

AMS subject classification: 34B15, 65H, 41A10

Некоторые алгебраические решения для второго уравнения Пенлеве с использованием асимптотического метода оптимальной гомотопии (АМОГ)

Д. Сьерра-Порта

Grupo de Investigaciones en Relatividad y Gravitación (GIRG), Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Carrera 27 y Calle 9, 640002 Bucaramanga, Colombia; Centro de Modelado Científico, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia, 4001 Maracaibo, Venezuela
E-mail: dsierrap@uis.edu.co

Сьерра-Порта Д. Некоторые алгебраические решения для второго уравнения Пенлеве с использованием асимптотического метода оптимальной гомотопии (АМОГ) // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 215–223.

В последние годы проводится все больше исследований уравнений Пенлеве, поскольку эти уравнения и их решения могут дать хорошие результаты в области как чистой математики, так и теоретической физики. В данной статье мы представляем подход с использованием асимптотического метода оптимальной гомотопии (АМОГ) для получения приближенных аналитических решений второго уравнения Пенлеве. Преимуществом этого метода является то, что он дает простое алгебраическое выражение, которое может использоваться для дальнейшего развития, сохраняя хорошие характеристики в близком соответствии с численным решением.

DOI: 10.15372/SJNM20180207

Ключевые слова: *трансцендент Пенлеве, асимптотический метод оптимальной гомотопии, аппроксимационное решение.*

Sierra-Porta D. Some algebraic approach for the second Painleve equation using the optimal homotopy asymptotic method (OHAM) // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 215–223.

The study of Painlevé's equations has increased during the last years, due to the awareness that these equations and their solutions can accomplish good results both in the field of pure mathematics and theoretical physics. In this paper we introduced an optimal homotopy asymptotic method (OHAM) approach to propose analytic approximate solutions to the second Painlevé equation. The advantage of this method is that it provides a simple algebraic expression that can be used for further developments while maintaining good performance and fitting closely the numerical solution.

Keywords: *Painleve transcendent, optimal homotopy asymptotic methods, approximate solutions.*

1. Введение

Уравнения Пенлеве [1, 2] были получены Пенлеве и его коллегами при рассмотрении задач для класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Основной идеей было исследование особенностей решений для получения их возможной классификации. Другой важной идеей было развитие и определение новых функций.

В последние годы очень активизировались исследования уравнений Пенлеве благодаря осознанию того, что эти уравнения и их решения могут дать хорошие результаты как в области чистой математики, так и в теоретической физике. В общем, было обнаружено, что некоторые из них являются естественным результатом обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) солитонного типа [3], полученных из нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП).

Первые три из шести уравнений Пенлеве [4–7] следующие:

$$P_I \rightarrow w(z) : w'' = 6w^2 + z, \quad (1)$$

$$P_{II} \rightarrow w(z, \alpha) : w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (2)$$

$$P_{III} \rightarrow w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) : w'' = w^{-1}w'^2 - z^{-1}w' + (\alpha w^2 + \beta)z^{-1} + \gamma w^3 + \delta w^{-1}, \quad (3)$$

где $w = w(z)$, α , β , γ и δ — постоянные.

Уравнения Пенлеве связаны с различными областями теоретической физики. В частности, P_I является результатом решения в терминах бегущей волны $z = x - ct$, $u(x, t) = y(z)$ в уравнении Буссинеска $u_{tt} = u_{xx} - 6(u^2)_{xx} + u_{xxxx}$, где c — произвольная постоянная, а $y(z)$ удовлетворяет $y'' = 6y^2 + (c^2 - 1)y + Az + B$ для некоторых значений постоянных интегрирования A и B . P_{II} может быть получено из уравнения Кортевега–де Фриза (УКдФ) [8, 9] $f_t - 6ff_x + f_{xxx} = 0$, делая скейлинговую редукцию $z = x(3t)^{-1/3}$ и $f(x, t) = (3t)^{-2/3}(w' + w^2)$, и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (МУКдФ) $g_t - 6g^2g_x + g_{xxx} = 0$ для скейлинговой редукции $z = x(3t)^{-1/3}$ и $g(x, t) = (3t)^{-1/3}w$, где α — постоянная интегрирования. И, наконец, третье уравнение Пенлеве получается из уравнения синус-Гордона $u_{xt} = \sin u$ со скейлинговой редукцией $z = xt$, $u(x, t) = v(z)$. Тогда $w(z) = \exp(-iv)$ удовлетворяет P_{III} при $\alpha = -\beta = 1/2$ и $\gamma = \delta = 0$. Кроме того, P_{II} имеет место в статистической физике в известном распределении Трейси–Видома [10] для распределения вероятностей наибольшего нормированного собственного значения случайной эрмитовой матрицы, в электростатической теории [11, 12] и как решение для излучающей частицы в теории Ландау–Лифшица [13].

За исключением P_I преобразование Беклунда связывает трансцендент Пенлеве одного типа с другим того же типа, имеющим различные значения параметров, или с трансцендентом другого типа. Это преобразование имеет следующий вид¹ [4, 14]:

$$-w(z, \alpha \pm 1) = w(z, \alpha) + \frac{2\alpha \pm 1}{2w(z, \alpha)^2 \pm 2w'(z, \alpha) + z}. \quad (4)$$

Здесь очевидно, что при $\alpha \neq \pm \frac{1}{2}$ было верно (4), для $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ решения для различных значений α совпадают, что обычно неверно, и поэтому последнее уравнение дает рекурсивное соотношение для получения нескольких решений из первого.

Для уравнения (2) имеется много известных решений. Примером этого является разноморбие решений рационального типа [15]. Рациональные решения (2) существуют для $\alpha = n (\in Z)$ и получаются с использованием исходного решения $w(z, 0) = 0$ и преобразований Беклунда (4). Их найти гораздо проще при рассмотрении решения (2) для $\alpha = 0$ и использовании рекуррентного соотношения (4) для нахождения всех других. Кроме свойства симметрии относительно α , необходимо рассмотреть только случай для $\alpha > 0$, т. е. начать с исходного решения $w(z, 0) = 0$. Тогда первые три решения следующие:

¹см. <http://dlmf.nist.gov/32.7>

$$w(z, 1) = -\frac{1}{z}, \quad w(z, 2) = \frac{4 - 2z^3}{z(4 + z^3)}, \quad w(z, 3) = \frac{3z^2(160 + 8z^3 + z^6)}{320 - 24z^6 - z^9}. \quad (5)$$

В этом случае все последующие решения имеют порядок $w(z, n) \sim \mathcal{O}(z^{-1})$.

Другие решения получались рядом методов, дающих решения в терминах специальных функций и асимптотических аппроксимаций для вещественной переменной (см. [16] и имеющиеся там ссылки). В [17] автор использовал метод аналитического продолжения для нахождения численных решений для задачи (2). Недавно Дегхан и Шакеки решили задачу (2) с использованием метода разложения Адомяна (МРА), метода гомотопического возмущения (МГВ) и тау-метода Лежандра (ТМЛ) [18]. Таким же образом совсем недавно авторы статьи [19] решили эту задачу с использованием метода гомотопического анализа (МГА). Кроме того, решение второго уравнения Пенлеве представлено с использованием двух известных методов, описанных в [20], а именно, метода sinc-коллокации и вариационного итерационного метода (ВИМ). Применение метода возмущений имеет ограничения, связанные с выбором малого параметра, так что в некоторых случаях его использование в некоторых приложениях может быть неудобным и может не быть прямо применимым. Это можно скорректировать при помощи МГВ или МГА, но следует учитывать малый параметр. Существенное отличие асимптотического метода оптимальной гомотопии (АМОГ) [21–25] в том, что эта трудность, в принципе, устраняется без необходимости включения какого-либо параметра, что дает мощный метод для решения нелинейных задач. Данная статья посвящена изучению класса решений P_{II} алгебраического типа для уравнения вида

$$u(t, \mu) : \quad u'' = 2u^3 + tu + \mu, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (6)$$

В данном исследовании второе уравнение Пенлеве (6) решается с использованием АМОГ. Для получения численного решения проводится сравнение с методом Рунге–Кутты четвертого порядка и другими методами. Этот метод использовался для решения первого уравнения Пенлеве, что дало очень хорошие аппроксимации численного решения [26].

2. Основные идеи АМОГ

Рассмотрим следующее общее дифференциальное уравнение:

$$L[u(t)] + g(t) + N[u(t)] = 0, \quad (7)$$

которое удовлетворяет начальным/граничным условиям

$$B \left[u(t), \frac{du(t)}{dt} \right] = B [u(t), u'(t)] = 0, \quad (8)$$

где t — независимая переменная, $u(t)$ — функция для решения, $g(t)$ — заданная функция, L , N и B — линейный, нелинейный и граничный операторы соответственно.

После применения АМОГ к данной проблеме общее уравнение деформации (гомотопии) можно представить следующим образом:

$$(1 - \epsilon) (L[H(t, \epsilon)] + g(t)) = h(\epsilon) [L[H(t, \epsilon)] + g(t) + N[H(t, \epsilon)]], \quad (9)$$

$$B \left[H(t, \epsilon), \frac{\partial H(t, \epsilon)}{\partial t} \right] = 0, \quad (10)$$

где $\epsilon \in [0, 1]$ — параметр вложения, $h(\epsilon)$ — ненулевая вспомогательная функция для $\epsilon \neq 0$ и $h(0) = 0$, $H(t, \epsilon)$ — неизвестная функция. Ясно, что когда $\epsilon = 0$ и $\epsilon = 1$, $H(t, 0) = u_0(t)$ и $H(t, 1) = u(t)$ соответственно.

Таким образом, когда ϵ изменяется от 0 до 1, решение $H(t, \epsilon)$ меняется от $u_0(t)$ до решения $u(t)$, где $u_0(t)$ получается из уравнения (9) для $\epsilon = 0$,

$$L[u_0(t)] + g(t) = 0, \quad B[u_0(t), u_0'(t)] = 0. \quad (11)$$

Далее мы предлагаем вспомогательную функцию $h(\epsilon)$ следующего вида:

$$h(\epsilon) = \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + \epsilon^3 K_3 + \dots + \epsilon^m K_m = \sum_{i=1}^m \epsilon^i K_i, \quad (12)$$

где K_i — постоянные. Для реальных применений K_i конечны, $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Разложив $H(t, \epsilon)$ в ряд Тейлора относительно ϵ , получим

$$H(t, \epsilon) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_n(t, K_i) \epsilon^n. \quad (13)$$

Подставив (13) в (9) и приравняв коэффициенты одинаковых степеней ϵ , получим следующее: задача нулевого порядка задается как (11), тогда как задачи первого и второго порядков задаются так:

$$L[u_1(t)] = K_1 N_0[u_0(t)], \quad B[u_1(t), u_1'(t)] = 0, \quad (14)$$

$$L[u_2(t)] - (1 + K_1)L[u_1(t)] = K_2 N_0[u_0(t)] + K_1 N_1[u_0(t), u_0(t)], \quad B[u_2(t), u_2'(t)] = 0. \quad (15)$$

Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} L[u_n(t)] - L[u_{n-1}(t)] \\ = K_n N_0[u_0(t)] + \sum_{i=1}^{n-1} K_i [L[u_{n-i}(t)] + N_{n-i}[u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)]], \end{aligned} \quad (16)$$

$$B[u_n(t), u_n'(t)] = 0. \quad (17)$$

В последнем уравнении $N_m[u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)]$ — коэффициент ϵ^m в разложении $N[H(t, \epsilon)]$:

$$N[H(t, \epsilon, K_i)] = N_0[u_0(t)] + \sum_{m=1}^{\infty} N_m[u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t)] \epsilon^m. \quad (18)$$

Здесь сходимость ряда (13) зависит от постоянных K_i , $i = 1, 2, 3, \dots$.

Когда $\epsilon = 1$, уравнение (13) можно записать в виде

$$\bar{u}(t, K_m) = u_0(t) + \sum_{i=1}^n \bar{u}_i(t, K_m), \quad (19)$$

и сумма сходится, поскольку в практических применениях n конечно для нахождения приближенного решения. Подставив (19) в (9), мы получим невязку

$$R(t, K_m) = L[\bar{u}(t, K_m)] + g(t) + N[\bar{u}(t, K_m)]. \quad (20)$$

Если $R = 0$, то \bar{u} есть точное решение. Однако, в общем, это не происходит, особенно в случае нелинейных задач.

Существуют различные методы для определения K_i , такие как метод Ритца, Галеркина, коллокации или метод наименьших квадратов,

$$J(t, K_m) = \int_a^b R^2(t, K_m) dt \quad (21)$$

с невязкой $R = L[\bar{u}] + g(t) + N[\bar{u}]$ и

$$\frac{\partial J(t, K_m)}{\partial K_i} = 0, \quad (22)$$

причем a и b выбраны подходящим образом для определения искомого K_i . Если эти постоянные известны, то приближенное решение (порядка m) хорошо определено.

3. Приближенное решение второго уравнения Пенлеве с использованием АМОГ

Получим решение уравнения (6) с использованием АМОГ. Прежде всего отметим, что в этом случае мы можем положить

$$L[A] := \frac{d^2}{dt^2}A, \quad g(t) := 0, \quad N[A] := -2A^3 - tA - \mu. \quad (23)$$

Нулевой порядок аппроксимации задается как

$$u_0''(t) = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u_0'(0) = 1 \quad (24)$$

с решением $u_0(t) = 1 + t$. Для задачи первого порядка получим

$$u_1''(t) + K_1[\mu + 2 + t] = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (25)$$

при решении $u_1(t) = -\frac{K_1}{6}t^2[3(\mu + 2) + t]$.

Для второго порядка аппроксимации мы видим, что $u_2(t)$ — полиномиальная функция высокого порядка. Действительно, $u_2(t)$ имеет вид $u_2(t) = Q_2(t) = \sum_{n=2}^{11} b_n t^n$, причем коэффициенты b_n выражаются через K_1 и K_2 при условии (14) и (15). Высокие порядки аппроксимации задаются функциями со степенями высокого порядка по t .

С использованием этого метода, после удобного переопределения неизвестных коэффициентов K_i для третьего порядка аппроксимации, решения задачи (6) вычисляются для случая $\mu=1$. Численные результаты приведены в таблицах 1 и 2 и показаны на рисунках 1 и 2. Затем эти результаты сравниваются с результатами, приводимыми в [20], полученными методом синк-коллокации и вариационным итерационным методом (ВИМ):

$$u(t, \mu = 1) = 1 + a_1 t^2 + a_2 t^6 + a_3 t^{10} + a_4 t^{14} + a_5 t^{20} + a_6 t^{28} + a_7 t^{30} \quad (26)$$

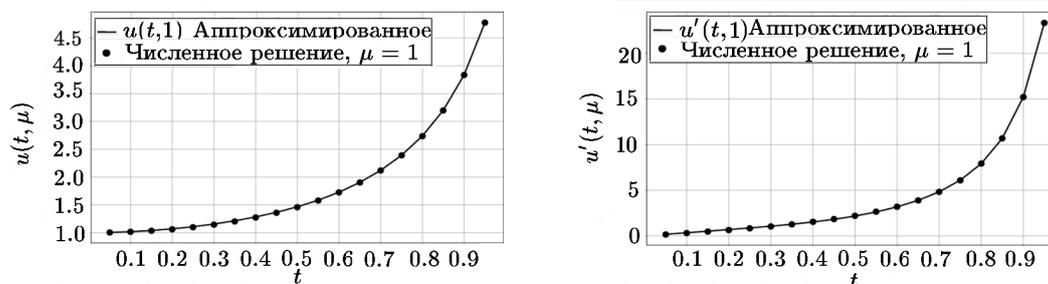
с параметрами $a_1 = 1.697070917$, $a_2 = 2.609390039$, $a_3 = -1.256388359$, $a_4 = 2.426875319$, $a_5 = -0.4717678848$, $a_6 = -0.1347675836$ и $a_7 = 0.4351224665$.

Таблица 1. Сравнение значений $u(t, \mu)$ и $u'(t, \mu)$, полученных различными методами при $\mu = 1$

t	Аппроксимация			Первая производная		
	Sinc-коллация	ВИМ	АМОГ	Sinc-коллация	ВИМ	АМОГ
0.05	1.003775662	1.003775569	1.00424272	0.151646889	0.151630056	0.16971198
0.10	1.015243802	1.015243537	1.01697332	0.308080645	0.308099940	0.33957073
0.15	1.034708564	1.034708876	1.03821381	0.471990948	0.471982114	0.51030970
0.20	1.062615730	1.062614651	1.06804971	0.646296100	0.646258916	0.68383199
0.25	1.099569958	1.099567603	1.1067028	0.834541894	0.834535606	0.86377743
0.30	1.146377520	1.146376034	1.15463133	1.041286365	1.041324413	1.05604558
0.35	1.204103691	1.204104479	1.21265429	1.272396475	1.272440758	1.26922961
0.40	1.274150163	1.274152278	1.28209418	1.535574210	1.535576514	1.51491186
0.45	1.358366629	1.358367333	1.36493065	1.841214574	1.841156613	1.80781229
0.50	1.459216534	1.459213319	1.46396018	2.203597241	2.203659640	2.16592221
0.55	1.580028132	1.580020743	1.58297065	2.643787352	2.643721101	2.61108408
0.60	1.725383228	1.725374098	1.7269769	3.191606484	3.191604952	3.17110846
0.65	1.901736804	1.901728548	1.90264234	3.893152468	3.893170320	3.88556235
0.70	2.118441811	2.118431139	2.11915382	4.820785615	4.820621693	4.81887202
0.75	2.389524420	2.389493077	2.39004689	6.093740305	6.092992360	6.08637240
0.80	2.736942571	2.736846427	2.73683163	7.919898095	7.917916630	7.90224947
0.85	3.197020966	3.196770263	3.19593384	10.68888596	10.68432635	10.66978262
0.90	3.834408328	3.833780746	3.83251635	15.20368342	15.19170680	15.18928243
0.95	4.776251311	4.774527172	4.77324886	23.34167691	23.30560345	23.30622457

Таблица 2. Относительная ошибка для $u(t, \mu)$ и $u'(t, \mu)$ в сравнении с численным решением при $\mu = 1$ для $0.5 \leq t \leq 0.95$

t	Наш метод	Числен. решение	Ошибка, %	Наш метод	Числен. решение	Ошибка, %
0.50	1.46396018	1.45921345	0.32529381	2.16592221	2.16592221	-0.01712666
0.55	1.58297065	1.58002119	0.18667166	2.61108406	2.61108408	-0.01234942
0.60	1.7269769	1.72537551	0.09281355	3.17110751	3.17110846	-0.00643236
0.65	1.90264234	1.90173279	0.04782699	3.88554687	3.88556235	-0.00197782
0.70	2.11915382	2.11844343	0.03353355	4.81869967	4.81887202	-0.00041477
0.75	2.39004689	2.38952654	0.02177633	6.08486153	6.08637240	-0.00119519
0.80	2.73683163	2.73693549	-0.00379485	7.89117363	7.90224947	-0.00219606
0.85	3.19593384	3.19700418	-0.0334794	10.59948225	10.66978262	-0.00178345
0.90	3.83251635	3.83440022	-0.04913079	14.79386518	15.18928243	-0.00096346
0.95	4.77324886	4.77622801	-0.06237453	21.30160718	23.30622457	-0.00149028

Рис. 1. Кривая аппроксимации третьего порядка $u(t, 1)$ (слева) и $u'(t, 1)$ (справа), полученная с использованием АМОГ для $\mu = 1$ в сравнении с численным решением

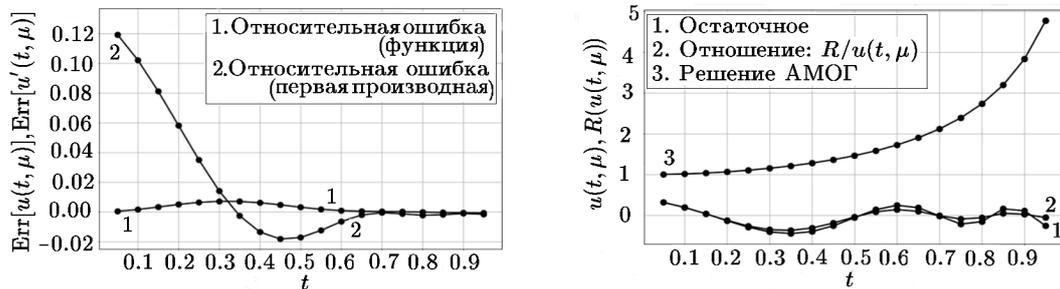


Рис. 2. Кривая относительной ошибки для $u(t, 1)$ и $u'(t, 1)$ в сравнении с численным решением $\mu = 1$ (слева). Оценка невязки для приближенного решения с использованием АМОГ для уравнения (26) (справа)

Рисунок 1 представляет приближенное решение (слева) и первую производную (справа) приближенного решения с использованием АМОГ в сравнении с численным решением для $u(0) = 1, u'(0) = 0$. Наше решение хорошо им соответствует. Рисунок 2 показывает относительную ошибку в зависимости от численного решения (слева), с правой стороны мы показываем оценку невязки решения вследствие (20). Мы видим, что эта невязка решения с использованием АМОГ не превышает $6.5 \cdot 10^{-2}$ для $0.05 < t < 0.95$. Для большого $t > 0.5$ среднее значение этой невязки равно $8.9 \cdot 10^{-3}$ в соответствии с таблицами 1 и 2.

4. Выводы

В данной статье мы ввели подход АМОГ, чтобы предложить аналитические приближенные решения второго уравнения Пенлеве. Процедура работает, даже если нелинейное уравнение не содержит малых (или больших) параметров. Предлагаемое построение гомотопии отличается от других подходов, когда имеются параметры a_n , гарантирующие очень быструю сходимость решений. В области $0.05 \leq t \leq 0.95$ приближенное решение очень близко к численному решению, причем ошибки начинают расти (гладко) в нижней области переменной t . Средняя ошибка $2.53 \cdot 10^{-3}$, а максимальная ошибка не превышает $7.20 \cdot 10^{-3}$. Кроме того, производная для приближенного решения довольно близка к численным производным, т. е. $u'(t = 1) = 40.307$ в сравнении с $u'_{\text{Num}}(t = 1) = 40.378$. В этом случае ошибка при $x = 1$ не превышает 1.7%.

Преимущество представленного метода состоит в том, что он дает простое алгебраическое выражение, которое может использоваться для дальнейшего развития. Это позволяет рассматривать данную задачу как аналитическую систему и использовать ее решение в ряде конкретных применений при сохранении хороших характеристик в близком соответствии с численным решением.

Благодарности. Автор хотел бы поблагодарить GIRG, Grupo Halley and Vicerrectoría Investigación and Extensión of Universidad Industrial de Santander за гостеприимство во время его пребывания после защиты диссертации и за возможность совместной работы.

Литература

1. **Painlevé P.** Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bulletin de la Société Mathématique de France. — 1900. — Vol. 28. — P. 201–261.
2. **Painleve P.** Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta mathematica. — 1902. — Vol. 25, iss. 1. — P. 1–85.

3. **Ablowitz M.J., Ramani A., and Segur H.** A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // *J. of Mathematical Physics.* — 1980. — Vol. 21, iss. 4. — P. 715–721.
4. **Kudryashov N.A.** Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations. 2 ed. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Investigations, 2004.
5. **Lukashevich N.A., Gromak V.I.** Analytical Properties of Solutions to Painlevé equations. — Moscow–Minsk: University Publishing House, 1990.
6. **Golubev V.V.** Lectures on Analytical Theory of Differential Equations. — Moscow–Leningrad: GITTL (State Publishing House of Technical-Theoretical Literature), 1941.
7. **Conte R.** The Painlevé Approach to Nonlinear Ordinary Differential Equations // *The Painlevé property. One Century Later.* — Springer-Verlag, 1999. — P. 77–180.
8. **Miles J.W.** On the second Painlevé transcendent // *Proc. of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1978. — Vol. 361. — P. 277–291.
9. **Rosales R.R.** The similarity solution for the Korteweg–de Vries equation and the related Painlevé transcendent // *Proc. of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1978. — Vol. 361. — P. 265–275.
10. **Tracy C.A., Widom H.** Painlevé functions in statistical physics // *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences.* — 2011. — Vol. 47, iss. 1. — P. 361–374.
11. **Kashevarov A.V.** The second Painlevé equation in the electrostatic-probe theory: Numerical solutions // *Computational mathematics and mathematical physics.* — 1998. — Vol. 38, iss. 6. — P. 950–958.
12. **Kashevarov A.V.** The second Painlevé equation in the electrostatic probe theory: Numerical solutions for the partial absorption of charged particles by the surface // *Technical Physics.* — 2004. — Vol. 49, № 1. — P. 1–7.
13. **Rajeev S.G.** Exact solution of the Landau–Lifshitz equations for a radiating charged particle in the coulomb potential // *Annals of Physics.* — 2008. — Vol. 323, iss. 11. — P. 2654–2661.
14. **Lukashevich N.A.** On the theory of the second Painlevé equation // *Differential Equations.* — 1971. — Vol. 7, № 6. — P. 1124–1125.
15. **Clarkson P.A.** Painlevé Transcendents / Ronald F. Boisvert, Charles W. Clark, Frank W.J. Olver, Daniel W. Lozier // *In NIST Handbook of Mathematical Functions.* — Cambridge: Cambridge University Press, National Institute of Standards and Technology, 2010. — Chapter 32. — P. 723–740.
16. **Thompson I.** Nist handbook of mathematical functions / Frank W.J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, Charles W. Clark // *Contemporary Physics.* — 2011. — Vol. 52, iss. 5. — P. 497–498.
17. **Davis H.T.** Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. — Courier Corporation, 1962.
18. **Dehghan Mehdi, Shakeri Fatemeh.** The numerical solution of the second Painlevé equation // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* — 2009. — Vol. 25, iss. 5. — P. 1238–1259.
19. **Ellahi R., Abbasbandy S., Hayat Tasawar, and Zeeshan A.** On comparison of series and numerical solutions for second Painlevé equation // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* — 2010. — Vol. 26, iss. 5. — P. 1070–1078.
20. **Saadatmandi A.** Numerical study of second Painlevé equation // *Communications in Numerical Analysis.* — 2012. — Vol. 2012. — DOI: 10.5899/2012/cna-00157.
21. **Marinca V., Herişanu N., Bota C., and Marinca B.** An optimal homotope asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate // *Applied Mathematics Letters.* — 2009. — Vol. 22, iss. 2. — P. 245–251.

22. **Marinca V., Herișanu N., and Nemeș I.** Optimal homotope asymptotic method with application to thin film flow // *Open Physics*.— 2008.— Vol. 6, iss. 3.— P. 648–653.
23. **Marinca V., Herișanu N.** Application of optimal homotope asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer // *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*.— 2008.— Vol. 35, iss. 6.— P. 710–715.
24. **Marinca V., Herisanu N.** *Nonlinear Dynamical Systems in Engineering: Some Approximate Approaches*.— Springer Science & Business Media, 2012.
25. **Ghoreishi M., Ismail A.I.B., and Alomari A.K.** Comparison between homotope analysis method and optimal homotope asymptotic method for nth-order integro-differential equation // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.— 2011.— Vol. 34, iss. 15.— P. 1833–1842.
26. **Sierra-Porta D., Núñez L.A.** On the polynomial solution of the first Painlevé equation // *Int. J. of Applied Mathematical Research*.— 2017.— Vol. 6, iss. 1.— P. 34–38.

*Поступила в редакцию 27 апреля 2017 г.,
в окончательном варианте 16 августа 2017 г.*

