УДК 539.3+539.219.2

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ УПРУГОГО КОМПОЗИТА

С. К. Канаун

(Ленинград)

Работа посвящена вычислению эффективных упругих свойств среды, содержащей случайное поле эллипсоидальных неоднородностей. Предполагается, что центры включений (неоднородностей) образуют случайную пространственную решетку, т. е. рассматриваемое поле неоднородностей является сильно коррелированным.

Взаимодействие между неоднородностями учитывается в рамках приближения самосогласованного поля. При этом оказывается, что симметрия тензора упругих свойств среды определяется симметрией упругих свойств матрицы включений, а также симметрией пространственной решетки, образованной математическими ожиданиями центров включений.

Построение тензора эффективных упругих свойств среды, содержащей случайное поле неоднородностей, связано с решением задачи о взаимодействии многих частиц. Метод самосогласованного поля является одним из распространенных приемов решения подобных задач. Можно указать целый ряд работ, в которых этот метод использовался для определения эффективных свойств различных неоднородных сред: поликристаллических [1, 2], композитных [3], в задачах о распространении волн в средах с дефектами [4, 5]. В работе [6] соображения самосогласованного поля используются для построения процедуры последовательных приближений, когда решение задачи уточняется на каждом шаге итеративного процесса. Существенным ограничением предлагаемой схемы применения метода самосогласованного поля, одинаковой, по существу, для всех перечисленных работ, является невозможность рассмотрения сильно коррелированных полей неоднородностей. Предположение о равномерном распределении дефектов или о слабой корреляционной связи между удаленными точками для случайного поля упругих свойств всегда принимается здесь как центральное.

В работах [7—9] рассматриваемая задача исследовалась методами теории случайных функций. Если масштабом корреляции случайного поля неоднородностей пренебречь нельзя, применение этих методов также не дает обозримых результатов. Строгое и относительно простое решение удается получить лишь в предположении о «сильной изотропии» среды, что сразу исключает случай регулярно расположенных неоднородностей [7].

В данной работе использование соображений самосогласованного поля позволяет при статистическом усреднении ограничиться лишь двухточечными корреляционными функциями, что дает возможность получить решение в (замкнутом виде) и для сильно коррелированных полей неоднородностей. Рассматривается среда, в которой поле эллипсоидальных неоднородностей образует случайную пространственную решетку. Для малой концентрации включений, когда их взаимодействием можно пренебречь, полученное решение совпадает с решением Хилла [3]. При учете взаимодействия в первом приближении симметрия тензора эффективных упругих свойств среды оказывается зависящей не только от симметрии тензоров упругих свойств матрицы и включений, но и от симметрии решетки, образованной включениями.

1. Как известно, метод самосогласованного поля базируется на решении задачи об изолированной частице, находящейся в произвольном внешнем поле. Поэтому обратимся вначале к рассмотрению одиночной эллипсоидальной неоднородности в неограниченной однородной упругой среде.

Пусть $\mathbf{L}_0$ — постоянный тензор упругих модулей основной среды; $\mathbf{L}_0+\mathbf{L}_1$ — то же для эллипсоидальной неоднородности, занимающей область V, характеристическая функция которой $\Theta(s)$ (s — точка среды с радиусом-вектором $\mathbf{r}$; $\Theta(s)=1$ при $s \in V$ и $\Theta(s)=0$ при $s \overline{\in} V$). Через $\varepsilon_0(\sigma_0)$ обозначим непрерывное внешнее поле деформаций (напряжений), которое существовало бы при $\mathbf{L}_1=0$.

Поле вектора перемещений $\mathbf{u}$ в среде с включением представим в виде

$$(1.1)\qquad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1,\quad \mathbf{u}_1(s)=-\int \nabla U(s', s)\cdot \mathbf{L}_0 \cdot \mu(s')\,\Theta(s')\,dV',$$

где $\mathbf{u}_0$ — перемещения, соответствующие внешнему полю; $\mathbf{u}_1$ — возмущение, вызванное неоднородностью; $\mathbf{U}(s', s)$ — тензор Грина основной среды; $\mu(s)$, используя результаты континуальной теории дислокаций [10], можно трактовать как плотность индуцированных внешним полем в области V дислокационных моментов, которыми моделируется неоднородность; точкой обозначено свертывание тензоров по двум индексам.

Выбор решения в форме (1.1) автоматически удовлетворяет условиям на бесконечности. Применяя оператор $\nabla\cdot(\mathbf{L}_0\cdot\nabla)$ к векторному полю $\mathbf{u}$ и используя свойства тензора Грина, получим

$$(1.2)\qquad \nabla\cdot(\mathbf{L}_0\cdot\nabla\mathbf{u})=\nabla\cdot(\mathbf{L}_0\cdot\mu\Theta).$$

Поэтому, если $\mu=-\mathbf{G}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\nabla\mathbf{u}$; $(\mathbf{G}_0=\mathbf{L}_0^{-1})$, то вектор $\mathbf{u}$ (1.1) есть решение задачи об эллипсоидальной неоднородности в неограниченной упругой анизотропной среде *. Подставляя (1.2) в выражение (1.1) для $\mathbf{u}_1$ и взяв затем оператор def (симметризованный градиент) от обеих частей, придем к уравнению для тензорного поля $\varepsilon_1=\operatorname{def}\mathbf{u}_1$:

$$(1.3)\qquad \varepsilon_1(\mathbf{r})+\int \mathbf{K}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{L}_1\cdot\varepsilon_1(\mathbf{r}')\,\Theta(\mathbf{r}')\,dV'=-\int \mathbf{K}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{L}_1\cdot\varepsilon_0\times \\ \times(\mathbf{r}')\,\Theta(\mathbf{r}')\,dV'.$$

Компоненты тензора $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$) имеют вид: $K_{ijkl}(\mathbf{R})=-[\nabla_k\nabla_l U_{ij}(\mathbf{R})]_{(ik)(jl)}$, $\mathbf{R}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$ (круглые скобки указывают на симметризацию по соответствующим индексам).

Ядро $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ интегрального оператора, входящего в уравнение (1.3), выражается через вторые производные тензора Грина $\mathbf{U}$. На непрерывных тензор-функциях $\mathbf{\Phi}$ таких, что

$$\int\limits_{|\mathbf{R}|>1} \mathbf{K}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}')\,dV'<\infty,$$

этот оператор может быть определен следующей формулой [11, 12]:

$$(1.4)\qquad \int \mathbf{K}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}')\,dV'=\int \mathbf{K}(\mathbf{C}^{-1}\xi-\mathbf{r})\cdot\mathbf{\Phi}(\mathbf{C}^{-1}\xi)\,|\mathbf{C}^{-1}|\,dV_\xi+ \\ +\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}),\quad \xi=\mathbf{C}\mathbf{r}',\quad |\mathbf{C}^{-1}|=\det\mathbf{C}^{-1}.$$

* Тензор μ определен с точностью до слагаемого μ_0, при котором $\nabla\cdot(\mathbf{L}_0\,\mu_0)=0$. Трактовка μ как плотности дислокационных моментов вместе с условиями $\varepsilon=(\mathbf{L}_0+\mathbf{L}_1)\cdot\sigma$ при $s\in V$ и $\varepsilon=\mathbf{L}_0\cdot\sigma$ при $s\overline{\in} V$ дает равенство $\mu_0=0$.

Здесь $\mathbf{C}$ — тензор аффинного преобразования, переводящего область V в единичный шар. Постоянный тензор $\mathbf{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(\Gamma_1)} \widetilde{\mathbf{K}}\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{k}\right) d\Gamma, \tag{1.5}$$

где $\widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$ — преобразование фурье-ядра $\mathbf{K}(\mathbf{R})$, а Γ_1 — поверхность единичной сферы в $\mathbf{k}$-пространстве. Интеграл в первой части (1.4) понимается в смысле главного значения по Коши.

Трактовка векторного потенциала $\mathbf{u}_1$ как смещений от некоторого распределения дислокационных моментов позволяет определить оператор с ядром $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ на постоянных двухвалентных тензорах $\mathbf{\Phi}_0$.

Действительно, формально расходящемуся при $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{R}\to\infty$ ($\mathrm{R}=|\mathbf{R}|$) интегралу

$$\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{\Phi}_0 dV' = -\operatorname{def} \int \nabla \mathbf{U}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{\Phi}_0 dV' \tag{1.6}$$

можно придать смысл, рассматривая его как выражение для полной деформации среды при наличии в ней поля дислокационных моментов постоянной плотности $\mu = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{\Phi}_0$. Такое распределение дислокационных моментов вызывает деформацию, «пластическая» часть которой совпадает с симметричной частью тензора μ [10, 13]. Если деформация не стеснена на бесконечности, а этот случай и будет интересовать нас в дальнейшем, то внутренние напряжения в среде при этом отсутствуют, и полная деформация совпадает с «пластической». Это дает возможность определить регуляризацию интеграла (1.6) формулой

$$\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{\Phi}_0 dV = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{\Phi}_0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.4) было получено в работе [12], где использовалось для доказательства следующей теоремы о полиноминальной консервативности. Если внешнее поле ε_0 есть полином степени m в окрестности эллипсоидального включения, то и поле ε внутри включения — полином степени m. В частности, если поле ε_0 однородное (постоянное), то поле ε_1 тоже однородное и имеет вид [12]

$$\varepsilon_1 = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \varepsilon_0; \quad \mathbf{\Lambda} = -\mathbf{A} \cdot [\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{A}, \tag{1.8}$$

где тензор $\mathbf{A}$ определен выражением (1.5).

2. Рассмотрим теперь случайное (однородное и эргодичное) поле эллипсоидальных неоднородностей в бесконечной однородной упругой среде. Пусть $\Theta(s)$ — характеристическая функция области V, занятой включениями какой-либо конкретной реализации. Аналогично предыдущему решение будем искать в форме (1.1), где $\mathbf{u}_1$ — возмущение, вызванное наличием неоднородностей. Тогда для тензорного поля $\varepsilon_1 = \operatorname{def} \mathbf{u}_1$ получим уравнение, совпадающее по виду с (1.3), где под $\Theta(s)$ понимается характеристическая функция области V, занятой включениями. Тензор $\mathbf{L}_1$ теперь зависит от точки s, поскольку в общем случае будет различным для различных включений. Как отмечалось в [12], (1.3) — уравнение для ε_1 внутри области V.

В область $\overline{V}$ (дополнение V до всего пространства) решение продолжается при известном ε_1 внутри V единственным образом. Для поля ε_1 внутри V имеем уравнение

$$\Theta(s)\,\boldsymbol{\varepsilon}_1(s)+\int \mathbf{K}(s',s)\cdot \mathbf{L}_1(s')\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1(s')\,\Theta(s')\,\Theta(s)\,dV' = -\int \mathbf{K}(s',s)\cdot \mathbf{L}_1(s')\,\boldsymbol{\varepsilon}_0(s')\,\Theta(s')\,\Theta(s)\,dV'. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) является отправным для построения решения задачи — среднего по ансамблю реализаций случайного поля включений. Такое решение получим в рамках приближения самосогласованного поля. Это означает, что каждое из включений любой конкретной реализации будет рассматриваться как изолированное в некотором эквивалентном внешнем поле $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, которое складывается из внешнего поля $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, предполагаемого далее однородным, и поля, наведенного окружающими включениями.

Заметим, что поле $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ необязательно выбирать однородным. Если концентрация включений мала, так что в пределах объема, занятого типичным включением, поле от всех окружающих неоднородностей меняется незначительно, можно считать $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ постоянным тензором. Принимая это предположение, на основании (1.8) получаем, что в рамках приближения самосогласованного поля $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ внутри любого включения имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{L}_1$ — случайные тензоры.

Уравнение для поля $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ получим, подставляя (2.2) в (2.1) и осредняя результат по ансамблю реализаций случайного поля включений

$$\Big[\langle\Theta(s)\,\boldsymbol{\Lambda}(s)\cdot\mathbf{L}_1(s)\rangle+\int \mathbf{K}(s',s)\cdot\langle\mathbf{L}_1(s')\cdot\boldsymbol{\Lambda}(s')\cdot\mathbf{L}_1(s')\times \times\Theta(s')\,\Theta(s)\rangle\,dV'\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\int \mathbf{K}(s',s)\cdot\langle\mathbf{L}_1(s')\,\Theta(s')\,\Theta(s)\rangle\,dV'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0. \tag{2.3}$$

Угловые скобки означают операцию указанного осреднения. Для построения средних, входящих в уравнение (2.3), необходимо задаться конкретной моделью случайного поля включений в среде. Рассмотрим одну из возможных моделей. Пусть центры включений занимают узлы случайной пространственной решетки. Элементарную ячейку (ячейку Бравэ) этой решетки зададим тройкой случайных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Множество узлов решетки свяжем со множеством троек целочисленных индексов $(k,\ l,\ m)$, определив вектор $\mathbf{r}_{klm}$ узла соотношением

$$\mathbf{r}_{klm}=\operatorname{sign}k\sum_{i=1}^{|k|}\mathbf{a}_1^{(i)}+\operatorname{sign}l\sum_{i=1}^{|l|}\mathbf{a}_2^{(i)}+\operatorname{sign}m\sum_{i=1}^{|m|}\mathbf{a}_3^{(i)} \tag{2.4}$$

$$(k,l,m=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty).$$

Здесь все векторы $\mathbf{a}_j^{(i)}$— независимые случайные величины с известными функциями распределения φ_j $(j=1,\ 2,\ 3)$. Узлы решетки служат центрами включений эллипсоидальной формы со случайными значениями полуосей c_1, c_2, c_3 и случайной ориентацией, которую при фиксированном базисе определяет ортогональный тензор $\mathbf{Q}$. Упругие свойства включений задаются случайным тензором $\mathbf{L}_1$. Совместные функции распределения всех указанных величин будем считать известными. Для описанного поля включений необходимо построить средние, входящие в (2.3) *:

* Построение подобных средних является одной из задач, рассматриваемых в геометрической теории вероятности. Основные принципы изложены в [14]. Ряд результатов для одномерного случая получен в [15].

$$\Psi^{(1)}(s', s) = \langle \mathbf{L}_1(s') \cdot \mathbf{\Lambda}(s') \cdot \mathbf{L}_1(s') \Theta(s') \Theta(s) \rangle; \tag{2.5}$$
$$\Psi^{(2)}(s', s) = \langle \mathbf{L}_1(s') \Theta(s') \Theta(s) \rangle; \quad \Psi^{(3)} = \langle \mathbf{\Lambda}(s) \cdot \mathbf{L}_1(s) \Theta(s) \rangle.$$

Следуя методу, используемому в [15], временно будем считать точку s' случайной, равномерно распределенной во всем пространстве. Введем для случайной точки обозначение s_*'. В силу эргодичности средние (2.5) по ансамблю реализаций случайного поля включений равны средним по всевозможным положениям точки s_*', если $\Theta(s)$ есть фиксированная типичная реализация этого поля. Пусть Θ_{kpm} — характеристическая функция включения, центр которого расположен в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_{kpm}$.

Тогда

$$\Theta(s) = \sum_{k,p,m=-\infty}^{\infty} \Theta_{kpm}(s). \tag{2.6}$$

Допустимо считать, что эллипсоид, внутри которого оказалась точка s_*', имеет индексы 000. Размеры и ориентация эллипсоида Θ_{000} — случайные величины, распределение которых совпадает с ансамблевыми. Рассмотрим среднее $\Psi^{(1)}(s', s)$ в (2.5). Подставляя (2.6) в выражении для $\Psi^{(1)}(s', s)$, получим

$$\Psi^{(1)}(s', s) = \sum_{k,p,m=-\infty}^{\infty} \Psi^{(1)}_{kpm}(s', s) = \sum_{k,p,m=-\infty}^{\infty} \langle \Theta_{000}(s_*') \Theta_{kpm}(s) \times \\ \times \mathbf{L}_1(s_*') \cdot \mathbf{\Lambda}(s_*') \cdot \mathbf{L}_1(s_*') \rangle. \tag{2.7}$$

(Вектор $\mathbf{R}$, соединяющий точки s_*' и s, фиксирован).

Рассмотрим слагаемое в (2.7), соответствующее $k=p=m=0$

$$\Psi^{(1)}_{000} = \langle \Theta_{000}(s_*') \cdot \Theta_{000}(s) \mathbf{L}_1(s_*') \cdot \mathbf{\Lambda}(s_*') \cdot \mathbf{L}_1(s_*') \rangle, \tag{2.8}$$

$\Psi^{(1)}_{000}$ — среднее по всем положениям точки s_*', когда s_*' и s оказываются внутри одного включения. Среднее (2.8) можно представить в виде

$$\Psi^{(1)}_{000} = \left\langle \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 \frac{1}{V_0} J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q}) \right\rangle, \tag{2.9}$$

где $J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q})$ — объем внутри эллипсоидальной области, занятой включением (с полуосями c_1, c_2, c_3 и ориентацией $\mathbf{Q}$), попадание в которую точки s_*' гарантирует попадание точки s в тот же эллипсоид; V_0 — средний объем, приходящийся на одно включение. Аффинным преобразованием $\mathbf{C}(\xi = \mathbf{CR})$, переводящим данный эллипсоид в единичный шар, функция $J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q})$ переводится в сферически симметричную

$$J(\mathbf{C}^{-1}\xi) = J'(|\xi|). \tag{2.10}$$

Очевидно, что

$$J(0, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q}) = v_c,$$

где $v_c = \frac{4\pi}{3} c_1, c_2, c_3$ — объем эллипсоида с полуосями c_1, c_2, c_3.

Найдем теперь остальные слагаемые в сумме (2.7). Обозначим через Ω область, представляющую собой эллипсоид Θ_{kpm}, центр которого помещен в точку s. Пусть $\mathbf{r}'$ есть радиус-вектор точки s_*' относительно центра эллипсоида Θ_{000}. Тогда $\Psi^{(1)}_{kpm}(s', s)$ представляется в виде

$$\Psi^{(1)}_{kpm} = \left\langle \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 \frac{1}{V_0} \int \Theta_{000}(\mathbf{r}') dV' \right\rangle \left\langle \int\limits_{\Omega(\mathbf{r}'+R)} \gamma_{kpm}(\mathbf{r})\, dV \right\rangle, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{r}'+\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра области Ω; γ_{kpm} — функция распределения случайного вектора $\mathbf{r}_{kpm}$. Пусть дисперсия этой случайной величины велика по сравнению с размерами неоднородности, так что в пределах области, занятой типичным включением, $\gamma_{kpm}(\mathbf{r})$ меняется незначительно. Применяя теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{\Omega} \gamma_{kpm}(\mathbf{r})\, dV \simeq \gamma_{kpm}(\mathbf{r}' + \mathbf{R})\, v_c. \tag{2.12}$$

При малой концентрации включений $p = \frac{\langle v_c \rangle}{V_0}$ и малости дисперсии по сравнению с расстоянием между включениями можно считать, что *

$$\gamma_{kpm}(\mathbf{r}t+\mathbf{R}) \approx \gamma_{kpm}(\mathbf{R}). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12), (2.13) в (2.11), получим

$$\Psi^{(1)}_{kpm}(\mathbf{R}) = \gamma_{kpm}(\mathbf{R})\, p \langle \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 v_c \rangle. \tag{2.14}$$

С учетом (2.14) выражение для среднего $\Psi^{(1)}(s', s)$ (2.7) примет вид

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{R}) = \Psi^{(1)}_{000}(\mathbf{R}) + pS(\mathbf{R}) \langle \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 v_c \rangle, \text{ где} \tag{2.15}$$

$$S(\mathbf{R}) = \sum_{k,p,m=-\infty}^{\infty}{}' \gamma_{kpm}(\mathbf{R}). \tag{2.16}$$

Штрих над знаком суммы означает пропуск слагаемого $к=p=m=0$. Поскольку случайный вектор $\mathbf{r}_{kpm}$ (2.4) представляет собой сумму независимых случайных величин, характеристическая функция $\widetilde{\gamma}_{kpm}(\mathbf{k})$ этого вектора имеет вид

$$\widetilde{\gamma}_{kpm}(\mathbf{k}) = \widetilde{\varphi}_1^{|k|}(\operatorname{sign} k\mathbf{k})\, \widetilde{\varphi}_2^{|p|}(\operatorname{sign} p\mathbf{k})\, \widetilde{\varphi}_3^{|m|}(\operatorname{sign} m\mathbf{k}),$$

где $\widetilde{\varphi}_i(\mathbf{k})$ — характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{a}_i$. Переходя к функции распределения и подставляя результат в (2.16), после суммирования получим

$$S(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \widetilde{S}(\mathbf{k}) e^{(-i\mathbf{kR})}\, dV_k, \text{ где}$$

$$\widetilde{S}(\mathbf{k}) \prod_{i=1}^{3} \left\{ \frac{1 - \widetilde{\varphi}_i(\mathbf{k}) \widetilde{\varphi}_i(-\mathbf{k})}{[1 - \widetilde{\varphi}_i(\mathbf{k})][1 - \widetilde{\varphi}_i(-\mathbf{k})]} - 1 + \frac{(2\pi)^3}{V_0} \delta(\mathbf{k}). \right. \tag{2.17}$$

Здесь $\delta(\mathbf{k})$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $\mathbf{k}=0$.

В частности, если каждый из векторов $\mathbf{a}_i$ ячейки Бравэ, соответствующей решетке неоднородностей, распределен нормально с математи-

* Предположения (2.12), (2.13) эквивалентны также замене включений некоторыми эффективными диполями.

ческим ожиданием $\bar{\mathbf{a}}_i$ и одинаковой для всех векторов дисперсией σ, то $S(\mathbf{k})$ принимает вид

(2.18) $$S(\mathbf{k}) = [1 - \exp(-\sigma^2 k^2)] \prod_{i=1}^{3} \left[1 - 2\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)\cos(a_i k) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\sigma^2 k^2)\right]^{-1} - 1 + \frac{(2\pi)^3}{V_0}\delta(\mathbf{k}).$$

Аналогичным образом для средних $\Psi^{(2)}(s', s)$ и $\Psi^{(3)}$ в (2.5) получим

(2.19) $$\Psi^{(2)}(\mathbf{R}) = \Psi^{(2)}_{000}(\mathbf{R}) + pS(\mathbf{R})\langle v_c \mathbf{L}_1\rangle.$$

Здесь

(2.20) $$\Psi^{(2)}_{000}(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{L}_1 \frac{1}{V_0} J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q})\rangle;$$

(2.21) $$\Psi^{(3)} = \langle \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 \frac{v_c}{V_0}\rangle.$$

С учетом (2.15), (2.19) — (2.21) уравнение (2.3) для эквивалентного поля $\hat{\varepsilon}$ примет вид

(2.22) $$\left[\Psi^{(3)} + \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi^{(1)}_{000}(\mathbf{R})\, dV + p \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R})\, dV \cdot \langle \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 v_c\rangle\right] \cdot$$
$$\cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\left[\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi^{(2)}_{000}(\mathbf{R})\, dV + p \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R})\, dV \cdot \langle \mathbf{L}_1 v_c\rangle\right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

Вычислим входящие сюда интегралы. Из (2.9), (2.10) будем иметь

$$\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi^{(1)}_{000}(\mathbf{R})\, dV = \langle \frac{1}{V_0} \int \mathbf{K}\left(\mathbf{C}^{-1}\xi\right) J'\left(|\xi|\right) |\mathbf{C}^{-1}|\, dV_\xi \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1\rangle.$$

Используя регуляризацию (1.4), придем к соотношению

(2.23) $$\int \mathbf{K}(\mathbf{R})\, \Psi^{(1)}_{000}(\mathbf{R})\, dV = \langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1\rangle,$$

аналогично

(2.24) $$\int \mathbf{K}(\mathbf{R})\, \Psi^{(2)}_{000}(\mathbf{R})\, dV = \langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}_1\rangle.$$

При вычислении интеграла $\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R})\, dV$ заметим, что обратное преобразование фурье-члена с δ—функцией в выражении для $S(\mathbf{k})$ (2.17) дает постоянное слагаемое. Используя регуляризацию (1.6) и равенство Парсеваля, получим

(2.25) $$\int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R})\, dV = \frac{1}{V_0}(\mathbf{H} + \mathbf{G}_0), \text{ где}$$

(2.26) $$\mathbf{H} = \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \widetilde{S}(\mathbf{k})\, dV_k,$$

а интеграл в (2.26) понимается в смысле главного значения по Коши. Преобразование фурье-ядра $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ с точностью до операций симметрирования и перестановки равно $[\mathbf{k}\mathbf{L}_0\mathbf{k}]^{-1} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ ($\otimes$ — означает тензорное произведение). Поэтому группа симметрии тензора $\mathbf{H}$ есть пересечение группы симметрии тензора модулей упругости основной среды $\mathbf{L}_0$ и группы симметрии функции $\tilde{S}(\mathbf{k})$.

Последняя, как следует из (2.17), совпадает с группой симметрии пространственной решетки, являющейся математическим ожиданием рассматриваемой случайной решетки включений. Пусть основная среда (матрица) изотропна, а математическое ожидание решетки включений — простая кубическая решетка. Тогда компоненты тензора $\mathbf{H}$ (2.26) принимают вид

$$(2.27)\qquad H_{ijkl} = \frac{1}{2\mu}\Big[\Big(\beta_0 - 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\beta_1\Big)I_{ijkl} - 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(\beta_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta_2 B_{ijkl})\Big],$$

где λ и μ — параметры Ляме основной среды; $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}\delta_{lj})$ — единичный четырехвалентный тензор; $\mathbf{B}$ — четырехвалентный тензор, обладающий симметрией кубической решетки

$$\mathbf{B} = \frac{1}{a^4}\sum_{i=1}^{3}\Big(\overset{4}{\underset{1}{\otimes}}\Big)\bar{\mathbf{a}}_i,$$

$\Big(\overset{4}{\underset{1}{\otimes}}\Big)$ —означает четырехкратное тензорное умножение вектора на себя. Коэффициенты β_0, β_1, β_2 в (2.27) определяются равенствами:

$$\beta_0 = \frac{V_0}{3}\int S(\mathbf{k})\,dV;\ \beta_1 = \frac{1}{4}\Big[\frac{V_0}{3}\int\frac{k_1^4}{k^4}S(\mathbf{k})\,dV + \beta_0\Big];\quad \beta_2 = \beta_0 - 5\beta_1.$$

Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения. Для $S(\mathbf{k})$ в (2.18) β_0 и β_1 записываются в виде абсолютно сходящихся интегралов:

$$\beta_0 = \frac{1}{3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\Big(1 - \exp\Big(-\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\Big)\prod_{i=1}^{3}\Big(1 - 2\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\times$$
$$\times\cos z_i + \exp\Big(-\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\Big)^{-1} - 1\Big]dz_1dz_2dz_3;$$
$$\beta_1 = \frac{1}{12}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z_1^4}{z^4}\Big[\Big(1 - \exp\Big(-\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\Big)\prod_{i=1}^{3}\Big(1 - 2\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\times$$
$$\times\cos z_i + \exp\Big(-\frac{\sigma^2}{a^2}z^2\Big)\Big)^{-1} - 1\Big]\ dz_1dz_2dz_3 + \frac{1}{4}\beta_0;$$
$$\Big(z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\Big).$$

Подставляя теперь (2.21), (2.23), (2.24), (2.25) в (2.22) и разрешая полученное уравнение относительно тензора $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, будем иметь

$$(2.28)\qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

где

$$
\mathbf{D}=\left[\mathbf{I}-p\left\langle\frac{v_c}{V_0}\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}_1\right\rangle^{-1}\cdot\left\langle\frac{v_c}{V_0}(\mathbf{H}+\mathbf{G}_0)\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1\right\rangle\right]^{-1}\times \tag{2.29}
$$

$$
\times\left[\mathbf{I}-p\left\langle\frac{v_c}{V_0}\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}_1\right\rangle^{-1}\cdot\left\langle\frac{v_c}{V_0}(\mathbf{H}+\mathbf{G}_0)\cdot\mathbf{L}_1\right\rangle\right].
$$

Здесь использовано равенство $\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}_1$, проверяемое с помощью (1.7).

Соотношение (2.28) совместно с (2.2) позволяет, в рамках приближения самосогласованного поля, определить деформацию внутри произвольного включения при приложении к композитному материалу однородного внешнего поля $\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

3. Пусть $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$ — средняя по ансамблю реализаций случайного поля включений деформация среды при приложении внешнего поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}_0$. Тензор эффективной упругой податливости определяется соотношением

$$
\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle=\mathbf{G}_э\cdot\boldsymbol{\sigma}_0. \tag{3.1}
$$

В рамках приближения самосогласованного поля выражение для средней деформации среды найдем из (1.1), (1.3), (2.2), используя описанную выше процедуру усреднения и регуляризацию (1.7)

$$
\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle=\boldsymbol{\varepsilon}_0+\langle\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle=\boldsymbol{\varepsilon}_0-\int\mathbf{K}(\mathbf{R})\cdot\langle(\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}+\mathbf{L}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0)\times
$$

$$
\times\,\Theta(\mathbf{r}')\rangle\,dV'=\boldsymbol{\varepsilon}_0-\mathbf{G}_0\cdot\left\langle\frac{v_c}{V_0}(\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}+\mathbf{L}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0)\right\rangle.
$$

Подставляя сюда (2.28) с учетом равенства $\boldsymbol{\varepsilon}_0=\mathbf{G}_0\boldsymbol{\sigma}_0$ и сравнивая результат с (3.1), придем к следующему выражению для тензора эффективной упругой податливости $\mathbf{G}_э$:

$$
\mathbf{G}_э=\mathbf{G}_0-\mathbf{G}_0\cdot<\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{D}+\mathbf{L}_1>\cdot\mathbf{G}_0,
$$

где тензор $\mathbf{D}$ имеет вид (2.29).

Пусть все включения имеют одинаковые размеры, ориентацию и упругие свойства. Ограничиваясь первыми тремя членами разложения $\mathbf{G}$ в ряд по концентрации включений p, получим

$$
\mathbf{G}_э=\mathbf{G}_0-p\mathbf{G}_0\cdot(\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_1)\cdot\mathbf{G}_0-p^2\mathbf{G}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{H}+\mathbf{G}_0)\times \tag{3.2}
$$

$$
\times(\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{L}_1-\mathbf{L}_1)\cdot\mathbf{G}_0,
$$

где тензор $\mathbf{H}$ определяется соотношением (2.26).

При малой концентрации неоднородностей третьим слагаемым в (3.2) можно пренебречь, что соответствует отсутствию взаимодействия между включениями ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\varepsilon}_0$). При этом, с точностью до обозначений, выражение для $\mathbf{G}_э$ совпадает с результатом Хилла, полученным в работе [3]. Слагаемым порядка p^2 в выражении (3.2) для $\mathbf{G}_э$ взаимодействие дефектов учитывается в первом приближении. Симметрия этого слагаемого зависит от симметрии пространственной решетки, образованной центрами неоднородностей.

В заключение отметим, что применение развитой здесь схемы справедливо, по-видимому, при не слишком больших значениях концентрации неоднородностей. Результат может быть уточнен путем аппроксимации эквивалентного поля $\hat{\varepsilon}$ полиномом, коэффициенты которого находятся из условия самосогласования и условия минимума потенциальной энергии системы.

Поступила 24 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kroner E.* Berechnung der elastischen konstanten des Vielkristalls aus konstanten des Einkristall.— «Z. Physik», 1958, B. 151, N 4.
2. *Hershey A. V.* The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic cristal.— «J. Appl. Mech.», 1954, vol. 21, N 3.
3. *Hill R.* A self-consistent mechanics of composite materials.— «J. Mech. Phys. Solids.», 1965, vol. 13, N 4.
4. *Чабан И. А.* Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров неоднородных сред.— «Акуст. журн.», 1964, № 10, вып. 3.
5. *Чекин Б. С.* Об эффективных параметрах упругой среды со случайно-распределенными трещинами.— «Изв. АН СССР. Физика Земли.», 1970, № 10.
6. *Korringa J.* Theory of elastic constants of heterogeneous media.— «J. Math. Phys.», 1973, vol. 14, N 3.
7. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды.— ПМТФ, 1968, № 1.
8. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий.— ПМТФ, 1969, № 1.
9. *Савин Г. Н., Хорошун Л. П.* К вопросу об упругих постоянных стохастически армированных материалов.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
10. *Кунин И. А.* Теория дислокаций.— Дополнение к книге Л. Я. Схоутена: Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщение функций и действия над ними. Вып. 1. М., «Физматгиз», 1958.
12. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 3.
13. *Kroupa F.* Continuous distribution of dislocation loops.— «Czechosl. Journ. of Phys.», 1962, vol. 12, p. 191.
14. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М., «Наука», 1972.
15. *Седякин А. Н.* Элементы теории случайных импульсных потоков. М., «Сов. радио», 1965.

Зав. редакцией *Попова Ж. П.*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *А. В. Семкова*
Корректоры *В. Тришина, Л. А. Егорова*

Сдано в набор 14 мая 1975 г. Подписано в печать 6 августа 1975 г. МН 07407. Формат 70×108 1/16. Бумага типографская № 2. 12,75 печ. л., 17,9 усл.-печ. л., 17,0 уч.-изд. л. Тираж 2085 экз. Заказ 532. Цена 1 руб. 65 коп.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.