, образованной при электрическом взрыве алюминиевой фольги, наклеенной на торце образца. Подрыв фольги осуществлялся с помощью разряда батареи, состоящей из 6 конденсаторов ИК-100-0,25 через ударный механический разрядник с обострителем. Длительность и начальное давление в импульсе варьировались путем изменения толщины подрываемой

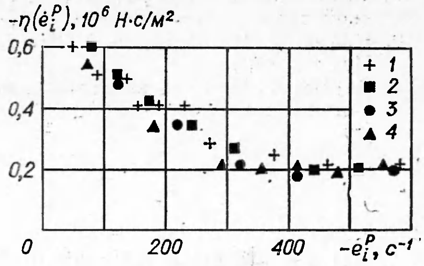


Фиг. 1



Фиг. 2

фольги и коммутации конденсаторов в батарее. Сигналы с датчиков регистрировались на осциллографе С1-33. Точность измерения давления по сквозному каналу не хуже 10%. Положение датчиков по длине образца измерялось с точностью $\pm 0,2$ мм.



Ф и г. 3

На фиг. 1 показано изменение давления в импульсе по длине образца для четырех случаев: *1* — энергия разряда 7,5 кДж, *2* — 6,2 кДж, *3*—5,0 кДж, *4*—3,7 кДж. Длительность импульса одинаковая — $2,5 \cdot 10^{-5}$ с. Исходные данные для построения зависимостей (23), (24) следующие: $c_1 = 2060$ м/с, $\rho = 1220$ кг/м³, $k = 2,7 \cdot 10^6$ Н/м², $c_2 = 1140$ м/с, $\nu = 0,39$. На фиг. 2 показана зависимость (23), на фиг. 3 — зависимость (24). Обозначения расчетных точек соответствуют четырем случаям нагружения: *1—4* соответствуют энергиям разряда 7,5; 6,2; 5; 3,7 кДж. Значительно меньший разброс значений на фиг. 3 означает, что результаты обработки экспериментальных данных по теории с поверхностью нагружения (8) менее чувствительны к ошибкам определения давления в импульсе.

Поступила 6 II 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С.** О распространении плоских упругопластических волн.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
2. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., 1961.
3. **Васин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В.** Динамические зависимости между напряжениями и деформациями.— В сб.: Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке/Под ред. Г. С. Шапиро. М.: Мир, 1975.
4. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1975.
5. **Hopkinson B.** Flow limits at static and dynamic tests.— Proc. Roy. Soc., ser. A. 1905, vol. LXXIV, p. 498.
6. **Рахматулин Х. А.** К проблеме распространения волн в упругопластической среде.— В сб.: Институт механики АН СССР, 1949.
7. **Надеева Р. И.** Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями.— Вестн. МГУ, 1953, № 10.
8. **Ленский В. С.** Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций.— Вестн. МГУ, 1951, № 5.
9. **Malvern L. E.** The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar of material exhibiting a strain rate effect.— J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, N 2.
10. **Sternglas E. S., Stuart O. A.** An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformations in elastoplastic media.— J. Appl. Mech., 1953, vol. 20, N 3.
11. **Малышев Б. М.** Распространение догрузочных импульсов по натянутой проволоке.— Изв. АН СССР. ОТН, мех., машиностр., 1960, № 2.
12. **Малышев Б. М.** Экспериментальное исследование распространения упругопластических волн.— ПМТФ, 1961, № 2.
13. **Lindholm U. S.** Dynamic deformation of metals.— In: Behavior of Materials Under Dynamic Loading. N. Y., 1965.
14. **Lindholm U. S.** Some experiments in dynamic plasticity under combined stress.— In: Sympos. on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads. San Antonio, Texas, 6—8 sept., 1967.
15. **Perzyna P.** The constitutive equations for rate sensitive plastic materials.— Quart. Appl. Math., 1963, vol. 20, N 1.
16. **Perzyna P.** The constitutive eguations for work-hardening and rate sensitive plastic materials.— Proc. Vibr. Probl., 1963, vol. 4, N 4.
17. **Kaliski S.** On certain equations of dynamics of an elastic/viscoplastic body. The strain hardening properties and the influence of strain rate.— Bull. Acad. Sci. Sér. Sci Techn., 1963, vol. 11, N 7.
18. **Clark D. E., Duwes P. E.** The influence of strain rate on some tensile properties of steel.— Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 1950, vol. 50.

19. **Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д.** О распространении волн в упруговязкопластической среде.— Инж. журн., МТТ, 1966, № 4.
20. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
21. **Баулин Н. Н.** Пьезоэлектрический преобразователь для измерения больших переменных давлений.— ПТЭ, 1978, № 5.

УДК 539.376

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

И. Ю. Цвелодуб, А. А. Шваб

(Новосибирск)

В последнее время метод малого параметра нашел широкое применение при решении ряда сложных упругопластических задач. При этом исходят из известного аналитического решения более простых (плоских, осесимметричных, центрально-симметричных) задач и путем выделения некоторых малых величин ищут решения вблизи этих известных состояний. Большое количество таких задач приведено в [1]. Однако в теории ползучести указанный метод не получил большого распространения, что объясняется отсутствием точных аналитических решений даже для простейших задач. Исключение составляет случай установившейся ползучести, когда упругими деформациями пренебрегают, а скорости деформаций ползучести определяются только напряженным состоянием и не зависят от истории нагружения [2]. Решение задач по данной схеме эквивалентно решению с использованием уравнений физически нелинейной упругости. Некоторые из таких задач также рассмотрены в [1]. Учет упругих деформаций и учет истории нагружения приводят к существенным усложнениям, не позволяющим получить аналитические решения. Поэтому для решения таких задач применяются известные численные методы (конечных разностей, конечных элементов). Однако использование последних связано со значительными трудностями при отладке программ и с большим объемом вычислений. С другой стороны, решение указанных задач можно получить, применяя метод малого параметра и простейшие численные процедуры на ЭВМ (например, вычисление определенных интегралов).

В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании цилиндрической трубы с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2, находящейся в начальный момент в естественном состоянии, при плоской деформации и следующих граничных условиях:

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_{r\theta}(R_1) = 0, \quad \sigma_r(R_2) = P(1 - \delta\cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}(R_2) = P\delta\sin 2\theta,$$

где σ_r, $\sigma_{r\theta}$ — радиальное и касательное напряжения; P, δ — константы $(0 < \delta < 1)$; θ — угол полярной системы координат. Заметим, что при $R_2 \to \infty$ указанные условия соответствуют растяжению бесконечной плоскости с круговым отверстием, свободным от нагрузок, двумя взаимно перпендикулярными усилиями, приложенными на бесконечности [1]. Материал трубы будем считать изотропным вязкоупругим и несжимаемым как по упругим, так и по вязким деформациям, для которого тензор деформаций представим в виде суммы тензоров упругих деформаций и деформаций ползучести; вследствие чего получим [1]

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = \frac{3}{4}\frac{u}{\mathrm{E}} + \varepsilon_\theta^c, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{4}\frac{v}{\mathrm{E}} + \varepsilon_{r\theta}^c, \tag{1}$$

где $u = \sigma_\theta - \sigma_r$; $v = 2\sigma_{r\theta}$; σ_θ — окружное напряжение; $\varepsilon_\theta^c, \varepsilon_{r\theta}^c$ — окружная и касательная компоненты деформации ползучести; Е — модуль Юнга. Для простоты будем предполагать, что компоненты скорости деформации определяются только компонентами напряжений и являются степенными функциями последних [1, 2]:

$$\eta_\theta = \dot\varepsilon_\theta^c = \frac{3}{4}B(u^2+v^2)^{\frac{n-1}{2}}u, \quad \eta_{r\theta} = \dot\varepsilon_{r\theta}^c = \frac{3}{4}B(u^2+v^2)^{\frac{n-1}{2}}v, \tag{2}$$

где B, n — константы ползучести.