

УДК: 532.526

## Механизмы распределенного и локализованного порождения нестационарных гёртлеровских мод вихрями набегающего потока\*

А.В. Иванов, Ю.С. Качанов, Д.А. Мищенко

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: D.A.Mischenko@itam.nsc.ru

Настоящая работа посвящена изучению нескольких, предположительно наиболее эффективных, механизмов порождения нестационарных вихрей Гёртлера в ламинарном пограничном слое над вогнутой стенкой (т.е. механизмов вихревой восприимчивости) при рассеянии двух- и трехмерных вихрей свободного течения на трех- и двумерных неоднородностях поверхности (локализованных в продольном направлении) и потока. Эксперименты проведены с использованием метода контролируемых нестационарных возмущений. Обнаружено, что взаимодействие распространяющихся вниз по потоку трехмерных вихрей свободного течения с нарастающим пограничным слоем (естественной двумерной неоднородностью потока) приводит к весьма эффективному порождению нестационарных гёртлеровских мод. Найдено, что в этом случае механизм распределенной восприимчивости способен значительно изменять скорости нарастания порождаемых нестационарных гёртлеровских вихрей по сравнению с законами линейной устойчивости. В работе даны определения и получены оценки величин соответствующих коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости. Несмотря на высокую точность измерений и довольно широкий диапазон исследованных параметров задачи, порождения вихрей Гёртлера другими исследованными механизмами зафиксировано не было.

**Ключевые слова:** ламинарный пограничный слой, вогнутая стенка, неоднородности поверхности, нестационарная неустойчивость Гёртлера, вихревая восприимчивость, коэффициенты распределенной восприимчивости.

### Введение

Неустойчивость Гёртлера может возникать в ламинарном пограничном слое на вогнутой поверхности и существенно влиять на его характеристики: приводить к более ранней турбулизации (по сравнению со случаем пограничного слоя на плоской стенке), усиливать тепло- и массоперенос, изменять сопротивление трения и т.д. Неустойчивость проявляется в усилении параллельных потоку так называемых гёртлеровских вихрей (см., например, обзор [1]). За последние годы в экспериментальных исследованиях гёртлеровской неустойчивости достигнуты значительные успехи. В работе [2] была предложена новая методика экспериментального изучения гёртлеровских вихрей, которая впервые позволила измерить с большой точностью характеристики вихрей Гёртлера очень малых амплитуд (десятые и сотые доли процента от скорости потока), а также дала возможность изучать нестационарную гёртлеровскую неустойчивость. Под нестационарными вихрями Гёртлера здесь и в предшествующих работах понимаются вихри

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00109).

со знакопеременным, осциллирующим во времени направлением их вращения вокруг продольных потоку осей. Суть метода заключается в использовании квазистационарных, а также существенно нестационарных контролируемых возмущений взамен традиционно используемых стационарных, что на практике дает возможность за счет использования техники осреднения по ансамблям повторяющихся реализаций и Фурье-анализа на несколько порядков увеличить точность измерений и одновременно на 2–3 порядка уменьшить характерные амплитуды контролируемых возмущений по сравнению с другими экспериментальными подходами. Благодаря применению указанной экспериментальной методики в работе [2] была впервые надежно исследована линейная стадия развития неустойчивости Гёртлера и проведена верификация нескольких линейных теорий устойчивости. Расчеты [3], проведенные независимо от работы [2], также показали хорошее согласование с полученными экспериментальными данными.

За последнее 20 лет были разработаны новые экспериментальные подходы к исследованию механизмов локализованной и распределённой восприимчивости течений к различным внешним возмущениям потока и стенки, а также их комбинаций (см. работы [4–12] и др.). В частности, в задачах локализованной восприимчивости созданы и успешно применены методики нахождения амплитуд и фаз коэффициентов линейной восприимчивости в частотно-волновом Фурье-пространстве. Эти коэффициенты не зависят от конкретной формы и амплитуд внешних возмущений в физическом пространстве и могут напрямую использоваться для оценок начальных амплитуд возбуждаемых мод неустойчивости (например, волн Толлмина–Шлихтинга, вихрей и волн неустойчивости поперечного течения) и для верификации соответствующих теорий восприимчивости. Были созданы методы количественного исследования задач распределенной (по продольной координате) восприимчивости течений к возмущениям потока и стенки, введены понятия коэффициентов линейной распределённой восприимчивости, разработаны и успешно применены в ряде задач способы нахождения амплитуд и фаз этих коэффициентов в Фурье-пространстве по экспериментальным данным путем аппроксимации полученных экспериментальных распределений аналитическими решениями соответствующих эволюционных уравнений с неизвестными коэффициентами. Полученные в этих работах результаты, а также подходы, предложенные в [2], впервые дали возможность приступить к количественным экспериментальным исследованиям механизмов порождения нестационарных (в общем случае) гёртлеровских вихрей под действием внешних возмущений. Так, эксперименты [13] посвящены изучению восприимчивости пограничного слоя на вогнутой стенке к неоднородностям поверхности. В работе получены соответствующие коэффициенты восприимчивости, которые могут быть использованы для оценок эффективности порождения гёртлеровских мод и верификации теорий восприимчивости.

Известно, что влияние турбулентности набегающего потока (ТНП) также может являться одним из важных факторов, ответственных за порождение вихрей Гёртлера. Эксперименты [14, 15] показали, что ТНП может существенно влиять на характеристики стационарных гёртлеровских мод. Последующие эксперименты [16] были направлены на изучение этого явления. В этих экспериментах использовалась сеточная турбулентность, причем интенсивность и масштаб ТНП варьировались за счет изменения размера ячеек сеток, а также за счет расстояния до передней кромки модели, на котором они были установлены. В случае, когда сетки располагались на слишком большом расстоянии от передней кромки, интенсивность ТНП быстро ослабевала за счет диссипации и порождения гёртлеровских мод в пограничном слое не наблюдалось и, напротив, в случае, когда сетки располагались вблизи передней кромки, регистрировалось достаточно эффективное порождение гёртлеровских мод, причем поперечная длина порождаемых возмущений изменялась с изменением размера ячейки сеток. Эти исследования показывают, что поток с повышенной степенью турбулентности действительно способен приводить к порождению гёртлеровских вихрей.

Вопрос об эффективности преобразования широкого спектра возмущений свободного потока в собственные моды возмущений пограничного слоя (в гёртлеровские моды) является весьма актуальным, так как многие практически важные аэрогазодинамические устройства функционируют в условиях повышенной степени турбулентности свободного потока (типичным примером может служить работа лопаток турбомашин.) Один из возможных механизмов такого преобразования может быть связан со взаимодействием ТНП с локализованными (по продольной координате) неоднородностями поверхности или, другими словами, с рассеянием вихрей свободного потока на неоднородностях поверхности (неровностях или вибрациях). Такие механизмы относятся к задачам локализованной восприимчивости. С другой стороны, продольные вихри свободного потока могут возбуждать моды неустойчивости пограничного слоя за счет взаимодействия таких вихрей с естественной неоднородностью нарастающего пограничного слоя и влиять на развитие порождаемых возмущений вниз по потоку. Задачи такого рода принято относить к механизмам распределенной восприимчивости; они решались ранее экспериментально для механизмов возбуждения волн Толлмина–Шлихтинга [6, 7] и мод неустойчивости поперечного течения [8, 9]. В теоретической работе [3] рассматривался также третий — смешанный вариант порождения гёртлеровских мод. Здесь вихри набегающего потока проникают в пограничный слой, в зоне, непосредственно прилегающей к передней кромке модели (соответствующей малым числам Гёртлера — основного параметра соответствующей задачи устойчивости), приводят к порождению полосчатых структур, которые затем преобразуются в моды гёртлеровской неустойчивости. При этом далее ТНП уже не оказывает на развитие гёртлеровских мод заметного влияния. Исследованию задач восприимчивости первых двух типов из числа вышеотмеченных и посвящены данные эксперименты.

В настоящей работе проведены экспериментальные исследования четырех возможных механизмов возбуждения нестационарных вихрей Гёртлера за счет: (а) — рассеяния двумерных вихрей набегающего потока на локализованных по продольной координате трехмерных неоднородностях поверхности; (б) — рассеяния трехмерных вихрей набегающего потока на локализованных по продольной координате двумерных (т.е. однородных по размаху) неоднородностях поверхности; (с) — рассеяния двумерных вихрей набегающего потока на «естественных», неконтролируемых трехмерных неоднородностях основного течения (например, неконтролируемой модуляции толщины пограничного слоя в направлении размаха, искажениях среднего потока, вызванных усиливаемыми неустойчивостью неконтролируемыми стационарными вихрями Гёртлера и др.); (д) — рассеяния трехмерных вихрей набегающего потока на естественной двумерной неоднородности основного течения, обусловленной присутствием нарастающего пограничного слоя. Случаи (а) и (б) представляют собой локализованные (по продольной координате) механизмы вихревой восприимчивости, в то время как (с) и (д) соответствуют распределенным механизмам вихревой восприимчивости. Измерения проведены в широком диапазоне параметров задачи с использованием метода контролируемых возмущений.

### 1. Условия и методика экспериментов

Эксперименты проводились в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН при скорости среднего течения на границе пограничного слоя  $U_c = 9,18$  м/с и степени турбулентности на входе рабочей части трубы, не превышающей 0,02 % в частотном диапазоне выше 1 Гц. Основные измерения выполнены термоанемометром. Температура потока составляла примерно 21 °С.

Исследуемое течение представляло собой пограничный слой, близкий к течению Блазиуса, развивающийся на вогнутой поверхности (2) высокоточной экспериментальной модели (рис. 1) с радиусом закругления  $R = 8,37$  м, длиной 2,38 м и шириной (по размаху) 0,996 м. Установленная над моделью регулируемая ложная стенка (5) обеспечивала

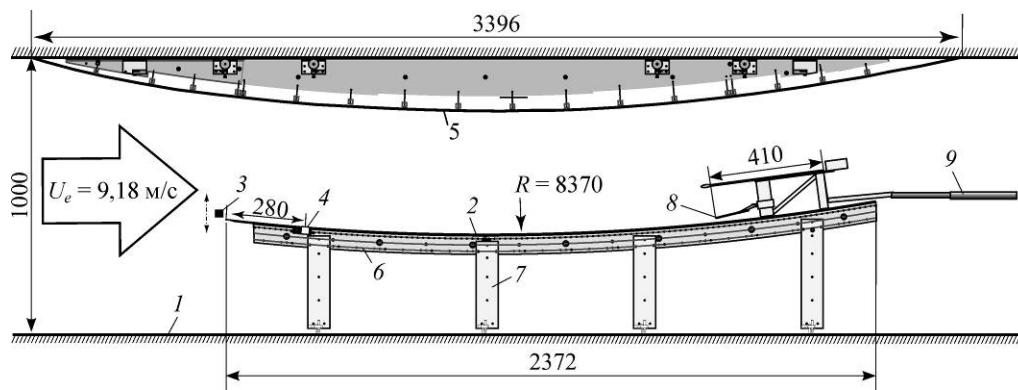


Рис. 1. Схема экспериментальной модели.

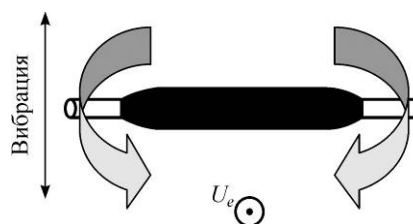
1 — стенка аэродинамической трубы, 2 — вогнутая поверхность экспериментальной модели, 3 — источники вихрей набегающего потока (вибрирующие проволоочки), 4 — источники неоднородностей поверхности (вибраторы), 5 — адаптивная ложная стенка, 6 — жесткий каркас из нервюр заданного радиуса закругления, 7 — несущие опоры (плоские пластины, установленные параллельно потоку), 8 — датчик термоанемометра, 9 — координатное устройство.

практически нулевой продольный градиент статического давления в условиях эксперимента. Строго фиксированную кривизну рабочей поверхности модели задавал жесткий каркас из собранного в блок набора дюралюминиевых дугообразных нервюр (6). К каркасу была притянута пластина из оргстекла толщиной 8 мм. По ее поверхности передвигалось координатное устройство (9), которое позволяло позиционировать датчик термоанемометра (8) в любой точке области измерений. Пластина имела утонченную (до 3-х мм) носовую часть с цилиндрической передней кромкой. Конструкция модели обеспечивала высокую степень постоянства кривизны обтекаемой поверхности на всем её протяжении и в то же время позволяла минимизировать неконтролируемые неоднородности стенки по размаху, которые могли служить затравками для развития естественных, т.е. неконтролируемых, гёртлеровских вихрей. В принятой системе координат ось  $x$  является криволинейной (параллельна вогнутой поверхности) и направлена вниз по потоку, ось  $z$  — направлена по размаху модели, а ось  $y$  — всегда нормальна к поверхности модели. Точка  $(x = 0, z = 0)$  находится на середине передней кромки модели.

В проведенных экспериментах область основных измерений находилась в диапазоне продольных координат  $x = 312 \div 1050$  мм, что соответствует диапазону чисел Гёртлера  $G^* = (U_e \delta^* / \nu) \sqrt{\delta^* / R} = 7,4 \div 21,3$ , где  $\delta^* = 1,08 \div 2,19$  — толщина вытеснения пограничного слоя,  $\nu$  — кинематическая вязкость воздуха. В отличие от многих других проблем гидродинамической устойчивости число Рейнольдса  $Re^* = (U_e \delta^* / \nu) = 649 \div 1318$  не является определяющим параметром исследуемой задачи.

Двумерные (т.е. однородные по размаху) вихревые возмущения свободного течения генерировались вибрирующей проволочкой (3) диаметром либо 50, либо 200 мкм, натянутой параллельно передней кромке модели на расстоянии 27 мм вверх по потоку от ее передней кромки. Проволочка приводилась в движение двумя миниатюрными шаговыми двигателями, смонтированными на боковых стенках аэродинамической трубы (см. [6, 7]). Гармонические колебания проволоочки по нормали к потоку и к передней кромке модели приводили к образованию в потенциальном течении контролируемой антисимметричной вихревой дорожки типа дорожки Кармана, но очень малой амплитуды. Положение вибрирующей проволоочки относительно поверхности модели было настроено так, чтобы генерируемая ею вихревая дорожка распространялась вблизи внешней границы нарастающего пограничного слоя.

Рис. 2. Схема возбуждения трехмерных вихрей в набегающем потоке вибрирующей проволокой с локальной неоднородностью.



Трехмерные (т.е. неоднородные по размаху) вихревые возмущения свободного потока со значительной величиной продольной завихренности создавались при помощи локализованной неоднородности, нанесенной на изначально однородную вибрирующую проволоку диаметром 50 мкм. Диаметр неоднородности составлял 100 мкм, а ее длина — 4,5 мм (рис. 2). Трехкомпонентные термоанемометрические измерения подтвердили, что возмущения потока, образующиеся в следе за такой неоднородностью, имеют значительную продольную компоненту завихренности (сбоку от неоднородности вихревая дорожка оставалась двумерной).

Контролируемые неоднородности поверхности располагались на расстоянии 280 мм от передней кромки модели (см. 4 на рис. 1) и создавались специальными вибраторами двух типов. Вибратор первого типа был аналогичен тем, что использовались в работе [13], и представлял собой набор одинаковых эластичных круглых мембран, расположенных с фиксированным шагом вдоль размаха модели на предельно близком расстоянии друг от друга (рис. 3). Колебания мембран, сделанных из латексной пленки толщиной около 80 мкм, возбуждались с помощью блока из восьми заглушенных динамических громкоговорителей, которые были расположены вне рабочей части аэродинамической трубы и соединялись с полостями под мембранами гибкими пневмотрассами. Передаваемые пневмотрассами пульсации давления приводили мембраны в колебательное движение. Соседние мембраны колебались в противофазе. Создаваемые таким образом неоднородности поверхности были существенно трехмерными и периодическими по размаху модели. В настоящем эксперименте использовался источник, способный моделировать трехмерные неоднородности с поперечной длиной волны  $\lambda_z = 8$  мм (рис. 3). Вибратор второго типа создавал двумерные неоднородности поверхности. Он имел похожее устройство, однако его поверхность представляла собой одну вытянутую по размаху модели мембрану шириной 9 мм и длиной 160 мм.

Во время основных измерений сигнал с выхода термоанемометра (как и сигналы платинового термометра сопротивления и электронного манометра, измерявших температуру и скорость потока) подавался на персональный компьютер синхронно с опорным сигналом источника возмущений через восьмиканальный BNC-2120 коннектор и 16-битный аналого-цифровой преобразователь PCI-6035E National Instruments. Сбор экспериментальных данных и линейризация сигнала термоанемометра осуществлялись с помощью компьютерных программ, реализованных в среде MATLAB с использованием констант закона Кинга. Эти константы получались в процессе тарировки датчика, которая проводилась в аэродинамической трубе периодически, непосредственно перед каждой серией измерений. Линейризованный сигнал подвергался осреднению

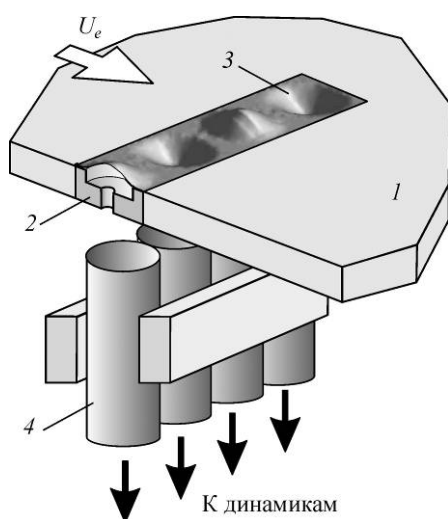


Рис. 3. Схема источника локализованных неоднородностей поверхности.

1 — поверхность модели, 2 — специальная вставка, 3 — мембраны, 4 — пневмотрассы.

по ансамблю реализаций синхронно с опорным сигналом источника возмущений. В результате полученные сигналы были синхронизированы по времени и содержали как амплитудную, так и фазовую информацию. Эти сигналы подвергались фурье-преобразованию по времени с тем, чтобы получить амплитуды и фазы возмущений на частоте возбуждения вихрей свободного потока  $f_v$ , на частоте вибраций поверхности  $f_s$ , а также на комбинационных частотах  $f_{\pm} = f_v \pm f_s$ . При дальнейшей обработке измеренные по размаху модели распределения амплитуд и фаз возмущений указанных частот подвергались пространственному фурье-анализу с целью получения амплитуд и фаз мод частотно-поперечно-волнового спектра. Скорость среднего потока измерялась в течение 10÷15 секунд в каждой точке пространства.

## 2. Режимы измерений

### 2.1. Локализованное рассеяние вихрей набегающего потока на неоднородностях поверхности

Как отмечалось выше, в рамках настоящей работы было проведено экспериментальное исследование двух практически важных задач рассеяния нестационарных вихрей свободного потока (частоты  $f_v$ ) на неоднородностях поверхности (колеблющихся с частотой  $f_s$ ): (а) — рассеяние двумерных вихрей (с поперечной завихренностью и поперечным волновым числом  $\beta_v = 0$ ) на трехмерных неоднородностях поверхности (периодических по размаху модели с поперечными волновыми числами  $\beta_s = \pm \beta_{s1}$ ) и (б) — рассеяние трехмерных вихрей (с преимущественно продольной завихренностью и спектром поперечных волновых чисел  $\beta_v$ ) на двумерных (т.е. однородных по размаху модели с поперечным волновым числом  $\beta_s = 0$ ) неоднородностях поверхности. Результатом взаимодействий обоих типов предполагалось порождение в пограничном слое гёртлеровских вихрей на комбинационных частотах  $f_{\pm} = f_v \pm f_s$  и комбинационных поперечных волновых числах  $\beta_{\pm} = \beta_v \pm \beta_s$ . Частоты вихрей свободного потока  $f_v$  и вибраций поверхности  $f_s$  в экспериментах были подобраны таким образом, чтобы пограничный слой был неустойчив к вихрям Гёртлера по крайней мере одной из комбинационных частот ( $f_+ = f_v + f_s$  либо  $f_- = f_v - f_s$ ). Диапазон исследуемых поперечных волновых чисел соответствовал наиболее опасным (т.е. наиболее быстрорастущим по линейной теории устойчивости) гёртлеровским вихрям. В случае (а) частота вибраций поверхности варьировалась в пределах  $f_s = 10\div 50$  Гц, их амплитуда  $A_s$  изменялась от 0,01 до 0,1 мм (т.е. безразмерная амплитуда  $A_s/\delta^* \approx 1\div 10\%$ ), а исследованный диапазон частот вихрей свободного потока составлял  $f_v = 10\div 56$  Гц с амплитудой  $A_v$  от 0,5 до 1 %. В случае (б) работа источников возмущений осуществлялась на частотах  $f_v = 15\div 26$  Гц и  $f_s = 2\div 50$  Гц, амплитуда контролируемых вихрей набегающего потока (измеренная на границе пограничного слоя) доходила до 1 %, а амплитуды вибраций поверхности достигали очень больших величин — до 0,7 мм, т.е. до  $A_s/\delta^* = 64\%$ .

### 2.2. Распределенное рассеяние вихрей набегающего потока на неоднородностях течения

Эксперименты по исследованию механизмов распределенной восприимчивости, связанные с рассеянием вихрей свободного потока на естественных неоднородностях основного течения, были проведены как для двумерных, так и для трехмерных вихрей в группах режимов (с) и (д) соответственно. Группа (с) соответствует рассеянию двумерных вихрей на естественных, т.е. неконтролируемых трехмерных неоднородностях потока. В этой группе режимов в пограничном слое действительно наблюдались естественные стационарные модуляции продольной скорости потока по размаху модели,

ассоциируемые с неконтролируемыми неоднородностями поверхности и с возбуждаемыми ими стационарными гёртлеровскими вихрями, что могло, в принципе, приводить к трансформации двумерных вихрей внешнего потока на этих неоднородностях в трехмерные нестационарные вихри Гёртлера. Исследован диапазон частот вихрей набегающего потока  $f_v = 10 \div 56$  Гц с амплитудами  $A_v \approx 1\%$ .

В группе режимов (*d*) изучался механизм рассеяния трехмерных вихрей свободного потока на двумерной естественной неоднородности пограничного слоя, связанной с его нарастанием вниз по потоку. Поскольку именно этот механизм показал очень высокую эффективность порождения нестационарных вихрей Гёртлера, то он был исследован наиболее подробно для трех частот трехмерных вихрей:  $f_v = 15, 20$  и  $26$  Гц (безразмерные частотные параметры  $F_v = (2\pi f_v \nu / U_c^2) \cdot 10^6 = 17,04, 22,72, 29,54$ ), в широком диапазоне поперечных волновых чисел возмущений, соответствующих наиболее опасным гёртлеровским вихрям. В исследованном диапазоне параметров (значений  $G^* = 7,4 \div 21,3$ , значений  $\beta_v = 0,785 \div 0,262$  рад/мм, соответствующих поперечным длинам волн  $\lambda_z = 8 \div 24$  мм, и значений безразмерного поперечного масштаба  $\Lambda = (U_c \lambda_z / \nu) \cdot (\lambda_z / R)^{1/2} = 149 \div 774$ ) порождаемые гёртлеровские вихри были либо нарастающими, либо нейтрально устойчивыми, либо затухающими (согласно линейной теории устойчивости) в зависимости от соответствующих комбинаций параметров задачи.

### 3. Порождение и развитие возмущений пограничного слоя

#### 3.1. Локализованное порождение возмущений вибрациями поверхности

Как показали предыдущие исследования [13], локализованные (по продольной координате) вибрации поверхности способны самостоятельно приводить к генерации гёртлеровских мод (в отсутствие вихревых возмущений набегающего потока). Это явление представляет собой локализованную восприимчивость пограничного слоя к трехмерным вибрациям (а также стационарным неровностям) поверхности. В проведенном эксперименте это явление также наблюдалось — в области низких частот трехмерных вибраций поверхности (до 17 Гц) на частоте  $f_s$  в пограничном слое регистрировалось относительно эффективное порождение нестационарных гёртлеровских вихрей. В области более высоких частот пограничный слой становится линейно устойчивым к нестационарным гёртлеровским вихрям, в результате генерируемые вибрациями поверхности возмущения быстро затухали вниз по потоку. Двумерные вибрации поверхности очень больших амплитуд (и низких частот) также приводили к генерации возмущений пограничного слоя на частоте  $f_s$ , которые очень быстро затухали вниз по потоку. Эти возмущения представляют собой так называемое «ближнее поле источника» — смесь различных внемодовых возмущений пограничного слоя и, возможно, затухающих волн Толлмина–Шлихтинга. Изучение развития таких возмущений, а также исследование механизма порождения гёртлеровских вихрей неоднородностями поверхности (в отсутствие вихревых возмущений) не входило в задачи настоящей экспериментальной работы.

#### 3.2. Низкая эффективность локализованных механизмов вихревой восприимчивости

Во время проведения экспериментов в группах режимов (*a*) и (*b*) длина реализаций при термоанемометрических измерениях составляла 30 с и более. Измерения с такими длинными реализациями позволяют проводить усреднение по ансамблям нескольких сотен периодов исследуемого периодического сигнала. В условиях экспериментов проводимых в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН, указанная процедура позволяет проводить исследование нестационарных возмущений

пограничного слоя с амплитудами  $10^{-3}$  % и меньше (в зависимости от частоты). Тем не менее, в экспериментах (а) и (б) в пограничном слое не было зафиксировано порождения гёртлеровских вихрей на комбинационных частотах  $f_{\pm} = f_v \pm f_s$  и поперечных волновых числах  $\beta_{\pm} = \beta_v \pm \beta_s$ . Большой неожиданностью оказалось то, что возникновения вихрей Гёртлера не было найдено даже в случае очень больших амплитуд двумерных вибраций поверхности (включая  $A_s/\delta^* = 64$  %). В пограничном слое наблюдалось лишь порождение волн неустойчивости Толлмина–Шлихтинга с частотой в несколько десятков герц. Таким образом, обнаружено, что возбуждение гёртлеровских вихрей посредством механизмов восприимчивости, связанных с рассеянием вихрей свободного потока на локализованных неоднородностях поверхности, оказалось неэффективным.

Этот «отрицательный результат» представляется очень важным по следующим причинам. Он оказался неожиданным, сильно отличающимся от исследованных ранее аналогичных механизмов возбуждения волн Толлмина–Шлихтинга [10] и нестационарных вихрей неустойчивости поперечного течения [11, 12], которые приводили, в отличие от данных экспериментов, к довольно эффективному порождению возмущений пограничного слоя. Таким образом, результаты настоящих экспериментов выявили сильное отличие случая возбуждения гёртлеровских мод от генерации других мод неустойчивости.

### **3.3. Механизм распределенной вихревой восприимчивости. Свойства порождаемых возмущений**

Измерения показали, что механизм распределенной вихревой восприимчивости при рассеянии двумерных вихрей набегающего потока на неконтролируемых естественных трехмерных неоднородностях основного течения (случай (с)) также является неэффективным для порождения гёртлеровских вихрей, возбуждение которых в пограничном слое даже не удалось зафиксировать несмотря на очень высокую точность измерений. В то же время было обнаружено, что трехмерные вихри набегающего потока способны взаимодействовать с естественной двумерной неоднородностью основного течения — нарастающим пограничным слоем (случай (d)), и приводить к эффективному возбуждению нестационарных гёртлеровских вихрей на частоте  $f_v$ . Результаты подробного исследования этого механизма приведены ниже.

Обнаружено, что возмущения, порождаемые в пограничном слое в результате действия механизма распределенной вихревой восприимчивости (случай (d)), являются локализованными в направлении размаха модели в области существования продольных трехмерных контролируемых вихрей набегающего потока. На рис. 4а показан типичный профиль возмущений, измеренный в пограничном слое вдоль размаха модели, — амплитуды (левая шкала) и фазы (правая шкала) возмущений продольной скорости потока. Измерения проведены в пограничном слое на расстоянии от стенки, примерно соответствующем максимуму амплитуд нестационарных гёртлеровских вихрей —  $U(y)/U_c = 0,6$  [2], здесь  $U$  — локальная продольная компонента скорости потока. Измеренные возмущения представляют собой локализованный по размаху волновой пакет. Положение максимумов его амплитуд по размаху соответствует положению пары контролируемых трехмерных (продольных) вихрей свободного потока, создаваемых неоднородностью вибрирующей проволоки, описанной выше.

На рис. 4б показаны профили амплитуд и фаз возмущений, измеренных по нормали к стенке вдали от положения неоднородности вибрирующей проволоки, т.е. вдали от положения пары трехмерных вихрей свободного потока (в сечении I, рис. 4а). Вертикальной штрихпунктирной линией показано примерное положение границы пограничного слоя. Вибрирующая проволока без неоднородности приводит к возникновению



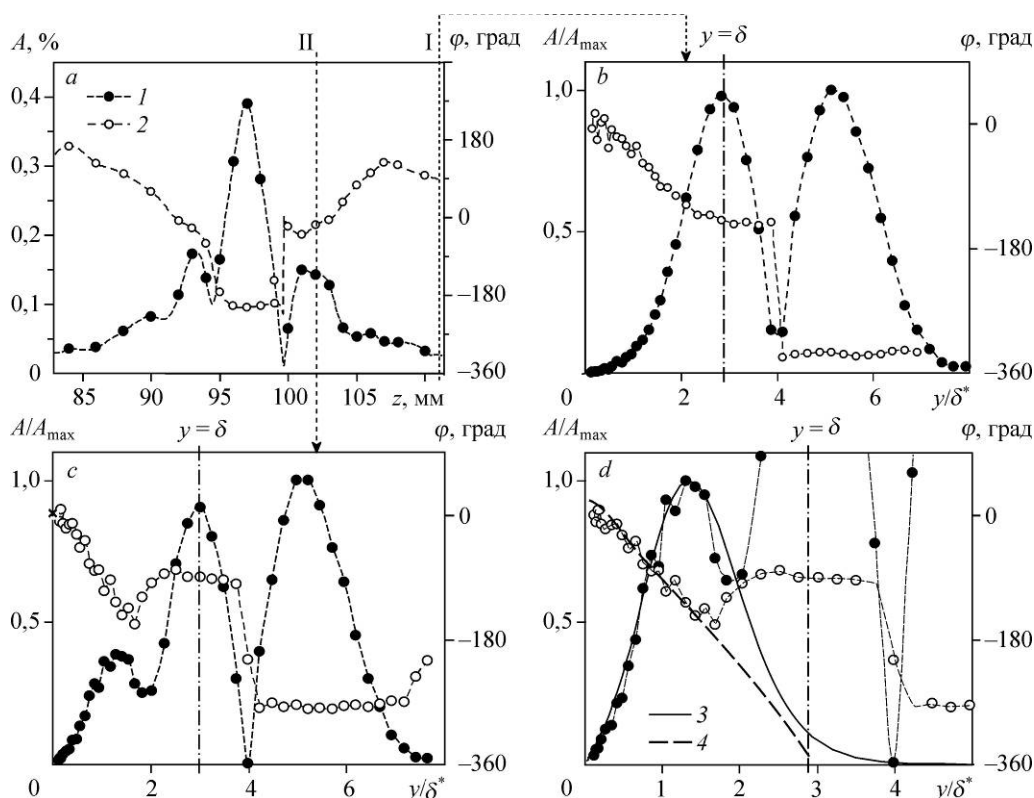


Рис. 4. Амплитуды (1) и фазы (2) возмущений, измеренные в пограничном слое.

*a* — типичный профиль возмущений, измеренный по размаху модели при  $U/U_c = 0,6$ , *b* — нормальный к стенке профиль возмущений, измеренный в сечении I рис. 4*a*, *c* — нормальный к стенке профиль, измеренный в сечении II рис. 4*a*, *d* — подробное изображение пристенной области рис. 4*c* (линиями показаны амплитуды (3) и фазы (4), рассчитанные по ЛПТ для наиболее «опасных» вихрей Гёртлера ( $\beta_v = 0,628$  рад/мм,  $\Lambda = 208$ )). Вертикальной штрихпунктирной линией отмечено примерное положение границы пограничного слоя.  $x = 900$  мм ( $G^+ = 18,8$ ),  $f_v = 20$  Гц ( $F_v = 22,72$ ).

в потоке двумерной (т.е. однородной по размаху) антисимметричной вихревой дорожки, амплитудный профиль которой имеет два «горба», колеблющихся в противофазе. Такие неоднородности свободного потока не приводят к порождению возмущений в пограничном слое (рис. 4*b*): амплитуды монотонно убывают в пристенной области с уменьшением расстояния до поверхности модели.

Совершенно другая картина наблюдается в области, соответствующей положению продольных вихрей, генерируемых в свободном потоке локализованной неоднородностью. На рис. 4*c* приведены соответствующие профили, измеренные в сечении II рис. 4*a*. Здесь в пограничном слое зафиксировано порождение возмущений достаточно высокой амплитуды. В результате в пристенной области профиля амплитуд появляется еще один дополнительный максимум. Фазы в пограничном слое почти линейно убывают с ростом расстояния от стенки.

На рис. 4*d* подробно показана пристенная часть экспериментальных профилей амплитуд и фаз, приведенных на рис. 4*c* (амплитуды нормированы на максимум амплитуд возмущений в пограничном слое). Кроме экспериментальных точек, линиями показан расчет собственных функций нестационарных вихрей Гёртлера, выполненный по линейной локальной параллельной теории устойчивости (ЛПТ) для первой, наиболее опасной моды дискретного спектра задачи на собственные значения (расчет сделан с использованием программ А.В. Бойко [2] для вихрей с безразмерной поперечной длиной волны  $\Lambda = 208$ ). Положение максимумов амплитуд расчетного и экспериментального

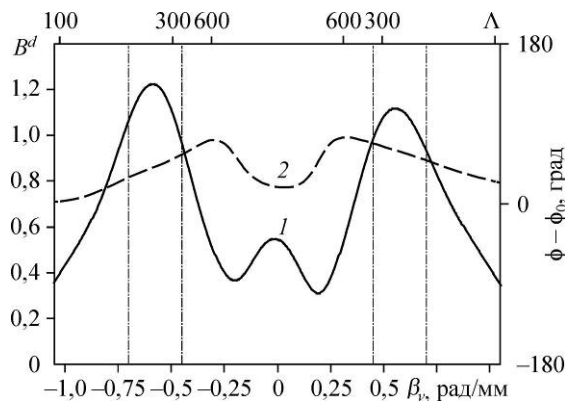


Рис. 5. Типичный спектр возмущений, измеренных в пограничном слое: амплитуды (1) и фазы (2) в зависимости от поперечной длины волны.

$$x = 750 (G^* = 16,2), f_v = 20 \text{ Гц} (F_v = 22,72).$$

профилей, а также форма профиля амплитуд вблизи стенки хорошо согласуются друг с другом. Фазы возмущений, измеренные в пристенной области, также хорошо согласуются с линейной теорией устойчивости Гёртлера. Эти наблюдения показы-

вают, что порождаемые в результате действия механизмов распределенной восприимчивости пограничного слоя возмущения действительно соответствуют нестационарным гёртлеровским вихрям. Это подтверждается результатами, приведенными на рис. 5. Здесь показан типичный фурье-спектр возмущений в пограничном слое по поперечным волновым числам (сверху приведен безразмерный поперечный масштаб): амплитуды (сплошная линия) и фазы (пунктир). Как легко увидеть, наибольшую амплитуду имеют возмущения с поперечным волновым числом  $\beta_v = \pm 0,45 \div 0,7$  рад/мм (соответствующий поперечный безразмерный масштаб  $\Lambda = 177 \div 344$ ). Согласно линейной теории устойчивости и результатам измерений [2] нестационарные гёртлеровские вихри именно этих длин волн являются наиболее быстрорастущими в пограничном слое.

Для всех исследованных частотных режимов распределенной генерации гёртлеровских вихрей в различных положениях по продольной координате в пограничном слое были измерены наборы распределений амплитуд и фаз возмущений по размаху модели. Все измерения выполнялись на расстоянии от стенки, соответствующем  $U/U_e = 0,6$ . Пространственное преобразование Фурье позволило получить кривые нарастания амплитуд и фаз возмущений для вихрей различных поперечных масштабов. На рис. 6 приведены кривые нарастания амплитуд (1) в сравнении с результатами расчетов, выполненных по ЛПТ (2). Результаты приведены для двух характерных случаев ( $f_v = 15$  Гц,  $F_v = 17,04$ ):  $a$  —  $\beta_v = 0,628$  рад/мм ( $\Lambda = 208$ ),  $b$  —  $\beta_v = 0,419$  рад/мм ( $\Lambda = 383$ ). Соответствующие кривые нормированы на значения, полученные в начале области измерений. Видно, что благодаря действию механизма распределенной восприимчивости пограничного слоя вихри

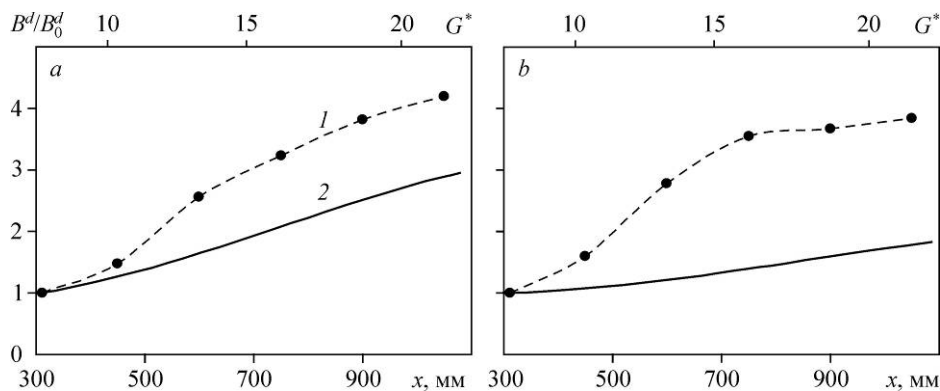


Рис. 6. Типичные кривые нарастания амплитуд порождаемых распределенным образом нестационарных вихрей Гёртлера (1) и их сравнение с ЛПТ (2).

Соответствующие кривые нормированы на первую точку области измерений;  $a$  —  $\beta_v = 0,628$  рад/мм ( $\Lambda = 208$ ),  $b$  —  $\beta_v = 0,419$  рад/мм ( $\Lambda = 383$ );  $f_v = 15$  Гц ( $F_v = 17,04$ ),  $U/U_e = 0,6$ .

нарастают в эксперименте значительно быстрее, чем в ЛПТ. (В отсутствие распределенной генерации хорошее согласование экспериментальных и рассчитанных по ЛПТ кривых нарастания было показано в работах [2, 13].)

Аналогичные результаты получены для всех исследованных частотных режимов для всего изученного диапазона поперечных масштабов возмущений. На рис. 7 приведены соответствующие кривые нарастания порождаемых распределенным образом вихрей Гёртлера: амплитуды (слева) и фазы (справа). Как видно, под действием механизма распределенной восприимчивости нестационарные гёртлеровские вихри нарастают в пограничном слое во всех исследованных частотных режимах несмотря на то, что этот пограничный слой является линейно устойчивым к вихрям Гёртлера с частотами более 20 Гц [2] для всех поперечных волновых чисел. Фазовые скорости возмущений близки к 0,65 от скорости потока, что согласуется с соответствующими значениями, полученными как теоретически, так и экспериментально, для линейных нестационарных гёртлеровских вихрей первой дискретной моды [2].

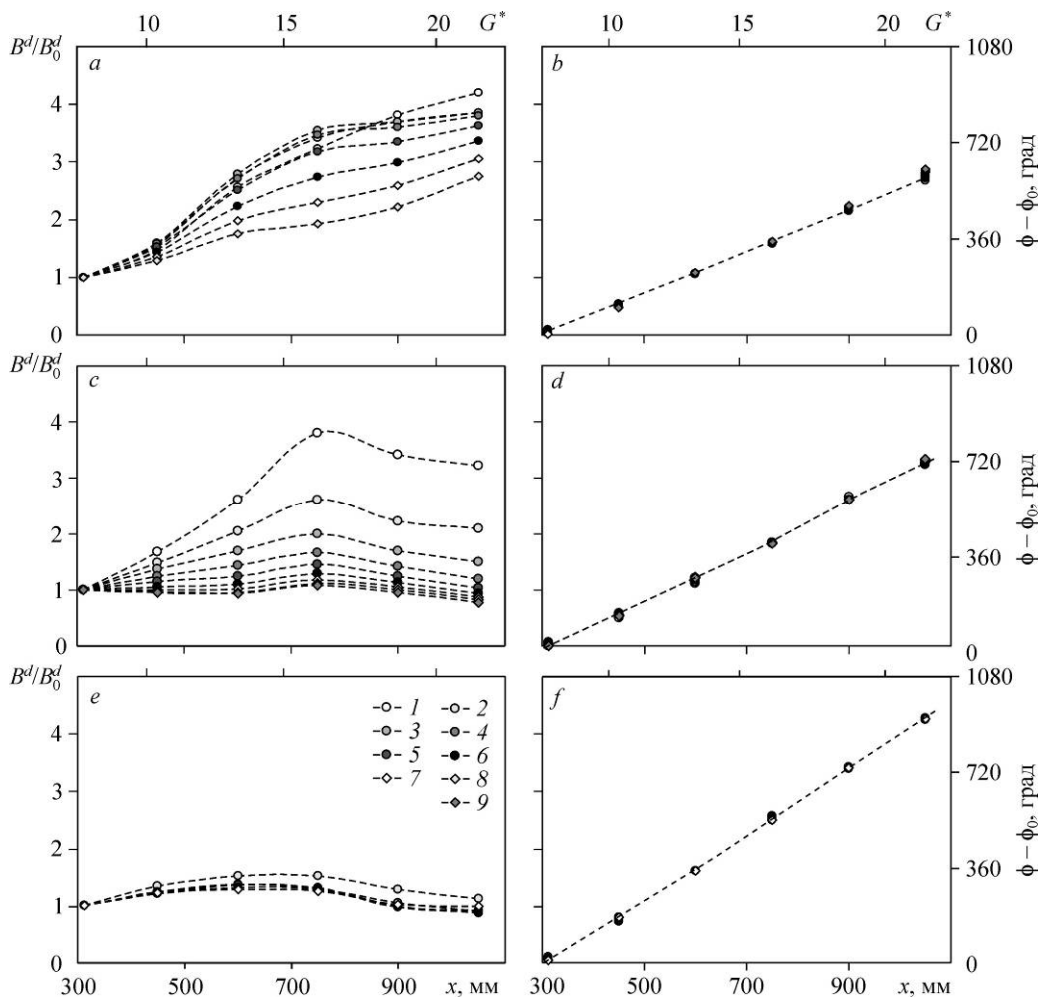


Рис. 7. Кривые нарастания амплитуд (a, c, e) и фаз (b, d, f) порождаемых распределенным образом нестационарных вихрей Гёртлера. Соответствующие кривые нормированы на первую точку области измерений.

$U/U_\infty = 0,6$ ; a, b —  $f_v = 15$  Гц ( $F_v = 17,04$ ), c, d —  $f_v = 20$  Гц ( $F_v = 22,72$ ), e, f —  $f_v = 26$  Гц ( $F_v = 29,54$ );  
 1 —  $\beta_v = 0,785$  ( $\Lambda = 149$ ), 2 —  $\beta_v = 0,628$  ( $\Lambda = 208$ ), 3 —  $\beta_v = 0,524$  ( $\Lambda = 274$ ), 4 —  $\beta_v = 0,449$  ( $\Lambda = 345$ ),  
 5 —  $\beta_v = 0,393$  ( $\Lambda = 421$ ), 6 —  $\beta_v = 0,349$  ( $\Lambda = 503$ ), 7 —  $\beta_v = 0,314$  ( $\Lambda = 589$ ), 8 —  $\beta_v = 0,286$  ( $\Lambda = 680$ ),  
 9 —  $\beta_v = 0,262$  ( $\Lambda = 774$ ), значения  $\beta_v$  приведены в рад/мм.

#### 4. Коэффициенты распределенной восприимчивости пограничного слоя

Полученные экспериментальные данные позволили впервые оценить величины коэффициентов распределенной восприимчивости пограничного слоя при порождении гёртлеровских вихрей возмущениями набегающего потока. Эти коэффициенты были определены примерно так же, как и в соответствующих экспериментах по порождению волн Толлмина–Шлихтинга [6, 7] и мод неустойчивости поперечного течения [8, 9]. Дифференциальное уравнение (1) описывает развитие с продольной координатой  $x$  комплексных амплитуд нестационарных возмущений пограничного слоя  $\bar{B}^d$ , ассоциируемых с вихрями Гёртлера, на безразмерном расстоянии  $y_m$  от стенки, соответствующем положению максимума амплитуды возмущений:

$$\frac{d\bar{B}^d(x, y_m)}{dx} = \overbrace{i\bar{\alpha}(x)\bar{B}^d(x, y_m)}^I + \overbrace{\bar{B}_v(x, y)|_{y=\delta} \bar{G}_v^d(x)}^{II}. \quad (1)$$

За нарастание вихрей в пограничном слое отвечают два механизма: I — механизм линейной неустойчивости пограничного слоя к таким возмущениям (здесь  $\bar{\alpha}(x)$  — комплексное продольное волновое число), II — механизм распределенной восприимчивости пограничного слоя к продольным вихрям свободного потока ( $\bar{B}_v(x, y)|_{y=\delta}$  — комплексная амплитуда таких вихрей, измеренная на границе пограничного слоя,  $\bar{G}_v^d(x)$  — искомый комплексный коэффициент восприимчивости).

Уравнение (1) можно рассматривать как определение понятия коэффициента распределенной вихревой восприимчивости. С этой точки зрения его удобно записать в следующем виде:

$$\mathbf{L}\{\bar{B}^d(x, y_m)\} = \bar{B}_v(x, y)|_{y=\delta} \bar{G}_v^d(x), \quad (2)$$

где  $\mathbf{L} = d/dx - i\bar{\alpha}(x)$  — дифференциальный оператор. Тогда функцию распределенной вихревой восприимчивости можно формально определить как:

$$\bar{G}_v^d(x) = \frac{\mathbf{L}\{\bar{B}^d(x, y_m)\}}{\bar{B}_v(x, y)|_{y=\delta}}. \quad (3)$$

Это определение интересно сравнить с соответствующим определением коэффициента локализованной вихревой восприимчивости

$$\bar{G}_v(x_s) = \frac{\bar{B}(x_s, y_m)}{\bar{B}_v(x_s, y)|_{y=\delta}}, \quad (4)$$

где  $x_s$  — продольная координата неоднородности течения, на которой происходит возбуждение волны неустойчивости, а  $\bar{B}$  — начальная спектральная амплитуда возбуждаемой волны. Видно, что основным отличием определения коэффициента распределенной восприимчивости (3) от коэффициента локализованной восприимчивости (4) является присутствие в первом случае дифференциального оператора  $\mathbf{L}$ . Физический смысл этого оператора заключается в том, что он означает полное изменение комплексной амплитуды волны неустойчивости (на которую он действует) за вычетом ее изменения, ассоциируемого с механизмом линейной неустойчивости течения. Таким образом, коэффициент распределенной восприимчивости (3) характеризует, по определению, локальную скорость изменения комплексной амплитуды возмущения пограничного слоя, связанного с механизмом распределенного возбуждения. Эта скорость нормирована на комплексную

амплитуду внешнего вихревого возмущения. В определении же коэффициента локализованной восприимчивости (4) оператор  $L$  отсутствует, поэтому этот коэффициент характеризует не изменение амплитуды возбуждаемого возмущения пограничного слоя, а величину самой начальной амплитуды в точке возбуждения, которая также нормирована на комплексную амплитуду внешнего вихревого возмущения.

Уравнение (1) является классическим примером неоднородного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными; его решение подробно разобрано в литературе (см., например, [17]). Запишем это решение для случая, когда продольное волновое число  $\bar{\alpha}(x)$  считается постоянным (т.е. осредненной на области измерений величиной):

$$\bar{B}^d(x^*) = e^{i\bar{\alpha}x^*} \left\{ \int_0^{x^*} \bar{B}_v(s) \bar{G}_v^d(s) e^{-i\bar{\alpha}s} ds + \bar{B}_0^d \right\}, \quad (5)$$

а также в полном виде:

$$\bar{B}^d(x^*) = e^{\bar{A}(x^*)} \left\{ \int_0^{x^*} \bar{B}_v(s) \bar{G}_v^d(s) e^{-\bar{A}(s)} ds + \bar{B}_0^d \right\}, \quad \bar{A}(x^*) = \int_0^{x^*} \bar{\alpha}(s) ds. \quad (6)$$

Для удобства в выражениях (5) и (6) за начало продольной координаты принято положение первой экспериментальной точки в области измерений (ось координат  $x^*$ ). Величина  $\bar{B}_0^d$  представляет собой «начальную» комплексную амплитуду возмущений в пограничном слое при  $x^* = 0$ .

Для каждого заданного значения частоты и поперечного волнового числа возмущений неизвестная функция  $\bar{G}_v^d(x^*)$  и константа  $\bar{B}_0^d$  могут быть найдены за счет аппроксимации измеренных в эксперименте распределений  $\bar{B}^d(x^*)$  приближенным (5) или полным (6) аналитическим решением (аналогично экспериментам [6–9]).

Указанная аппроксимация была проведена с использованием средств решения задач оптимизации (градиентный, симплексный [18] и генетический [19] алгоритмы), реализованных в среде MATLAB. Комплексные функции восприимчивости  $\bar{G}_v^d(x^*)$  искались в виде широкого набора элементарных функций: комплексных экспонент ( $a$ ), полиномов первой и второй степени ( $b$ ), констант ( $c$ ), корневой и обратной корневой зависимости ( $d$ ), гиперболических функций ( $e$ ) и их комбинаций. Решение задачи оптимизации выполнено для двух различных критериев сходимости (нормы разности экспериментальных и аналитических кривых нарастания  $\bar{B}^d$  и более сложного критерия, предложенного в работе [6]) с применением нескольких подходов аппроксимации, основанных на учете экспериментальных, а также приближенных и полных теоретических характеристик нарастания гёртлеровских вихрей в линейной задаче устойчивости.

Как показали подробные исследования, в изученном диапазоне продольных координат (числа Гёртлера  $G^* = 7,4 \div 21,3$ ) поставленная задача оптимизации имеет, по всей видимости, единственное физически обоснованное решение. Было показано, что в этом случае вид функции  $\bar{G}_v^d(x^*)$  хорошо описывается комплексной экспонентой с монотонно убывающей вниз по потоку амплитудой, а итоговые аналитические кривые нарастания гёртлеровских вихрей хорошо аппроксимируют экспериментальные данные. На рис. 8 приведено десять аналитических решений интегрального уравнения (6), полученных за счет использования различных критериев и методов оптимизации. Видно, что полученные решения хорошо соответствуют друг другу.

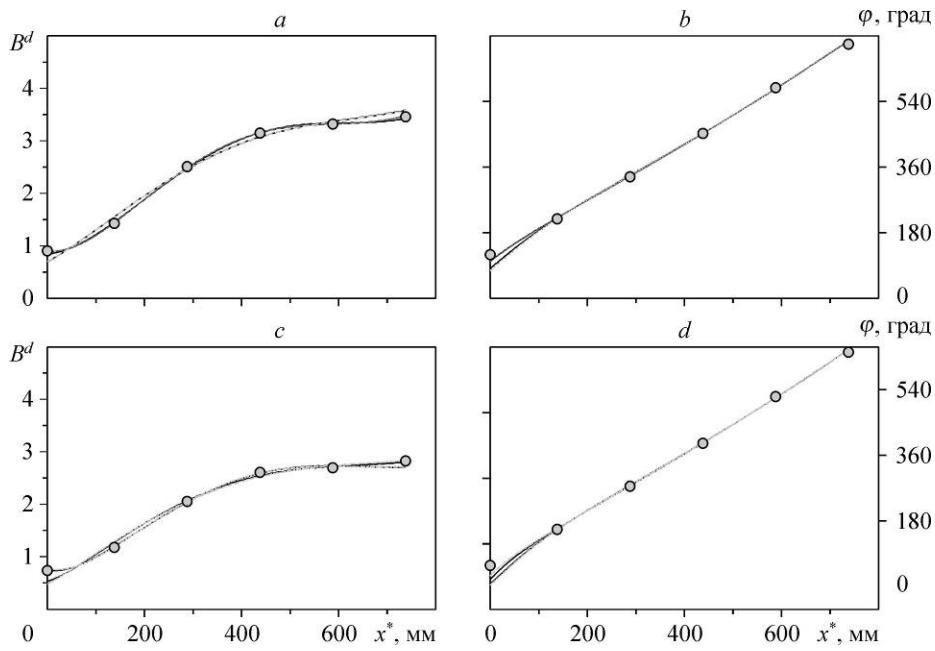


Рис. 8. Характерный пример аппроксимации экспериментальных кривых нарастания амплитуд (a, c) и фаз (b, d) гёртлеровских вихрей (символы) аналитическими решениями, выбранными при помощи различных алгоритмов и критериев оптимизации.

a, b —  $\beta_v = 0,628$  рад/мм ( $\Lambda = 208$ ), b, c —  $\beta_v = 0,419$  рад/мм ( $\Lambda = 383$ );  $f_v = 15$  Гц ( $F_v = 17,04$ ).

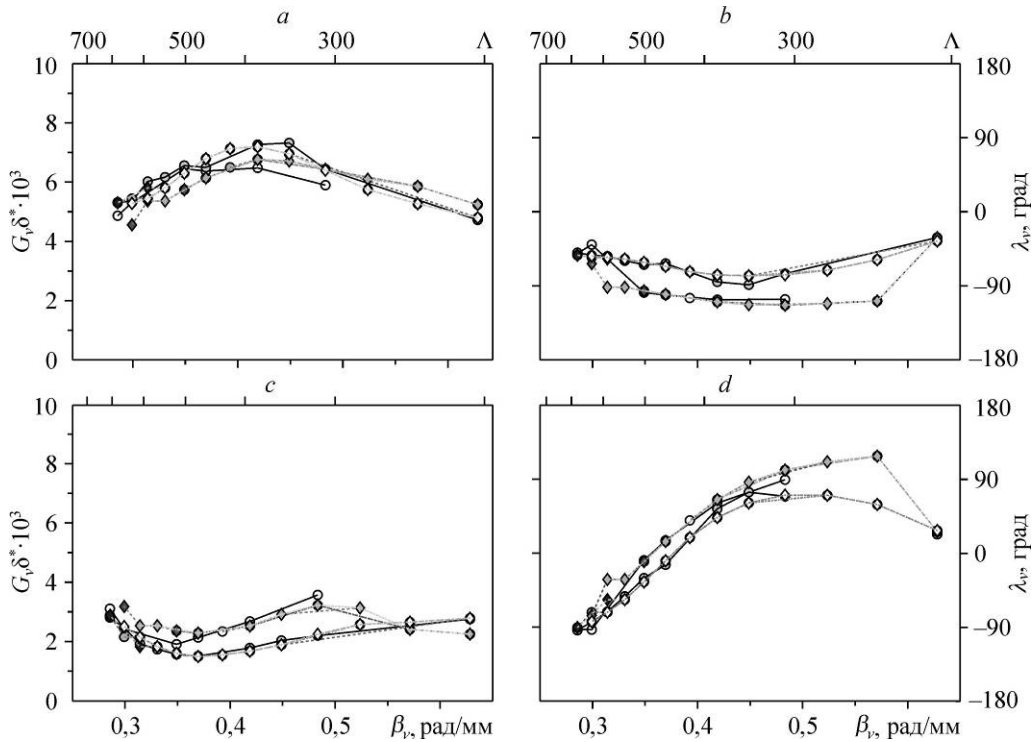


Рис. 9. Амплитуды (a, c) и фазы (b, d) коэффициентов распределенной восприимчивости пограничного слоя на вогнутой поверхности к продольным вихрям свободного потока в зависимости от поперечного волнового числа  $\beta$  порождаемых вихрей Гёртлера с частотой 15 Гц ( $F_v = 17,04$ ).

Кривые получены с помощью разных алгоритмов и критериев оптимизации.

a, b —  $x = 312$  мм ( $G^* = 7,4$ ), c, d —  $x = 1050$  мм ( $G^* = 21,3$ ).

Значения амплитуд и фаз коэффициентов распределенной восприимчивости представляют собой наиболее важный результат настоящей работы. Они приведены на рис. 9 для частоты 15 Гц в зависимости от поперечного волнового числа  $\beta_v$  порождаемых вихрей Гёртлера (на верхней шкале приведен безразмерный поперечный масштаб  $\Lambda$ ). Соответствующие величины получены в начале (рис. 9a, 9b) и в конце (рис. 9c, 9d) области измерений (т.е. для  $x = 312$  и 1050 мм). Амплитуды коэффициентов обезразмерены на локальную толщину вытеснения  $\delta^*$ . Различными кривыми показаны результаты, полученные с применением различных алгоритмов и критериев оптимизации. Эти критерии дают несколько отличающиеся значения коэффициентов. Разброс кривых можно рассматривать как некоторую грубую оценку погрешности определения коэффициентов восприимчивости.

В начале области измерений (рис. 9a) механизм распределенной восприимчивости пограничного слоя наиболее сильно воздействует на гёртлеровские вихри с поперечным масштабом  $\beta_v = 0,33 \div 0,575$  рад/мм ( $\Lambda = 238 \div 547$ ) (рис. 9a). Вихри таких поперечных масштабов являются одновременно наиболее быстрорастущими и по линейной теории устойчивости. Таким образом, механизмы распределенной восприимчивости и неустойчивости способны усиливать друг друга. Амплитуды коэффициентов экспоненциально убывают с продольной координатой и к концу области измерений уменьшаются примерно в 2–3 раза. В конце области измерений эффективность исследованного механизма распределенной вихревой восприимчивости уже очень слабо зависит от поперечного масштаба (в пределах точности измерений).

### Заключение

1. Проведено экспериментальное исследование механизмов порождения вихрей Гёртлера в пограничном слое на вогнутой стенке за счет рассеяния вихрей свободного потока на локализованных (в продольном направлении) неоднородностях поверхности. Исследования выполнены для двух различных конфигураций неоднородностей поверхности экспериментальной модели и набегающего потока. Несмотря на большую точность измерений и широкий диапазон исследованных параметров задачи в пограничном слое не обнаружено возбуждения гёртлеровских вихрей с помощью указанных выше механизмов, что показывает их неэффективность.

2. Экспериментально изучены механизмы распределенного порождения нестационарных вихрей Гёртлера в пограничном слое на вогнутой стенке под воздействием двумерных (поперечных) и трехмерных (продольных) вихрей набегающего потока. Обнаружено, что второй механизм является весьма эффективным. Найдено, что этот механизм способен не только генерировать нестационарные вихри Гёртлера, но и значительно изменять скорости их нарастания по сравнению с механизмом линейной неустойчивости течения и, в частности, усиливать гёртлеровские вихри, затухающие по законам линейной теории устойчивости. Найдено, что двумерные вихревые возмущения набегающего потока не приводят к порождению вихрей Гёртлера в пограничном слое несмотря на присутствие некоторых слабых неконтролируемых неоднородностей течения по размаху модели.

3. Впервые даны определения и экспериментально получены оценки величин коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости пограничного слоя при порождении гёртлеровских вихрей трехмерными продольными вихрями свободного потока в процессе их рассеяния на естественной двумерной неоднородности нарастающего пограничного слоя. Обнаружено, что в начальной области быстрого нарастания пограничного слоя этот механизм распределенной восприимчивости наиболее эффективен для вихрей с безразмерными поперечными масштабами, близкими к наиболее «опасным» с точки зрения механизма линейной неустойчивости. Найдено, что амплитуды полученных коэффициентов восприимчивости убывают с продольной координатой.

### Список литературы

1. Floryan J.M. On the Goertler instability of boundary layers // J. Aerosp. Sci. 1991. Vol. 28. P. 235–271.
2. Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Mischenko D.A. Steady and unsteady Görtler boundary-layer instability on concave wall // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2010. Vol. 29. P. 61–83.
3. Wu X., Zhao D., Luo J. Excitation of steady and unsteady Görtler vortices by free-stream vortical disturbances // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 682. P. 66–100. DOI: 10.1017/jfm.2011.224.
4. Kachanov Y.S. Three-dimensional receptivity of boundary layers // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2000. Vol. 19, No. 5. P. 723–744.
5. Gaponenko V.R., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Crouch J.D. Swept-wing boundary-layer receptivity to surface non-uniformities // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 461. P. 93–126.
6. Бородулин В.И., Иванов А.В., Качанов Ю.С., Комарова В.Ю. Распределенная двумерная восприимчивость пограничного слоя к нестационарным вихревым возмущениям в присутствии неровностей поверхности // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 2. С. 199–224.
7. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Fedenkova A.A. Three-dimensional distributed receptivity of a boundary layer to unsteady vortex disturbances // XIII Intern. Conf. on Methods of Aerophysical Research. Proc. Part III. Novosibirsk: Publ. House “Parallel”, 2007. P. 45–50.
8. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S. Distributed receptivity of swept-wing boundary layer to streamwise vortices. Part. 1. Experimental approach // XV Intl. Conf. on Methods of Aerophysical Research. Proceedings ISBN 978-5-98901-085-1 / Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: ITAM SB RAS, 2010. 10 p.
9. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S. Distributed receptivity of swept-wing boundary layer to streamwise vortices. Part. 2. Receptivity characteristics // XV Intl. Conf. on Methods of Aerophysical Research. Proceedings ISBN 978-5-98901-085-1 / Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: ITAM SB RAS, 2010, 10 p.
10. Бородулин В.И., Качанов Ю.С., Рошектаев А.П., Баке С. Экспериментальное исследование трехмерной восприимчивости пограничного слоя к вихрям свободного потока при их рассеянии на локализованных вибрациях поверхности // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11, № 2. С. 189–202.
11. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Roschekhtayev A.P. Receptivity coefficients at excitation of cross-flow waves by free-stream vortices in the presence of surface roughness // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 716. P. 487–527. DOI: 10.1017/jfm.2012.555.
12. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Roschekhtayev A.P. Vortex receptivity of a swept-wing boundary layer in presence of surface vibrations // XIV Intern. Conf. on Methods of Aerophysical Research. June 30–July 6, 2008. Proceedings / Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: ITAM SB RAS 2008. 10 p.
13. Иванов А.В., Качанов Ю.С., Мищенко Д.А. Порождение нестационарных вихрей Гёртлера локальными неоднородностями поверхности. Коэффициенты восприимчивости // Теплофизика и аэромеханика. Т. 19, № 5. 2012. С. 19–37.
14. Bippes H., Görtler H. Dreidimensionale Störungen in der Grenzschicht an einer konkaven Wand // Acta Mech. 1972. Vol. 14. P. 251–267.
15. Swearingen J.D., Blackwelder R.F. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 182. P. 255–290.
16. Kottke V. On the instability of laminar boundary layers along concave walls towards Görtler vortices // Propagation in Non Equilibrium Systems / ed. J.E. Wesfreid & H. Brand. Springer, 1988. P. 390–398.
17. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1982. 331 с.
18. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization // Springer Science & Business Media, LLC, 2006. 664 p.
19. Gen M., Cheng R. Genetic algorithms and engineering optimization // John Wiley & Sons, 2000. 495 p.

*Статья поступила в редакцию 19 июня 2013 г.,  
после доработки — 8 сентября 2014 г.*