РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 2

УДК 517.511

С. С. Ломакина, В. И. Смагин
(Томск)

РОБАСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ СО СКАЧКООБРАЗНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается алгоритм синтеза робастного фильтра, определяющего оценку вектора состояния непрерывной линейной динамической системы со случайными скачкообразными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний, при вырожденной или плохо обусловленной матрице интенсивностей шумов измерителя. Коэффициенты передачи фильтра предлагается выбирать по минимуму суммы следа матрицы ковариаций ошибок фильтрации и взвешенной ковариации обновляющего процесса, осуществляя при этом усреднение по вероятностям состояния скачкообразного параметра. Получены условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость робастного фильтра для стационарной системы.

Введение. Актуальной является задача разработки алгоритмов калмановской фильтрации для класса систем со случайными скачкообразно изменяющимися параметрами, которые могут использоваться в качестве моделей реальных физических объектов. Такой класс систем имеет две составляющие состояния. Первая составляющая изменяется непрерывно, ее моделью является дифференциальное уравнение, вторая изменяется дискретно, и для ее описания используется дискретная цепь Маркова с конечным числом состояний. К данному классу могут быть отнесены системы с возможными нарушениями, например, вследствие внезапных отказов.

В работах [1, 2] калмановская фильтрация применяется для объектов, зависящих от случайных скачкообразных параметров. Однако в этом случае так же, как и при отсутствии скачкообразной составляющей, возникают трудности синтеза фильтра при вырожденных шумах в наблюдениях [3–5]. В данной работе подход, развитый в [5] для линейных непрерывных систем с аддитивными воздействиями гауссовского типа, обобщается на системы со случайными скачкообразными параметрами при вырожденной или плохо обусловленной матрице интенсивностей шумов измерителя. Предлагается синтезировать робастный фильтр с коэффициентами передачи, не зависящими от состояния скачкообразной составляющей. Это позволит сохранить свойство устойчивости фильтра при ошибочном определении состояния скачкообразной составляющей.

Постановка оптимизационной задачи. Пусть линейная динамическая система со случайными скачкообразными параметрами будет представлена уравнением

$$\dot{x}(t) \quad A(\ ,t)x(t) \quad q(\ ,t), \qquad x(0) \quad x_0, \tag{1}$$

где $A(\ ,t)$ – матрица порядка $n \quad n$; $x(t) \quad R^n$ – вектор состояния; $q(\ ,t) \quad R^n$ белый гауссовский шум с характеристиками:

$$\mathbf{M}\{q(\ ,t)\} \quad 0, \quad \mathbf{M}\{q(\ ,t)q^{\mathrm{T}}(\ , \ )\} \quad Q(\ ,t) \ (t \quad); \tag{2}$$

(t) – цепь Маркова с конечным числом состояний $\{ \ _1, \ _2, \ldots, \ _r\}$ (вероятность перехода из i-го состояния в j-е $(i \quad j)$ за время t равна $p_{ij} \quad t \quad o(\ t)$); x_0 – начальные условия, при этом

$$\mathbf{M}\{x_0\} \quad \bar{x}_0; \quad \mathbf{M}\{(x_0 \quad \bar{x}_0)(x_0 \quad \bar{x}_0)^{\mathrm{T}} / \ (0) \quad \ _i\} \quad P_{0i}. \tag{3}$$

Здесь приняты следующие обозначения: M – оператор математического ожидания; T – транспонирование; $Q(\ ,t) \quad Q(\ ,t)^{\mathrm{T}} \quad 0$ – неотрицательно-определенная матрица; $(\ )$ – дельта-функция Дирака.

Процесс (t) задается уравнением

$$d \ (t) \quad u \quad (dt, du), \qquad (0) \quad \ _0, \tag{4}$$

где $_0$ – начальное состояние переменной (t). В (4) пуассоновская случайная мера (dt, du) характеризуется функцией

$$_{t, \ _i}(du) \quad \sum_{\substack{j \ 1 \\ j \ i}}^{r} \ _{ij} \ (u \quad \ _i \quad \ _j)\, du. \tag{5}$$

Вектор вероятностей $p(t) \quad (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_r(t))^{\mathrm{T}}$, где $p_i(t) \quad P\{ \ (t) \quad i\}$ $(i \quad \overline{1,r})$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{dp(t)}{dt} \quad ^{\mathrm{T}} p(t), \qquad p(0) \quad \bar{\ }, \qquad t \quad [0,T], \tag{6}$$

где – матрица интенсивностей переходов с элементами $_{ij} \quad _{ii} \quad \sum_{\substack{j \ 1 \\ j \ i}}^{r} \ _{ij}$;

$\bar{\ }$ – вектор начальных вероятностей.

Предполагается, что наблюдаемый вектор выхода измерителя $y \quad R^l$ определяется соотношением

$$y(t) \quad S(\ ,t)x(t) \quad (\ ,t), \tag{7}$$

где $S(\ ,t)$ – матрица канала наблюдений полного ранга; $(\ ,t)$ – белый гауссовский шум с характеристиками:

$$\mathbf{M}\{\ (\ ,t)\}\quad 0;\qquad \mathbf{M}\{\ (\ ,t)q^{\mathrm{T}}(\ ,\ )\}\quad 0;$$

$$\mathbf{M}\{\ (\ ,t)\ \ ^{\mathrm{T}}(\ ,\ )\}\quad V(\ ,t)\ \ (t\qquad). \tag{8}$$

Неотрицательно-определенная матрица интенсивностей шумов $V(\ ,t)$ в канале наблюдений (8) является вырожденной или плохо обусловленной.

Определим оценку состояния $\hat{x}(t)$ с помощью фильтра, по своей структуре совпадающего с фильтром Калмана [1]:

$$\dot{\hat{x}}(t)\quad A(\ ,t)\hat{x}(t)\qquad (t),\qquad \hat{x}(0)\quad \bar{x}_0, \tag{9}$$

где (t) – обновляющийся процесс:

$$(t)\quad K(t)(y(t)\quad S(\ ,t)\hat{x}(t)). \tag{10}$$

Коэффициенты передачи нестационарного фильтра (9), (10) $K(t)$ на интервале времени $[0,T]$ зададим не зависящими от скачкообразно изменяющейся переменной (t). Отметим, что фильтр (9), (10) для своей реализации требует измерений переменной . Выбор матрицы $K(t)$, не зависящей от , позволяет обеспечить качество робастности фильтра, которое заключается в сохранении фильтром свойства устойчивости в среднеквадратическом при ошибках в определении значения состояния . Будем определять коэффициенты передачи $K(t)$ из условия минимума следующего критерия:

$$J[0,T]\quad \mathbf{M}\ \ \int_0^T \sum_{i\ 1}^{r} p_i(t)[e^{\mathrm{T}}(t)R_i(t)e(t)\qquad {}_i\ \ ^{\mathrm{T}}(t)\ \ (t)]dt$$

$$\sum_{i\ 1}^{r} p_i(T)(e^{\mathrm{T}}(T)Y_T e(T)) \Big/\ (0)\qquad {}_0\ , \tag{11}$$

где $e(t)\quad x(t)\quad \hat{x}(t)$ – вектор ошибок фильтрации; $R_i(t)\quad 0$ и $Y_T\quad 0$ – весовые матрицы; ${}_i\quad 0$ – весовой коэффициент. В подынтегральном выражении критерия (11) первое и третье слагаемые характеризуют точностные характеристики фильтра, второе интерпретируется как взвешенные энергетические затраты на фильтрацию. Весовая матрица Y_T определяет вклад в критерий ошибок фильтрации в конечный момент времени *T*. Если дополнительных требований к ошибкам в этот момент нет, то $Y_T\quad 0$.

В стационарном случае вместо критерия (11) необходимо минимизировать критерий

$$\lim_{T}\ \sup \frac{1}{T} J[0,T], \tag{12}$$

при этом в критерии $J[0,T]$ весовая матрица Y_T должна быть нулевой.

Фильтрация нестационарного процесса. Решение задачи синтеза робастного фильтра определяет

Теорема 1. Если существуют матрицы $Y_i(t) \geq 0$ и $D_i(t) \geq 0$, являющиеся решением двухточечной краевой задачи

$$\dot{D}_i = (A_i - KS_i)D_i + D_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i +$$
$$+ KV_iK^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(D_j - D_i), \quad D_i(0) = D_0, \tag{13}$$

$$\dot{Y}_i = -Y_i(A_i - KS_i) - (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i -$$
$$- \gamma_i S_i^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K S_i - R_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i), \quad Y_i(T) = Y_T, \tag{14}$$

то элементы матрицы оптимальных коэффициентов передачи определятся по формуле

$$\mathrm{ct}K(t) = \left[\sum_{i=1}^{r} p_i(\gamma_i I \otimes (S_iD_iS_i^{\mathrm{T}} + V_i) + Y_i \otimes V_i)\right]^{-1} \mathrm{ct}\left[\sum_{i=1}^{r} p_iY_iD_iS_i^{\mathrm{T}}\right], \tag{15}$$

где $\otimes$ – кронекеровское произведение; $\mathrm{ct}(\;)$ – вектор-столбец, составленный из последовательности элементов строк матрицы; I – единичная матрица размера $n \times n$;

$$A_i = A(\theta_i); \quad Q_i = Q(\theta_i); \quad S_i = S(\theta_i); \quad V_i = V(\theta_i). \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица дисперсии ошибки фильтрации

$$D_i(t) = \mathbf{M}\{e(t)e^{\mathrm{T}}(t) / \theta(t) = \theta_i\}, \quad i = \overline{1,r}, \tag{17}$$

удовлетворяет дифференциальному матричному уравнению

$$\dot{D}_i = (A_i - KS_i)D_i + D_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i +$$
$$+ KV_iK^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(D_j - D_i), \quad D_i(0) = D_0, \tag{18}$$

где $D_0 \geq 0$ – матрица начальных дисперсий ошибок фильтрации (предполагается, что D_0 не зависит от начального состояния скачкообразной составляющей). Уравнение для ошибки $e(t)$ при оптимальных коэффициентах передачи фильтра должно быть устойчивым в среднеквадратическом. Поэтому для уравнения (18) должна существовать функция Ляпунова, которую будем искать в виде

$$W(t, D_i(t)) = \sum p_i(t)\mathrm{tr}D_i(t)Y_i(t) + \mathrm{tr}\int_t^T \sum p_i(Q_i + \gamma_i KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i d\tau, \tag{19}$$

где $\quad_i \quad 0$ – некоторая матрица; $Y_i(t) \quad 0$ – матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, двойственному уравнению (18):

$$\dot{Y}_i \quad Y_i(A_i \quad KS_i) \quad (A_i \quad KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i \quad C_i \quad \sum_{\substack{j \quad 1 \\ j \quad i}}^{r} \quad_{ij}(Y_j \quad Y_i), \qquad Y_i(T) \quad Y_T. \tag{20}$$

В выражении (20) $C_i \quad 0$ – матрица, подлежащая определению. Очевидно, что функция Ляпунова (19) неотрицательна. Проинтегрируем от t до T полную производную функции Ляпунова:

$$\int_t^T \frac{d}{d} W(\ , D_i(\ )) d \qquad \int_t^T [\dot{p}_i \operatorname{tr} D_i Y_i \quad p_i \operatorname{tr}(\dot{D}_i Y_i \quad D_i \dot{Y}_i)$$

$$p_i \operatorname{tr}(Q_i \quad\quad_i \quad KV_i K^{\mathrm{T}}) Y_i] d$$

$$\operatorname{tr} \int_t^T [\dot{p}_i \operatorname{tr} D_i Y_i \quad p_i \operatorname{tr}((A_i \quad KS_i) D_i Y_i \quad D_i (A_i \quad KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i$$

$$\sum_{\substack{j \quad 1 \\ j \quad i}}^{r} \quad_{ij}(D_j \quad D_i) Y_i) \quad p_i \operatorname{tr}(D_i \dot{Y}_i \quad\quad_i Y_i)] d$$

$$p_i(T) \operatorname{tr} D_i(T) Y_i(T) \quad p_i(t) \operatorname{tr} D_i(t) Y_i(t) \quad \int_t^T [p_i \operatorname{tr}(Q_i \quad\quad_i \quad KV_i K^{\mathrm{T}}) Y_i] d \ . \tag{21}$$

Вычислим значение критерия

$$J_i[t,T] \quad \mathbf{M} \quad \int_t^T [p_i(\ )(e^{\mathrm{T}}(\ ) R_i(\ ) e(\ )) \quad p_i(\ ) \quad_i \quad ^{\mathrm{T}}(\ ) \ (\ ))] d$$

$$p_i(T) e^{\mathrm{T}}(T) Y_T e(T) \ . \tag{22}$$

В результате получим

$$J_i[t,T] \quad \int_t^T [p_i(\ ) \operatorname{tr} D_i(\ ) R_i(\ ) \quad\quad_i p_i(\ ) \operatorname{tr} K(S_i(\ ) D_i(\ ) S_i^{\mathrm{T}}(\ ) \quad V_i(\ )) K^{\mathrm{T}}] d$$

$$p_i(T) \operatorname{tr} D_i(T) Y_T. \tag{23}$$

Учитывая (21), критерий (23) представим в эквивалентной форме:

$$J_i[t,T] \quad \int_t^T [p_i \operatorname{tr} P_i R_i \quad \dot{p}_i \operatorname{tr} P_i Y_i \quad\quad_i K_i (S_i P_i S_i^{\mathrm{T}} \quad V_i) K_i^{\mathrm{T}}$$

$$+ p_i \operatorname{tr}((A_i - KS_i)P_i + P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i))Y_i + p_i \operatorname{tr}(P_i \dot{Y}_i + (Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i)]d\tau +$$

$$+ p_i(T)\operatorname{tr}P_i(T)Y_T - p_i(T)\operatorname{tr}P_i(T)Y_i(T) + p_i(t)\operatorname{tr}P_i(t)Y_i(t). \tag{24}$$

Критерий (11) можно представить в виде суммы критериев (24) при $t = 0$:

$$J[0,T] = \sum_{i=1}^{r} J_i[0,T]. \tag{25}$$

Приравнивая к нулю градиент функции (25) по K и используя правила дифференцирования скалярной функции по матричному аргументу [6], получим матричное уравнение

$$\sum_{i=1}^{r} p_i[\gamma_i K(S_iD_iS_i^{\mathrm{T}} + V_i) + Y_iKV_i - Y_iD_iS_i^{\mathrm{T}}] = 0. \tag{26}$$

Решение этого уравнения относительно матрицы K представляется в виде (15). Найдем для Y_i в уравнении (20) выражение для матрицы C_i такое, чтобы критерий (25) был минимальным. Для этого правую часть (20), взятую с противоположным знаком, подставим вместо $\dot{Y}_i$ в (24). Выполнив преобразования, в результате получим

$$J[0,T] = \int_0^T \sum_{i=1}^{r} [p_i \operatorname{tr} D_i(R_i + \gamma_i S_i^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KS_i - C_i) +$$

$$+ \dot{p}_i \operatorname{tr} D_iY_i + p_i \operatorname{tr}(\gamma_i KV_iK^{\mathrm{T}} + (Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \lambda_{ij}(D_j - D_i)Y_i + D_i \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i)]d\tau + \sum_{i=1}^{r} p_i(t)\operatorname{tr}D_i(t)Y_i(t). \tag{27}$$

Так как значение критерия (27) должно быть всегда неотрицательным, то его минимум достигается при

$$C_i = R_i + \gamma_i S_i^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KS_i. \tag{28}$$

Покажем, что полная производная функции Ляпунова (19) при матрице K (15) отрицательна. Это необходимо для обеспечения устойчивости в среднеквадратическом [7]. Учитывая (13), (14), полная производная функции Ляпунова примет вид

$$\frac{d}{dt}W(t, D_i(t)) = -p_i\gamma_i \operatorname{tr} D_iS_i^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KS_i - p_i \operatorname{tr} D_iR_i - \ldots_i, \tag{29}$$

где

$$\gamma_i = \dot{p}_i \operatorname{tr} D_i Y_i + p_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij} \operatorname{tr}(D_i Y_j - D_j Y_i) + p_i \operatorname{tr} \Lambda_i Y_i. \tag{30}$$

Очевидно, что выражение (29) будет отрицательным, так как все значения γ_i в (30) всегда можно сделать положительными, задав соответствующим образом матрицы $\Lambda_i > 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В частном случае, когда исходный объект является скалярным, выражение для $K(t)$ может быть непосредственно подставлено в уравнения для двухточечной краевой задачи (13), (14). В многомерном случае так поступить нельзя, так как $K(t)$ в общем виде выразить через Y_i и D_i затруднительно. Поэтому при решении уравнений (13), (14) необходимо дополнительно учитывать зависимость $\operatorname{ct} K(t)$ от Y_i и D_i (15).

Фильтрация стационарного процесса. Для существования фильтра дополнительно будем предполагать, что пара матриц S_i, A_i $(i = \overline{1,r})$ детектируема. Задача синтеза стационарного фильтра по сравнению с предыдущим случаем упрощается, так как уравнения (13), (14) становятся алгебраическими:

$$(A_i - KS_i)D_i + D_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(D_j - D_i) = 0, \tag{31}$$

$$Y_i(A_i - KS_i) + (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i + \mu_i S_i^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K S_i + R_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i) = 0. \tag{32}$$

Постоянные оптимальные коэффициенты передачи определяются по формуле

$$\operatorname{ct} K = \left[\sum_{i=1}^{r} \bar{p}_i \left(\mu_i I \otimes (S_i D_i S_i^{\mathrm{T}} + V_i) + Y_i \otimes V_i \right) \right]^{-1} \operatorname{ct} \left[\sum_{i=1}^{r} \bar{p}_i Y_i D_i S_i^{\mathrm{T}} \right], \tag{33}$$

где $\bar{p}_i$ – установившиеся вероятности состояний переменной θ. Отметим, что так же, как и в нестационарном случае, при решении матричных уравнений (31), (32) необходимо учитывать зависимость (33).

Условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом стационарного робастного фильтра определяет

Теорема 2. Если существует решение уравнений (31)–(33) и существуют числа ε_i $(0 < \varepsilon_i < 1)$ такие, что

$$Y_i > 0, \quad M_i = \varepsilon_i R_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i) > 0, \tag{34}$$

пара матриц

$$\sqrt{R_i}, \quad A_i \tag{35}$$

детектируема, то матрица $A_i \quad KS_i$ асимптотически устойчива для всех $i \quad \overline{1,r}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия детектируемости матриц (35) следует детектируемость пары матриц

$$\sqrt{(1 \quad _i)R_i}, \quad A_i. \tag{36}$$

Тогда, учитывая $M_i \quad 0$ и применяя теорему 3.6 из [8], будет детектируема пара матриц

$$\sqrt{(1 \quad _i)R_i \quad M_i \quad _i(KS_i)^{\mathrm{T}}(KS_i)}, \quad A_i \quad KS_i. \tag{37}$$

В силу того что уравнение (32) эквивалентно матричному алгебраическому уравнению Ляпунова

$$Y_i(A_i \quad KS_i) \quad (A_i \quad KS_i)^{\mathrm{T}}Y_i \quad _iS_i^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KS_i \quad (1 \quad _i)R_i \quad M_i \quad 0, \tag{38}$$

по лемме 12.2 из [8] при $Y_i \quad 0$ и условии детектируемости пары матриц (36) следует, что матрица $A_i \quad KS_i$ асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Заключение. В работе предложен алгоритм синтеза робастных фильтров на основе оптимизации суммы следа матрицы ковариации ошибок фильтрации и взвешенной ковариации обновляющего процесса с усреднением по вероятностям скачкообразной переменной. Алгоритм позволяет расширить область применения методов калмановской фильтрации на класс непрерывных линейных систем со случайными скачкообразными параметрами при вырожденной или плохо обусловленной матрице интенсивностей шумов измерителя и обеспечить асимптотическую устойчивость в среднеквадратическом при возможных ошибках в определении состояния скачкообразной составляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mariton M. On the influence of noise on jump linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1987. AC-32, N 12. P. 1094.
2. Dufour P., Bertrand P. The filtering problem for continuous-time systems with Markovian switching coefficients // Syst. and Contr. Lett. 1994. 25, N 5. P. 453.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
4. Борисов А. В. Оптимальная фильтрация в системах с вырожденными шумами в наблюдениях // АиТ. 1998. № 11. С. 32.
5. Смагин В. И. Линейная фильтрация в непрерывных системах с вырожденной матрицей интенсивностей шумов измерителя // Автоматика и вычисл. техн. 1996. № 1. С. 54.
6. Athans M. The matrix minimum principle // Inform. and Contr. 1968. 11. P. 592.
7. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
8. Уонем М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.

Томский государственный университет,
E – mail: vsm@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию
16 июня 2003 г.