12. В. А. Храмцов.— В сб.: Горение в турбулентном потоке. М., Изд-во АН СССР, 1960.
13. В. В. Голубев, В. Н. Янковский и др. Известия вузов Авиационная техника, 1973, 2.
14. В. Н. Янковский, А. В. Талантов. Второй Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. Автореф. докл. Черноголовка, 1969.
15. В. Е. Дорошенко, А. И. Никитский. Тр. МАИ, № 282, М., 1956.
16. Ю. Я. Бурико, В. Р. Кузнецов. ФГВ, 1976, **12**, 3, 390.
17. В. Н. Вилюнов. ФГВ, 1975, **11**, 1, 51.
18. В. Л. Зимонт, В. А. Сабельников. Всесоюзная школа-конференция по теории горения. Тез. докл. М., ИПМ АН СССР, 1975.
19. В. Р. Кузнецов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, **5**, 3.

К ОБЩЕМУ АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ МЕДЛЕННОГО ГОРЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. С. Плешанов

(Москва)

Устойчивость ламинарного фронта пламени в паре, испаряющемся с поверхности жидкости, с учетом влияния поля тяжести и поверхностного натяжения границы раздела фаз исследовалась в [1], где установлено стабилизирующее влияние перечисленных факторов. В [2] показано стабилизирующее влияние силы тяжести и вязкости жидкости. Исследование в [1, 2] проводилось в рамках гидродинамической устойчивости с использованием условия постоянства нормального потока массы на гидродинамическом разрыве [1], объединяющем фронты испарения и горения. В данной работе рассматривается общая задача гидродинамической и диффузионно-тепловой устойчивости (в смысле [3]) разделенных фронтов испарения и горения без учета взаимного влияния движения среды и распространения тепла. Предельным переходом получается характеристическое уравнение для гидродинамического разрыва, объединяющего фронты испарения и горения.

1. Гидродинамическая задача. Пусть среды $\alpha=1,\ 2,\ 3$ — жидкость, прогреваемый пар и продукты сгорания соответственно, а поверхности *I*, *II* — фронты испарения и горения (конфигурация и система координат показаны на рис. 1). Как обычно, все среды считаются несжимаемыми. По фронтам распространяются возмущения поверхностей сред $\zeta'_{\mathrm{I,II}}$, пропорциональные $\exp(iky+\Omega t)$, где k — волновое число ($\mathrm{Im}(k)=0$), $\Omega=-i\omega$ (для устойчивости необходимо $\mathrm{Re}(\Omega)<0$). Эти возмущения вызывают изменения нормальных потоков массы на фронтах $\delta j_{\mathrm{I,II}}$ и появление вырожденно-акустических (a) и энтропийно-вихревых или вязких (r) возмущений во всех средах (направления возмущений показаны на рис. 1). Пусть зависимости

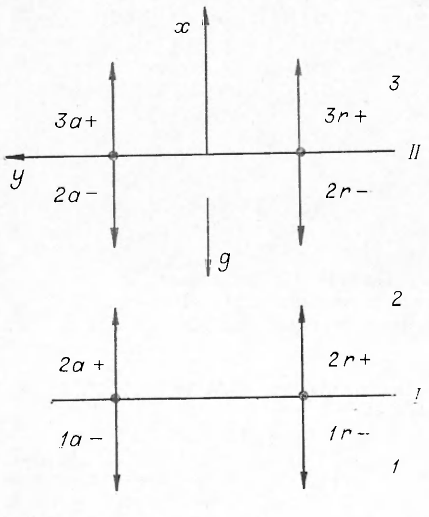

Рис. 1.

возмущений любой величины φ от x имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\varphi'_{1a-} = \widehat{\varphi}'_{1a-}e^{k(x-x_{\mathrm{I}})}, \quad \varphi'_{1r-} = \widehat{\varphi}'_{1r-}e^{l_{1-}(x-x_{\mathrm{I}})},\\
&\varphi'_{2a+} = \widehat{\varphi}'_{2a+}e^{-k(x-x_{\mathrm{I}})}, \quad \varphi'_{2r+} = \widehat{\varphi}'_{2r+}e^{l_{2+}(x-x_{\mathrm{I}})},\\
&\varphi'_{2a-} = \widehat{\varphi}'_{2a-}e^{k(x-x_{\mathrm{II}})}, \quad \varphi'_{2r-} = \widehat{\varphi}'_{2r-}e^{l_{2-}(x-x_{\mathrm{II}})},\\
&\varphi'_{3a+} = \widehat{\varphi}'_{3a+}e^{-k(x-x_{\mathrm{II}})}, \quad \varphi'_{3r+} = \widehat{\varphi}'_{3r+}e^{l_{3+}(x-x_{\mathrm{II}})},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где l — волновые числа r возмущений; $x_{\mathrm{I}}=-d<0$, $x_{\mathrm{II}}=0$ — координаты фронтов, штрихи относятся к возмущениям, символ $\wedge$ означает амплитуды возмущений на фронтах. Физический смысл имеют возмущения с $\mathrm{Re}(l_{\pm})\lesseqgtr 0$. Из возмущенных уравнений непрерывности и Навье — Стокса

$$
\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v'_\alpha}{\partial y} = 0;
$$

$$
\rho_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial}{\partial x} - \nu_\alpha\Delta\right)\begin{Bmatrix} u'_\alpha\\ v'_\alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{Bmatrix} p'_\alpha = 0,
\tag{1.2}
$$

получим

$$
\Delta p'_{\alpha a} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial}{\partial x} - \nu_\alpha\Delta\right)R'_{\alpha r} = 0,
\tag{1.3}
$$

где $R'_{\alpha r} = \partial v'_{\alpha r}/\partial x - \partial u'_{\alpha r}/\partial y$ — z— компонента ротора скорости; остальные обозначения обычны.

Из (1.3) ввиду (1.1) следуют дисперсионные уравнения

$$
z_\alpha + w_{\alpha r} = \frac{\lambda_{\alpha r}}{2}(w^2_{\alpha r} - 1),
\tag{1.4}
$$

где $z_\alpha=\Omega/(u_\alpha k)$; $w_{\alpha r}=l_\alpha/k$; $\lambda_{\alpha r}=2\nu_\alpha k/u_\alpha$. Из (1.2) имеем связи

$$
v'_{\alpha a\pm} = -iu'_{\alpha a\pm}, \quad p'_{\alpha a\pm} = -(\mp z_\alpha + 1)\,ju'_{\alpha a\pm},
$$
$$
v'_{\alpha r} = iw_{\alpha r}u'_{\alpha r}.
$$

На поверхностях разрывов выполняются граничные условия: непрерывность потока массы

$$
\delta j_{\mathrm{I}}=\rho_1\delta u_{1\mathrm{I}}=\rho_2\delta u_{2\mathrm{I}}, \quad \delta j_{\mathrm{II}}=\rho_2\delta u_{2\mathrm{II}}=\rho_3\delta u_{3\mathrm{II}};
\tag{1.5}
$$

связь нормальных компонентов импульса

$$
\begin{aligned}
&(p'_1 + 2j\delta u_1 - \tau'_{1xx})_{\mathrm{I}} - (p'_2 + 2j\delta u_2 - \tau'_{2xx})_{\mathrm{I}} = -\sigma\partial^2\zeta'_{\mathrm{I}}/\partial y^2 + (\rho_1 - \rho_2)\,g\zeta'_{\mathrm{I}},\\
&(p'_2 + 2j\delta u_2 - \tau'_{2xx})_{\mathrm{II}} - (p'_3 + 2j\delta u_3 - \tau'_{3xx})_{\mathrm{II}} = (\rho_2 - \rho_3)\,g\zeta'_{\mathrm{II}};
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

непрерывность его тангенциальных компонентов

$$
\begin{aligned}
&(j\delta v_1 - \tau'_{1xy})_{\mathrm{I}} = (j\delta v_2 - \tau'_{2xy})_{\mathrm{I}},\\
&(j\delta v_2 - \tau'_{2xy})_{\mathrm{II}} = (j\delta v_3 - \tau'_{3xy})_{\mathrm{II}};
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

непрерывность касательных напряжений

$$
\tau'_{1xy\mathrm{I}} = \tau'_{2xy\mathrm{I}}, \quad \tau'_{2xy\mathrm{II}} = \tau'_{3xy\mathrm{II}}.
\tag{1.8}
$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения;

$$\tau'_{\alpha xx} = 2\eta_\alpha \partial u'_\alpha/\partial x, \quad \tau'_{\alpha xy} = \eta_\alpha (\partial v'_\alpha/\partial x + \partial u'_\alpha/\partial y) -$$

возмущенные компоненты тензора вязких напряжений. Вариации компонентов скорости содержат возмущения поверхностей разрыва

$$\delta u_{\alpha \mathrm{I}} = u'_{\alpha \mathrm{I}} - \partial \zeta'_{\mathrm{I}}/\partial t, \qquad \delta v'_{\alpha \mathrm{I}} = v'_{\alpha \mathrm{I}} + u_\alpha \partial \zeta'_{\mathrm{I}}/\partial y;$$
$$\delta u_{\alpha \mathrm{II}} = u'_{\alpha \mathrm{II}} - \partial \zeta'_{\mathrm{II}}/\partial t, \quad \delta v'_{\alpha \mathrm{II}} = v'_{\alpha \mathrm{II}} + u_\alpha \partial \zeta'_{\mathrm{II}}/\partial y.$$

В силу однородности задачи (невозмущенные распределения не зависят от x) всегда можно считать стационарное значение $v_\alpha = 0$ и не учитывать в (1.7) $\delta j_{\mathrm{I,\,II}}$. В отличие от (1.5)—(1.7) условия (1.8), означающие вместе с (1.7) непрерывность тангенциальных компонентов скорости, не следуют из дивергентной записи уравнений гидродинамики. На самом деле, на малой, но не равной нулю ширине гидродинамического разрыва δ относительное изменение касательных компонентов скорости $\varepsilon \sim \delta/\sqrt{\nu\tau}$, где τ — пролетное время. Для фронта испарения, где δ порядка нескольких длин свободного пробега, $\varepsilon \sim \sqrt{M} \ll 1$ (M — число Маха); для фронта горения оценки (см. ниже) показывают, что обычно тоже $\varepsilon \ll 1$. Условия (1.8) наряду с совпадением тангенциальных компонентов скорости использовались в [2, 4, 5]. Система условий (1.6)—(1.8) обладает тем свойством, что в вырожденной ситуации невязкой среды перед разрывом, когда отсутствует диффузия вихрей от разрыва вверх по потоку, условия (1.6)—(1.7) по-прежнему верны и вместе с (1.5) достаточны для описания течения. При этом условие (1.8) уже не корректно, но можно показать, что обсуждаемая вырожденная ситуация является предельной для общей задачи с условиями (1.5)—(1.8).

Поставленная задача содержит 12 возмущений (8 возмущений сред +2 возмущения фронтов +2 возмущения нормальных потоков массы на фронтах) и 10 граничных условий (1.5)—(1.8). Следовательно, характеристических уравнений будет 2, и их можно представить как связи между $\delta j_{\mathrm{I,\,II}}$ и $\delta\zeta_{\mathrm{I,II}} \equiv \zeta_{\mathrm{I,II}}$. Недостающие связи получаются в рамках диффузионно-тепловой задачи.

Поскольку вязкость жидкости существенно превышает вязкость пара и продуктов сгорания, учитываем в дальнейшем в граничных условиях только вязкость жидкости. Однако для выполнения правильных предельных переходов характеристических уравнений при $kd \to \infty$ учет вязкости в дисперсионном уравнении (1.4) для среды *2* имеет принципиальное значение, так как под действием хотя бы и малой, но не нулевой вязкости обеспечивается необходимое расплывание энтропийно-вихревых возмущений на достаточном удалении от фронта, который их генерировал.

Искомые характеристические уравнения имеют вид

$$\left\{\left[z_1 + 2\frac{(\lambda_1 + 1) w_{1-} - 1}{w_{1-} + 1}\right] \delta F_{\mathrm{I}-} + z_1 \delta F_{\mathrm{II}+} + (\delta A_{12} - \delta B_{12})\right\} +$$
$$+ e^{-kd} [- z_2 \delta F_{\mathrm{II}-} + z_3 \delta F_{\mathrm{II}+} + (\delta A_{23} - \delta B_{23})] = 0, \tag{1.9}$$

$$(z_2 - 1) [(z_2 + 2) \delta F_{\mathrm{II}-} + z_3 \delta F_{\mathrm{II}+} + (\delta A_{23} - \delta B_{23})] +$$
$$+ (z_2 + 1) e^{-kd} \left[\left(z_1 + 2\lambda_1 \frac{w_{1-}}{w_{1-} + 1}\right) \delta F_{\mathrm{I}-} - z_2 \delta F_{\mathrm{I}+} + (\delta A_{12} + \delta B_{12})\right] -$$
$$- 2e^{l_{2+} d} \left\{\left[(z_1 + \lambda_1) - (z_2 - \lambda_1 - 1) \frac{w_{1-} - 1}{w_{1-} + 1}\right] \delta F_{\mathrm{I}-} -\right.$$
$$\left. - \delta F_{\mathrm{I}+} + (\delta A_{12} + z_2 \delta B_{12})\right\} = 0. \tag{1.10}$$

Здесь опущен индекс r и

$$\delta F_{\mathrm{I}-,+}=u_{1,2}\delta j_{\mathrm{I}}/j+\Omega\delta\zeta_{\mathrm{I}},\quad \delta F_{\mathrm{II}-,+}=u_{2,3}\delta j_{\mathrm{II}}/j+\Omega\delta\zeta_{\mathrm{II}};$$
$$\delta A_{12}=2(u_2-u_1)\delta j_{\mathrm{I}}/j+1/j\cdot[\sigma k^2+(\rho_1-\rho_2)g]\delta\zeta_{\mathrm{I}};$$
$$\delta B_{12}=(u_2-u_1)k\delta\zeta_{\mathrm{I}};$$
$$\delta A_{23}=2(u_3-u_2)\delta j_{\mathrm{II}}/j+1/j\cdot(\rho_2-\rho_3)g\delta\zeta_{\mathrm{II}};$$
$$\delta B_{23}=(u_3-u_2)k\delta\zeta_{\mathrm{II}}.$$

При $kd\to 0$ из (1.9), (1.10) получается характеристическое уравнение

$$\left\{\left[z_1+2\frac{(\lambda_1+1)w_{1-}-1}{w_{1-}+1}\right]\delta F_{\mathrm{I}-}+z_3\delta F_{\mathrm{II}+}+\right.$$
$$+(\delta A_{12}+\delta A_{23})-(\delta B_{12}+\delta B_{23})=0 \qquad (1.11)$$

и предельное условие

$$\delta F_{\mathrm{I}+}=\delta F_{\mathrm{II}-}. \qquad (1.12)$$

При $kd\to\infty$ из (1.9), (1.10) получаются предельные уравнения [1, 2]. При $kd=0$ и $\delta j_{\mathrm{I,II}}=0$ из (1.12) имеем $\delta\zeta_{\mathrm{I}}=\delta\zeta_{\mathrm{II}}$, и из (1.11) получается уравнение

$$(1+\mu)z^2+2\left[(\lambda+1)-\frac{\lambda+2}{w+1}\right]z+(1-1/\mu)+$$
$$+\frac{1}{u_1^2 k}[k^2\sigma/\rho_1+(1-\mu)g]=0, \qquad (1.13)$$

где $\mu=\rho_3/\rho_1<1$; у z, w, λ опущен индекс 1.

Уравнение (1.13) при $\lambda=0$ совпадает с аналогичным уравнением [1], а при $\sigma=0$ — с [2]. Нетрудно видеть, что в обоих частных случаях [1] ($g>0$, $\sigma=\lambda=0$; $\sigma>0$, $g=\lambda=0$) имеются области стабилизации (длинноволновой и коротковолновой соответственно). Однако учет только вязкости жидкости ($\lambda>0$, $\sigma=g=0$) не стабилизирует разрыв.

Доказательство проводится следующим образом. Из дисперсионного уравнения (1.4), которое в данном случае имеет вид

$$z+w=\lambda/2(w^2-1),$$

при

$$z=x+iy,\qquad w=u+iv$$

следует

$$x+u=\lambda/2(u^2-v^2-1),\qquad y+v=\lambda uv,$$

так что

$$u=(1+\nu)/\lambda>0,\qquad v=y/\nu,$$

где $\nu>1$ (см. ниже) определяется из уравнения

$$\nu^2=1+\lambda^2+2\lambda x+(\lambda y/\nu)^2.$$

При $y=0$ (1.13) в данном случае имеет вид

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

с $a_2>0$, $a_0<0$, т. е. один из корней $x>0$, что означает неустойчивость. При $y\neq 0$ можно показать, что некоторая линейная комбинация дей-

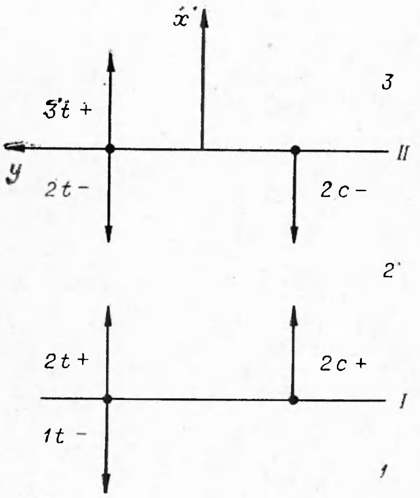

Рис. 2.

ствительной и мнимой частей (1.13) не удовлетворяется, т. е. решения с $y \neq 0$ отсутствуют (как и в [1]).

2. Диффузионно-тепловая задача. Конфигурация и система координат те же, что и на рис. 1. По средам *1* и *3* распространяются температурные (t) возмущения, а по среде *2* — температурные в концентрационные (c) (направления возмущений показаны на рис. 2). Отсутствие концентрационных возмущений в средах *1* и *3* связано с отсутствием диффузии ведущего реагирующего компонента в жидкости и предположением, что в газовой фазе он находится в недостатке (как и в [3]). Пусть зависимости возмущений имеют вид

$$
\begin{aligned}
&T'_{1-} = \hat{T}'_{1-} e^{m_{1-}(x-x_{\mathrm{I}})}, \\
&T'_{2+} = \hat{T}'_{2+} e^{m_{2+}(x-x_{\mathrm{I}})}, \qquad c'_{2+} = \hat{c}'_{2+} e^{n_{2+}(x-x_{\mathrm{I}})}, \\
&T'_{2-} = \hat{T}'_{2-} e^{m_{2-}(x-x_{\mathrm{II}})}, \qquad c'_{2-} = \hat{c}'_{2-} e^{n_{2-}(x-x_{\mathrm{II}})}. \\
&T'_{3+} = \hat{T}'_{3+} e^{m_{3+}(x-x_{\mathrm{II}})};
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

В отличие от однородных распределений невозмущенных гидродинамических величин здесь существуют стационарные распределения T и c:

$$
\begin{aligned}
&\bar{T}_1 = \bar{T}_{-\infty} + (\bar{T}_{\mathrm{I}} - \bar{T}_{-\infty})\, e^{\bar{m}_1(x+d)}, \\
&\bar{T}_2 = \bar{T}_{\mathrm{II}} - (\bar{T}_{\mathrm{II}} - \bar{T}_{\mathrm{I}})\, \frac{1 - e^{\bar{m}_2 x}}{1 - e^{-\bar{m}_2 d}}, \\
&\bar{T}_3 = \bar{T}_{\mathrm{II}} = \bar{T}_{\infty}; \\
&\bar{c}_1 = \bar{c}_{-\infty} = \bar{c}_{\mathrm{I}-0}, \\
&\bar{c}_2 = \bar{c}_{-\infty}\left(1 - e^{\bar{n}_2 x}\right), \\
&\bar{c}_3 = 0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $\bar{m}_\alpha = (u/\chi)_\alpha$; $\bar{n}_2 = u_2/D_2$; $\chi = \varkappa/(\rho c_p)$ — температуропроводность; D — коэффициент диффузии; черточки означают стационарные значения. Распределения (2.2) получаются из решения стационарных уравнений теплопроводности и диффузии при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&\bar{T}_1(-\infty) = \bar{T}_{-\infty}, \quad \bar{T}_1(-d) = \bar{T}_2(-d) = \bar{T}_{\mathrm{I}}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{T}_2(0) = \bar{T}_{\mathrm{II}}; \\
&\bar{c}_2(-d) = \bar{c}_{\mathrm{I}+0}, \quad \bar{c}_2(0) = 0; \\
&j\bar{c}_{\mathrm{I}-0} = j\bar{c}_{\mathrm{I}+0} - \rho_2 D_2 \left.\frac{d\bar{c}_2}{dx}\right|_{\mathrm{I}}; \\
&(\varkappa_2 \cdot d\bar{T}_2/dx - \varkappa_1 \cdot d\bar{T}_1/dx)_{\mathrm{I}} = jr, \\
&(\varkappa_2 \cdot d\bar{T}_2/dx + q\rho_2 D_2 d\bar{c}_2/dx)_{\mathrm{II}} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где r — удельная теплота испарения; q — удельный тепловой эффект реакции горения. Величины в (2.2), (2.3) связаны законом сохранения энергии

$$c_{p_1}(\bar{T}_{\mathrm{I}}-\bar{T}_{-\infty})+r+c_{p_2}(\bar{T}_{\mathrm{II}}-\bar{T}_{\mathrm{I}})=\frac{q\bar{c}_{\mathrm{I}+0}}{1-e^{-n_2 d}}=q\bar{c}_{-\infty}.$$

Из возмущенных уравнений теплопроводности и диффузии

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial}{\partial x}-\chi_\alpha\Delta\right)T'_\alpha=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2\frac{\partial}{\partial x}-D_2\Delta\right)c'_2=0 \qquad (2.4)$$

ввиду (2.1) следуют дисперсионные уравнения

$$z_\alpha+w_{\alpha t}=\lambda_{\alpha t}/2\,(w_{\alpha t}^2-1),\quad z_2+w_{2c}=\lambda_{2c}/2\,(w_{2c}^2-1), \qquad (2.5)$$

где $\omega_{\alpha t}=m_\alpha/k$; $\omega_{2c}=n_2/k$; $\lambda_{\alpha t}=2\chi_\alpha k/u_\alpha$; $\lambda_{2c}=2D_2k/u_2$.

На поверхностях разрывов выполняются граничные условия: непрерывность температуры

$$\delta T_{1\mathrm{I}}=\delta T_{2\mathrm{I}},\quad \delta T_{2\mathrm{II}}=\delta T_{3\mathrm{II}}; \qquad (2.6)$$

непрерывность концентрации

$$\delta c_{\mathrm{II}}=0; \qquad (2.7)$$

непрерывность потока массы

$$\delta j_{\mathrm{I}}(\bar{c}_{\mathrm{I}-0}-\bar{c}_{\mathrm{I}+0})=\left(j\delta c_2-\rho_2D_2\frac{\partial\delta c_2}{\partial x}\right)_{\mathrm{I}}; \qquad (2.8)$$

непрерывность потоков энергии

$$\begin{gathered}\left(\varkappa_2\frac{\partial\delta T_2}{\partial x}-\varkappa_1\frac{\partial\delta T_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{I}}=\delta j_{\mathrm{I}}r,\\ \left(\varkappa_2\frac{\partial\delta T_2}{\partial x}+q\rho_2D_2\frac{\partial\delta c_2}{\partial x}\right)_{\mathrm{II}}=\varkappa_3\frac{\partial\delta T_3}{\partial x}\bigg|_{\mathrm{II}}.\end{gathered} \qquad (2.9)$$

Вариации T и c на разрывах содержат возмущения формы вида

$$\delta\varphi_{\alpha\mathrm{I,II}}=\varphi'_\alpha+\frac{d\bar{\varphi}_\alpha}{dx}\delta\zeta_{\mathrm{I,II}},\quad \frac{\partial\delta\varphi_{\alpha\mathrm{I,II}}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi'_\alpha}{\partial x}+\frac{d^2\bar{\varphi}_\alpha}{dx^2}\delta\zeta_{\mathrm{I,II}}.$$

Поставленная задача содержит 9 возмущений (6 возмущений сред +2 возмущения фронтов +1 возмущение нормального потока массы на фронте испарения) и 6 граничных условий (2.6)—(2.9). Привлекая уравнение кинетики испарения (см., например, [6])

$$j_{\mathrm{I}}=\frac{1}{w_\infty}(p_\infty-p),$$

где $p_\infty\sim e^{-\mu r/R\bar{T}_{\mathrm{I}}}$ — давление насыщенного пара; $w_\infty\sim\sqrt{\bar{T}_{\mathrm{I}}}$ — тепловая скорость, получим ввиду несжимаемости среды (δp мало) основную часть изменения j_{I}

$$\delta j_{\mathrm{I}}/j=\mu r/R\bar{T}_{\mathrm{I}}\cdot\delta T_{\mathrm{I}}/T_{\mathrm{I}}\equiv\varepsilon_{\mathrm{I}}\cdot\delta T_{\mathrm{I}}/T_{\mathrm{I}}, \qquad (2.10)$$

где μ — молекулярный вес; R — газовая постоянная. Совокупность условий (2.6)—(2.10) позволяет получить два характеристических уравнения, и их можно представить как связи между $\delta T_{\mathrm{I,II}}$ и $\delta\zeta_{\mathrm{I,II}}$.

Последним условием, замыкающим объединенную гидро-диффузионно-тепловую задачу, является уравнение кинетики горения $j_{II} \sim \sim e^{-E/2R\overline{T}_{II}}$ [3], вариация которого дает

$$\delta j_{II}/j = E/2R\overline{T}_{II} \cdot \delta T_{II}/\overline{T}_{II} = \varepsilon_{II} \cdot \delta T_{II}/\overline{T}_{II}, \tag{2.11}$$

где E — энергия активации.

Искомые характеристики уравнения диффузионно-тепловой задачи имеют вид

$$(m_{2+} - m_{2-})\,\delta G_{II-} + e^{m_{2+}d}\left(m_{2-}\delta G_{I+} - \overline{m}_2 \delta G'_{I+}\right) - \\ - e^{m_{2-}d}\left(m_{2+}\delta G_{I+} - \overline{m}_2\delta G'_{I+}\right) = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{\delta_t}\left\{m_{2+}m_{2-}\left[e^{(m_{2+}-m_{2-})d} - 1\right]\delta G_{II-} - (m_{2+} - m_{2-})\,\overline{m}_2 e^{m_{2+}d}\delta G'_{I+}\right\} + \\ + \frac{1}{\delta_c}\left\{\left[n_{2+}\left(n_{2-} - \overline{n}_2\right)e^{(n_{2+}-n_{2-})d} - n_{2-}\left(n_{2+} - \overline{n}_2\right)\right]\delta H_{II-} - \\ - (n_{2+} - n_{2-})\,\overline{n}_2 e^{n_{2+}d}\delta H'_{I+}\right\} + \left[\frac{m_{3+}}{\overline{m}_2}c_{p_3}\delta T_{II} + q\overline{c}_{-\infty}\left(\overline{m}_2 - \overline{l}_2\right)\delta\zeta_{II}\right] = 0, \tag{2.13}$$

где $(\Delta T_I = T_I - T_{-\infty})$

$$\delta G_{I+} = c_{p_2}\delta T_I - e^{-\overline{m}_2 d}\delta H_{I+};$$

$$\delta G_{II-} = c_{p_2}\delta T_{II} - \delta H_{II-};$$

$$\delta H_{I+} = q\overline{c}_{-\infty}\overline{m}_2\delta\zeta_I;$$

$$\delta H_{II-} = q\overline{c}_{-\infty}\overline{m}_2\delta\zeta_{II};$$

$$\delta G'_{I+} = \left(c_{p_1}\overline{T}_I\frac{m_{1-}}{\overline{m}_1} + r\varepsilon_I\right)\frac{\delta T_I}{\overline{T}_I} - \left[c_{p_1}\Delta\overline{T}_I(m_{1-} - \overline{m}_1) + q\overline{c}_{-\infty}e^{-\overline{m}_2 d}\overline{m}_2\right]\delta\zeta_I;$$

$$\delta H'_{I+} = -\,qc_{-\infty}e^{-\overline{m}_2 d}\varepsilon_I\delta T_I/\overline{T}_I;$$

$$\delta_t = \overline{m}_2\left[m_{2-}e^{(m_{2+}-m_{2-})d} - m_{2+}\right];$$

$$\delta_c = \overline{n}_2\left[(n_{2-} - \overline{n}_2)\,e^{(n_{2+}-n_{2-})d} - (n_{2+} - \overline{n}_2)\right].$$

При $kd \to 0$ из (2.12), (2.13) получается характеристическое уравнение

$$\left[(c_{p_1}m_{1-}/\overline{m}_1 - c_{p_2}) + \varepsilon_I\left(r - q\overline{c}_{-\infty}\right)/\overline{T}_I\right]\delta T_I + \\ + \left(c_{p_2} - c_{p_3}m_{3+}/\overline{m}_3\right)\delta T_{II} = c_{p_1}\Delta\overline{T}_I\left(m_{1-} - \overline{m}_1\right)\delta\zeta_I,$$

и предельное условие

$$\delta G_{I+} = \delta G_{II-}.$$

При $kd \to \infty$ из (2.12) получается предельное уравнение тепловой, а из (2.13) — диффузионно-тепловой задачи [3], где возможна стабилизация.

3. Гидротепловая задача. Система характеристических уравнений (1.9), (1.10) относительно $\delta j_{I,II}$ и $\delta\zeta_{I,II}$ и (2.12), (2.13) относительно $\delta T_{I,II}$ и $\delta\zeta_{I,II}$ вместе с кинетическими соотношениями (2.10), (2.11) является замкнутой. Поскольку эта система слишком сложна для анализа, ограничимся длинноволновым приближением ($kd \ll 1$). В этой ситуации диффузионно-тепловые процессы, «зажатые» в узкой переходной зоне, несущественны, и влияние тепловой природы разрывов определяется кинетическими соотношениями (2.10), (2.11) и распространением тепла в средах *1* и *3*. С помощью (2.10), (2.11) величины $\delta j_{\mathrm{I,II}}$ выражаются через $\delta T_{\mathrm{I,II}}$, а из предельных условий (1.12), (2.15) $\delta T_{\mathrm{I,II}}$ выражаются через $\delta\Delta\zeta = \delta\zeta_{\mathrm{II}} = \delta\zeta_{\mathrm{I}}$. Получающаяся гидротепловая задача определяется характеристическими уравнениями (1.11), (2.14), содержащими $\delta\Delta\zeta$ и $\delta\zeta_{\mathrm{I}}$.

Существенно, что рассматриваемая предельная задача не может быть исследована в рамках однофронтового приближения из-за неопределенности вариации разрыва T на фронте. С другой стороны, поскольку взаимное влияние движения среды и распространения тепла имеет место только в промежуточной зоне, в предельной ситуации слившихся фронтов неучет этого обстоятельства, принятый в данной работе, является обоснованным.

Искомое уравнение при обычных условиях $\varepsilon_{\mathrm{I,II}} \gg 1$ [3, 6] и $c_{p_1} = c_{p_2}$ имеет вид

$$(1+\mu) z_1^2 + 2\left[(\lambda_{1r}+1) - \frac{\lambda_{1r}+2}{w_{1r-}+1}\right] z_1 + (1 - 1/\mu) +$$
$$+ \frac{1}{u_1^2 k}\left[k^2\sigma/\rho_1 + (1-\mu) g\right] + 2\tau\left(z_1 + 1/\mu + \lambda_{1r} - \frac{\lambda_{1r}+2}{w_{1r-}+1}\right) w_{1t+} = 0, \quad (3.1)$$

где $\tau = (T_{\mathrm{I}} - T_{-\infty})/(T_{\mathrm{II}} - T_{-\infty}) < 1$.
По сравнению с (1.13) здесь появился дополнительный член, учитывающий распространение тепла в жидкости, но не зависящий от кинетических процессов ($\varepsilon_{\mathrm{I,II}}$). Покажем, что в частной ситуации ($\lambda_1 r = \sigma = g = 0$) разрыв не стабилизируется.

Отвлекаясь от индексов, имеем уравнение

$$(1+\mu) z^2 + 2z + (1 - 1/\mu) + 2\tau (z + 1/\mu) w = 0. \quad (3.2)$$

Используя представления z и w, получим

$$u = (1-\nu)/\lambda < 0, \qquad v = -y/\nu,$$

где $\nu > 1$ и определяется как и выше. При $y = 0$ (3.2) имеет вид

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.3)$$

с $a_2 > 0$, $a_0 < 0$, что означает неустойчивость. При $y \neq 0$ мнимая часть (3.2) дает выражение для x. Предположение $x \leqslant 0$ дает неравенство для τ, использование которого приводит к тому, что действительная часть (3.2) не удовлетворяется. Это означает, что при $y \neq 0$ не существует корней $x \leqslant 0$.

Таким образом, можно сделать вывод, что учет тепловой природы рассматриваемого гидродинамического разрыва уменьшает область его устойчивости. Этот результат подтверждается видом приближенного ($\tau \ll 1$) достаточного критерия устойчивости, аналогичного [1],

$$\frac{j^L}{4\sigma g \rho_1 \rho_3^2} \lesssim 1 - 4\tau \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1+\lambda^2}}, \quad (3.4)$$

который соответствует границе с $z_1 = 0$ и получается из (3.1).

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Условие корректности граничного соотношения (1.8) на фронте горения вида $\delta_{\mathrm{ch}}/\sqrt{\nu\tau_{\mathrm{ch}}} \ll 1$ (где δ_{ch} — ширина зоны химической реакции, τ_{ch} — соответствующее пролетное время) можно получить из оценок типа [7]:

$$\delta_r \sim u\tau_r \sim \nu/u, \quad \delta_t \sim u\tau_t \sim \chi u,$$
$$\delta_{\rm ch} \sim u\tau_{\rm ch} \sim \chi/u \cdot RT_{\rm ch}/E,$$

где $\delta_{r,t}$ — ширина вязкой и тепловой зон соответственно. Отсюда следует

$$\delta_{\rm ch}/\delta_r \sim \tau_{\rm ch}/\tau_r \sim 1/{\rm Pr}\cdot RT_{\rm ch}/E, \quad \delta_{\rm ch}/\delta_t \sim \tau_{\rm ch}/\tau_t \sim RT_{\rm ch}/E,$$
$$\delta_{\rm ch}/\sqrt{\nu\tau_{\rm ch}} \sim \sqrt{\tau_{\rm ch}/\tau_r} \sim \sqrt{1/{\rm Pr}\cdot RT_{\rm ch}/E},$$

где ${\rm Pr}=\nu/\chi$ — число Прандтля. Таким образом, при обычно выполняющемся неравенстве $RT_{\rm ch}/E \ll 1$ зону химической реакции можно рассматривать как поверхность, на которой непрерывны все величины (в том числе и касательное напряжение).

2. Использованное в работе неравенство $\nu > 1$ в соотношениях $u_{\mp}=(1\pm\nu)/\lambda$ означает условие эволюционности [8], не допускающее лишних возмущений.

3. Вид вторых характеристических уравнений (1.10), (2.13), дающих при $kd\to\infty$ переходы 2—3, неоднозначен. Например, можно получить еще два вида уравнения (2.13). Отличие между всеми этими представлениями заключается в различии предельных переходов при $kd\to 0, \infty$. Причина неоднозначности сводится к различным способам определения $\hat{T}'_{2\pm}$ из (2.6), (2.9) при решении диффузионной части задачи из остальных граничных условий. Приведенные здесь системы уравнений (1.9), (1.10) и (2.12), (2.13) дают по 4 разных предельных перехода.

Поступила в редакцию
29/V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1944, **14**, 6.
2. В. Г. Левич. Докл. АН СССР, 1956, **109**, 5.
3. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4.
4. В. И. Ягодкин. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, 7.
5. Нестационарное распространение пламени. Под ред. Д. Г. Маркштейна. М., «Мир», 1968.
6. Б. Дельмон. Кинетика гетерогенных реакций. М., «Мир», 1972.
7. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, 22, 1.
8. И. М. Гельфанд. УМН, 1959, **14**, 2.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВИБРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ СМЕСИ В МОДЕЛЬНОЙ КАМЕРЕ

А. В. Прохоров, В. И. Фурлетов

(Москва)

Экспериментальное исследование механизма неустойчивого горения в камерах сгорания затруднено из-за сложных условий горения. В связи с этим в ряде работ выполнено исследование на моделях в упрощенных условиях турбулентного горения однородной смеси [1, 2]. При горении однородной смеси сохраняется основная причина неустой-