области // Повышение эффективности строительства и эксплуатации зданий и транспортных сооружений в условиях сурового климата.— Чита: Чит. политехн. ин-т, 1992.
3. **Zinoviev A. P., Solonenko O. P.** An effective method of numerical investigation of aggregate of particles under plasma treatment of dispersed materials // Plasma jets in the development of new materials technology.— VSP, the Netherlands, 1990.
4. **Соболев С. Л.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1980.
5. **Конторович Л. В.** О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1949.— Т. 28.
6. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчеты теплового режима твердых тел.— Л.: Энергия, 1976.

*г. Новосибирск, г. Томск* — *Поступила 30/XI 1992 г., в окончательном варианте — 18/I 1993 г.*

---

УДК 539.37

*А. Ф. Ревуженко*

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ МЕРЫ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

**Введение.** Пусть есть некоторое тело. Зададим на его границе перемещения, силы или какие-либо другие условия нагружения. В результате каждая точка тела сместится в новое положение. Здесь есть две принципиально разные возможности: 1) поле перемещений будет таким, что тело испытает только жесткий поворот и перенос, 2) наряду с перемещением тела как жесткого целого произойдет искажение его формы, а в общем случае — изменение объема, т. е. в теле произойдут определенные деформации.

Проблема описания деформаций является одной из основных в механике твердого тела. В настоящее время используются различные определения самого понятия деформаций, их меры и соответствующие механические интерпретации. Все они носят локальный характер. Например, определение нелинейного тензора деформаций Коши — Грина связано с анализом изменения расстояний между парами бесконечно близких точек. Причем эти пары принадлежат окрестности заданной точки. Именно к этой точке и относится соответствующий тензор. Другие определения также носят локальный характер и опираются на исследование кинематики бесконечно малых материальных объемов тела [1, 2]. Если сопоставить теоретические построения с экспериментами, то можно сказать, что в теории все «измерения» деформаций проводятся на бесконечно малой базе.

В некоторых случаях представляет интерес более общая трактовка этого понятия, а именно: под деформациями будем понимать любые количественные характеристики, которые описывают отличие действительного поля смещений точек тела от множества полей смещений того же тела как жесткого целого. Такой подход допускает нелокальные определения, когда деформации «измеряются» на конечной базе и их количественные характеристики относятся не к точкам, а ко всему телу в целом.

Идея такого подхода появилась при анализе одной конкретной задачи [3]. Пусть деформирование тела осуществляется в плоской радиальной матрице. На рис. 1, *а*, *б* соответственно показаны начальная конфигурация тела и конечная. Как оценить деформацию, которую испытало тело в целом при переходе из начальной конфигурации в конечную? Это можно сделать таким образом. Пусть параметр нагружения — смещение нижней границы тела $h$ (рис. 1). Представим теперь тело абсолютно жестким и дадим ему виртуальное смещение вниз на величину $h$. Такое смещение приведет к тому, что конфигурация тела форме матрицы соответствовать уже не будет. Степень этого несоответствия можно оценить через объем областей несовме-

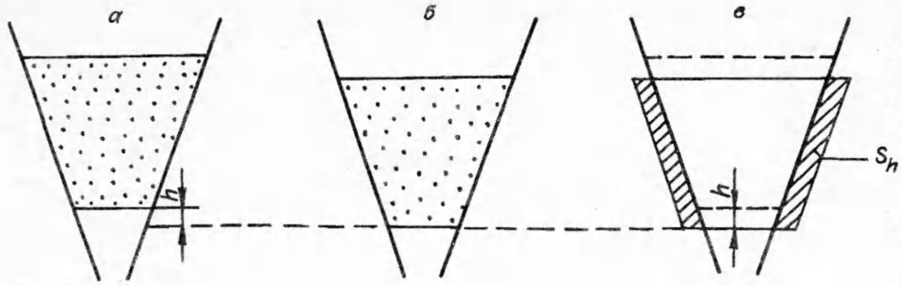


Рис. 1

стности $S_h$ (рис. 1, *в*). В реальном процессе области несовместности существовать не могут. Поэтому реальный процесс можно трактовать как процесс, в котором области несовместности $S_h$ как-то «размазываются» внутри сходящегося канала. Отсюда следует, что и деформацию тела в целом можно оценить как объем областей несовместности, отнесенный к исходному объему тела, т. е. здесь до решения задачи можно получить интегральные количественные оценки. В [3, 4] этот прием использовался для анализа течения сыпучего материала в условиях локализации сдвигов. Он позволил не только дать качественное описание процесса, но и получить количественные оценки.

Попытаемся теперь формализовать этот прием. Обозначим через $S$ исходную конфигурацию тела, через $L$ — его границу. Пусть в результате деформирования область $S$ преобразовалась в $S_t$, а граница $L$ — в $L_t$. Введем следующие обозначения: $S^0 = S \cap S_t$, $S^- = S \setminus S^0$, $S^+ = S_t \setminus S^0$ (рис. 2). Если не интересоваться внутренним механизмом изменения формы, то с внешней точки зрения можно сказать, что результат процесса деформирования — удаление из области $S$ частей $S^-$ и добавление частей $S^+$. Поэтому по объему этих областей, их взаимному расположению и самой форме можно как-то судить о процессе деформирования тела в целом. Например, для случая, изображенного на рис. 2, видно, что в целом тело сжимается вдоль направления $AB$ и растягивается вдоль направления $CD$.

Здесь возникает одно обстоятельство принципиального характера. Оно связано с тем, что если на новую конфигурацию тела наложить жесткий поворот и перенос, то внутренний процесс деформирования от этого не изменится. Однако области несовместности, их объемы и расположение от этого жесткого смещения зависят и довольно существенно. Поэтому непосредственно способ [4] в общем случае использовать нельзя. Необходимо во всем множестве ситуаций найти что-то общее, что не зависит от смещений и поворотов тела как жесткого целого. Это можно сделать различными путями.

Вначале рассмотрим определения деформаций, которые относятся к точке тела, но могут «измеряться» на нелокальной базе. Затем перейдем к вариационному определению деформаций. И в заключение рассмотрим обобщение вариационного подхода на все тело в целом. Везде для наглядности ограничимся случаем плоской деформации.

**1. Интегральные меры деформаций.** Итак, пусть есть тело $S$, ограниченное контуром $L$. В определенный момент времени в этом теле реализуются перемещения

(1.1) $\qquad u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2),$

где $x_1$, $x_2$ — декартовы координаты материальной точки до деформации; $u_1$, $u_2$ — компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}$. В равенствах (1.1) содержится полная информация о том, что естественно будет назвать деформацией, но есть также и

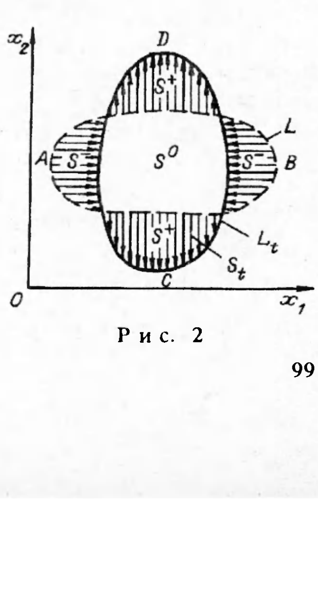


Рис. 2

привходящая информация, которая к деформациям никакого отношения не имеет. Ясно, что привходящая информация относится к повороту и смещению тела как жесткого целого. Задача состоит в том, чтобы выделить ее из равенств (1.1).

Поступим следующим образом. Пусть в теле вначале реализуются смещения (1.1). После этого наложим на поле (1.1) жесткий поворот на угол $\alpha$ и сдвиг на вектор $\{C_1, C_2\}$. В результате получим новое поле:

$$\tilde{u}_1(x_1, x_2) = u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha + x_1(\cos\alpha - 1) - x_2 \sin\alpha + C_1,$$
$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha + x_2(\cos\alpha - 1) + C_2. \tag{1.2}$$

Таким образом, любое заданное поле перемещений $\{u_1, u_2\}$ порождает бесконечное множество полей перемещений $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$. Элементы множества заполняют трехмерное пространство $\{C_1, C_2, \alpha\}$. С точки зрения теории деформаций все они должны быть неразличимыми. Иными словами, требуется найти что-то общее, что присуще каждому из элементов (1.2).

Здесь возможны различные подходы. В любом случае необходимо будет дать сравнение с классическими определениями. Поэтому начнем с варианта, который соответствует нелинейному тензору деформаций Коши — Грина.

Формулы (1.2) — это формулы векторного проектирования. Длина вектора при повороте остается неизменной. Поэтому если в (1.2) положить $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, то

$$(\tilde{u}_1 + x_1)^2 + (\tilde{u}_2 + x_2)^2 = (u_1 + x_1)^2 + (u_2 + x_2)^2. \tag{1.3}$$

Если квадрат длины обозначить как норму $\|\mathbf{u} + \mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$, то можно сказать, что все точки множества (1.2), расположенные на оси $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, имеют общий инвариант $\|\mathbf{u} + \mathbf{r}\|$.

Теперь задача состоит в том, чтобы из (1.2) исключить постоянные $C_1$, $C_2$, входящие в равенства аддитивным образом. Поэтому можно продифференцировать равенства и таким образом избавиться от постоянных. В результате этой операции вместо двух равенств (1.2) получим четыре ($i, j = 1, 2$):

$$\frac{\partial(\tilde{u}_1 + x_1)}{\partial x_i} = \cos\alpha \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_i} - \sin\alpha \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial(\tilde{u}_2 + x_2)}{\partial x_j} = \sin\alpha \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_j} + \cos\alpha \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_j}. \tag{1.4}$$

Для (1.4) способ (1.3) дает два инварианта:

$$\left\|\frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_1}\right\| = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_2 + x_2)\right]^2,$$
$$\left\|\frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_2}\right\| = \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1 + x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(u_2 + x_2)\right]^2.$$

В четырех равенствах (1.4) справа фигурирует только один параметр $\alpha$. Поэтому должен существовать третий инвариант. Так как обе производные $\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})/\partial x_i$ преобразуются по правилам векторного проектирования, то в качестве третьего инварианта можно взять их скалярное произведение

$$\frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_2} = \frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_1}\frac{\partial(u_1 + x_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial(u_2 + x_2)}{\partial x_2}.$$

Любые другие инварианты, например векторное произведение

$$\frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_1} \times \frac{\partial(\mathbf{u} + \mathbf{r})}{\partial x_2},$$

будут функциями указанных выше трех инвариантов.

Выбранные инварианты сразу приводят к нелинейному тензору деформаций Коши — Грина $\varepsilon_{ij}$:

$$2\varepsilon_{11} = 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 = \left\|\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{r})}{\partial x_1}\right\| - 1,$$

$$2\varepsilon_{22} = 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 = \left\|\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{r})}{\partial x_2}\right\| - 1,$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{r})}{\partial x_1}\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{r})}{\partial x_2}.$$

Таким образом, тензору деформаций Коши — Грина соответствует процедура исключения аддитивных постоянных с помощью операции дифференцирования. Очевидно, что это не единственный способ исключения.

Рассмотрим в некотором смысле противоположную процедуру — интегрирование. Поместим начало координат внутрь тела и проинтегрируем первое равенство (1.2) по $x_1$:

$$(1.5)\qquad \int_0^{x_1}(\tilde{u}_1 + x_1)\,dx_1 = \cos\alpha\int_0^{x_1}(u_1 + x_1)\,dx_1 - \sin\alpha\int_0^{x_1}(u_2 + x_2)\,dx_1 + C_1x_1.$$

Теперь постоянную $C_1$ можно исключить очень просто: например, разделить (1.5) на $x_1^2$, (1.2) на $x_1$ и вычесть из одного другое. Поступая так же со вторым равенством (1.2) и интегралами по $x_2$, получим четыре соотношения:

$$\tilde{w}_{1i} = \cos\alpha w_{1i} - \sin\alpha w_{2i},\quad \tilde{w}_{2j} = \sin\alpha w_{1j} + \cos\alpha w_{2j}$$

$$\left(w_{ij} = \frac{2(u_i + x_i)}{x_j} - \frac{2}{x_j^2}\int_0^{x_j}(u_i + x_i)\,dx_j\right).$$

Здесь считается, что все отрезки интегрирования принадлежат области определения $\mathbf{u}$. Выражения для $w_{ij}$ подобраны так, чтобы аффинному преобразованию

$$u_1 + x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\quad u_2 + x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

где $a_{ij} = \text{const}$, отвечали условия $w_{ij} = a_{ij}$.

Очевидно, что пары $\{w_{11}, w_{21}\}$, $\{w_{12}, w_{22}\}$ будут векторами. Значит, в качестве мер деформаций можно использовать объективные характеристики:

$$J_{11} = w_{11}^2 + w_{21}^2,\quad J_{22} = w_{12}^2 + w_{22}^2,\quad J_{12} = w_{11}w_{12} + w_{21}w_{22}.$$

Теперь все готово для обобщения. Пусть $L_1$, $L_2$ — линейные операторы, которые любую постоянную $C$ переводят в нуль: $L_iC \equiv 0$. Тогда $L_1(\mathbf{u}+\mathbf{r})$, $L_2(\mathbf{u}+\mathbf{r})$ будут векторами и в качестве операторных мер деформаций можно использовать следующие характеристики:

$$\|L_1(\mathbf{u}+\mathbf{r})\| = [L_1(u_1 + x_1)]^2 + [L_1(u_2 + x_2)]^2,$$

$$\|L_2(\mathbf{u}+\mathbf{r})\| = [L_2(u_1 + x_1)]^2 + [L_2(u_2 + x_2)]^2,$$

$$L_1(\mathbf{u}+\mathbf{r})\,L_2(\mathbf{u}+\mathbf{r}) = L_1(u_1 + x_1)\,L_2(u_1 + x_1) + L_1(u_2 + x_2)\,L_2(u_2 + x_2).$$

Как отмечалось, нелинейному тензору деформаций Коши — Грина соответствуют операторы $L_i = \partial/\partial x_i$. Для сред с микроструктурой меры деформаций могут строиться на более сложных операторах, например $L_i = \partial/\partial x_i + \lambda\partial^2/\partial x_i^2$ ($\lambda$ — параметр размерности длины) и т. д.

**2. Вариационное определение деформаций.** Итак, любое заданное поле перемещений (1.1) порождает множество полей (1.2). Как отмечалось, для любых мер деформаций все элементы этого множества должны быть неразличимыми. При классическом определении и подходе, рассмотренном в п. 1, вычисляются инвариантные характеристики, свойственные всем элементам множества (1.2). Возможен и совершенно другой подход: не искать инварианты (1.2), а выделить один, в каком-то смысле избранный (базовый), элемент из (1.2). И уже сам этот элемент рассматривать как характеристику процесса деформирования. Требование объективности здесь означает только одно: базовое поле перемещений не должно зависеть от отправного элемента из (1.2). В качестве исходного могут выступать как само поле $\{u_1, u_2\}$, так и любое другое поле из (1.2). Каждый раз смещения должны получаться одними и теми же.

Базовое поле характеризуется тем, что уже не содержит привходящих поворота и смещения тела как жесткого целого. Поэтому для данного поля уже можно дать объективную процедуру количественных и качественных оценок типа указанных выше (см. рис. 2) [5].

Таким образом, на этом пути изменения формы тела будут характеризоваться определенным полем перемещений. Такое обстоятельство затрудняет сравнение с известными мерами деформаций, так как последние носят локальный характер. «Мост» можно перебросить только для одного случая, когда тело имеет малые размеры, т. е. представляет собой малую окрестность точки $(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2)$.

Итак, пусть для такого тела задано поле смещений (1.1). Смещения характеризуют склонность точек тела к перемене мест. Если тело жесткое, то выбором постоянных $C_1$, $C_2$ и $\alpha$ можно добиться, чтобы смещения стали равными нулю: $\tilde{u}_i \equiv 0$. Если тело деформируется, то это сделать невозможно.

Естественно в качестве базовой выбрать такую ситуацию, когда склонность к перемене мест точек тела будет наименьшей.

Возьмем угол $\alpha$ таким, чтобы поле $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ $(x_1, x_2)$ было как можно ближе к постоянному. Тогда выбором констант $C_i$ его можно приблизить к нулю. У нас нет никаких оснований отдавать преимущество ни одной из координат $x_1$, $x_2$. Поэтому примем максимально простую и симметричную норму:

(2.1) $$\Pi = \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}\right)^2 \underset{\alpha}{\to} \min.$$

Условие $\partial\Pi/\partial\alpha = 0$ приводит к результату

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}.$$

Отсюда

(2.2) $$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{u_{21} - u_{12}}{u_{11} + u_{22} + 2};$$

(2.3) $$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} = \frac{(1 + u_{11})(2 + u_{11} + u_{22}) + u_{21}(u_{21} - u_{12})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} - 1,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} = \frac{u_{12}(2 + u_{11} + u_{22}) + (1 + u_{22})(u_{21} - u_{12})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} =$$

$$= \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} = \frac{-(1 + u_{11})(u_{21} - u_{12}) + u_{21}(2 + u_{11} + u_{22})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}},$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} = \frac{-u_{12}(u_{21} - u_{12}) + (1 + u_{22})(2 + u_{11} + u_{22})}{\sqrt{(u_{21} - u_{12})^2 + (2 + u_{11} + u_{22})^2}} - 1,$$

где $u_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$. Само базовое поле имеет вид

$$\tilde{u}_i = \frac{\partial \tilde{u}_i(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2)}{\partial x_j} x_j.$$

Компоненты (2.3) образуют симметричный тензор второго ранга. В обозначениях [2, с. 90] они совпадают с компонентами тензора $(G_{ij}^{\times 1/2} - \delta_{ij})$, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Здесь необходимо подчеркнуть одно обстоятельство. Для тензоров конечных деформаций определенную трудность представляет механическая интерпретация их компонент. Причем если для компонент малых деформаций

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

проблем нет, то для нелинейных тензоров больших деформаций все существенно осложняется.

Можно поставить вопрос: существует ли тензор конечных деформаций, компоненты которого имеют в точности такой же механический смысл, что и компоненты тензора бесконечно малых деформаций? Равенства (2.3) отвечают на этот вопрос положительно: такой тензор существует и единствен. В этом смысле тензор (2.3) имеет определенное преимущество перед остальными тензорами конечных деформаций. Кроме того, тензор (2.3) удовлетворяет вариационному принципу (2.1). Последнее обстоятельство позволяет перейти к нелокальным обобщениям. Здесь удобно ввести понятие эталонного тела.

**3. Метод эталонных полей.** Пусть эталонное тело той же формы, что и исследуемое тело до деформации, но является абсолютно жестким. Поле смещений реального тела имеет вид (1.1), а эталонного

$$u_1^0 = x_1(\cos\beta - 1) - x_2\sin\beta + B_1, \quad u_2^0 = x_1\sin\beta + x_2(\cos\beta - 1) + B_2 \tag{3.1}$$

($\beta$, $B_1$, $B_2$ = const). При каких значениях постоянных $\beta$, $B_i$ поле смещений эталонного тела будет наиболее близким к полю действительных смещений (1.1)? Поскольку речь идет о близости двух векторных полей, то необходимо ввести норму для ее оценки. Естественно взять такую норму, которая при уменьшении размеров тела до окрестности точки $(x_1^0, x_2^0)$ переходит фактически в норму (2.1). Этому требованию удовлетворяет следующая норма (которая, кстати, является самой простой):

$$\iint_S [(u_1 - u_1^0)^2 + (u_2 - u_2^0)^2]\, dS \to \min. \tag{3.2}$$

Здесь $S$ — область, занятая телом до деформации, т. е. область определения функций (1.1), (3.1). Ограничимся случаем, когда эта область конечна, так что все интегралы существуют и конечны.

Все выкладки упрощаются, если начало координат поместить в центр тяжести тела, а координатные оси направить вдоль главных осей сечения:

$$\iint_S x\, dS = 0, \quad \iint_S y\, dS = 0, \quad J_{xy} = \iint_S xy\, dS = 0.$$

Подставляя (3.1) в (3.2) и приравнивая нулю производные по $B_1$, $B_2$ и $\beta$, получим

$$B_1 = \frac{1}{S}\iint_S u_1(x_1x_2)\, dS, \quad B_2 = \frac{1}{S}\iint_S u_2(x_1x_2)\, dS, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\iint_S (x_1u_2 - x_2u_1)\, dS}{\iint_S (x_1u_1 + x_2u_2 + x_1^2 + x_2^2)\, dS} = -\frac{\iint_S \mathbf{u} \times \mathbf{r}\, dS}{\iint_S (\mathbf{u} + \mathbf{r})\mathbf{r}\, dS},$$

где $S$ — площадь сечения. Таким образом, для определения базовых смещений от исходных равенств (1.1) необходимо перейти к (1.2), положив $C_i = -B_i$ и $\alpha = -\beta$, или поле смещений $\{u_1, u_2\}$ является базовым, если для него все интегралы (3.3) равны нулю.

При локальном подходе неважно, оперируем ли значениями смещений во всей окрестности точки $(x_1^0, x_2^0)$ или только на ее границе (локально гладкое поле смещений всегда является аффинным). При нелокальном подходе это уже не так. Однако все построения легко провести и для случая, когда можно оперировать значениями перемещений только на границе. Здесь норму (3.2) можно заменить на следующую:

$$\int_L [(u_1 - u_1^0)^2 + (u_2 - u_2^0)^2]\, dl \to \min \tag{3.4}$$

($L$ — граница, $dl$ — ее элемент). Если оси координат выбрать так, чтобы

$$\int_L x_1\, dl = 0, \quad \int_L x_2\, dl = 0, \quad \int_L x_1x_2\, dl = 0, \tag{3.5}$$

то

(3.6) $$B_1 = \frac{1}{L}\int_L u_1\,dl, \quad B_2 = \frac{1}{L}\int_L u_2\,dl,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\int_L (x_1u_2 - x_2u_1)\,dl}{\int_L (x_1u_1 + x_2u_2 + x_1^2 + x_2^2)\,dl} = -\frac{\int_L \mathbf{u}\times\mathbf{r}\,dl}{\int_L (\mathbf{u}+\mathbf{r})\,\mathbf{r}\,dl}$$

($L < \infty$ — длина границы).

Сопоставим теперь полученные «глобальные» формулы с локальными. Для этого предположим, что область $S$ стягивается к точке $(x_1^0, x_2^0)$. Тогда формулы (3.3), (3.6) дают

(3.7) $$B_1 = u_1(x_1^0, x_2^0), \quad B_2 = u_2(x_1^0, x_2^0), \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{u_{21} - u_{12}}{2 + u_{11} + u_{22}}.$$

При выводе (3.7) использовалось ограничение на закон стягивания к точке $(x_1^0, x_2^0)$:

в случае (3.3)

$$\int_S x_1^2\,dS = \int_S x_2^2\,dS,$$

в случае (3.6)

$$\int_L x_1^2\,dl = \int_L x_2^2\,dl.$$

Нетрудно показать, что результат (3.7) соответствует принципу

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{\partial(u_i - u_i^0)}{\partial x_j}\right]^2 \to \min,$$

т. е. фактически совпадает с (2.1). Таким образом, базовому полю смещений, построенному на основе нелокальных формул (3.3) или (3.6), соответствует нелинейный тензор конечных деформаций (2.3).

Введение понятия эталонного тела позволяет сделать еще один шаг в определении нелокальных мер деформаций. Норма (3.4) использовалась для того, чтобы понять, какой жесткий поворот и перенос содержатся в исходном поле перемещений. Поэтому поле смещений эталонного тела можно рассматривать как аппроксимацию действительного поля в классе (3.1) по норме (3.4), или, иными словами, формулы (3.3), (3.6) позволяют выделить из (1.1) жесткий поворот и перенос. Но ничто не мешает сделать следующий шаг и таким же образом выделить общую аффинную деформацию.

Пусть эталонное тело совпадает с исходным телом до деформации и может испытывать произвольную однородную аффинную деформацию

(3.8) $$u_1^* = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + A_1, \quad u_2^* = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + A_2,$$

где $u_i^*$ — компоненты смещений эталонного тела; $b_{ij}$, $A_i$ — произвольные постоянные. Постоянные в (3.8) подберем так, чтобы поле (3.8) было как можно ближе к заданному полю (1.1). Если принять норму

$$\iint_S [(u_1 - u_1^*)^2 + (u_2 - u_2^*)^2]\,dS \to \min,$$

то придем к следующему результату: наиболее близким к полю (1.1) в классе аффинных полей (3.8) является поле

(3.9) $$u_1^* = \frac{\iint_S u_1x_1\,dS}{\iint_S x_1^2\,dS}\,x_1 + \frac{\iint_S u_1x_2\,dS}{\iint_S x_2^2\,dS}\,x_2 + \frac{\iint_S u_1\,dS}{S},$$

$$u_2^* = \frac{\iint_S u_2x_1\,dS}{\iint_S x_1^2\,dS}\,x_1 + \frac{\iint_S u_2x_2\,dS}{\iint_S x_2^2\,dS}\,x_2 + \frac{\iint_S u_2\,dS}{S}.$$

Здесь, как и прежде, начало координат в центре тяжести сечения; $Ox_1$, $Ox_2$ — главные оси сечения $S$.

Аналогично можно поступить, если задана только информация о смещениях на контуре. Пусть

$$\int\limits_L [(u_1 - u_1^*)^2 + (u_2 - u_2^*)^2]\, dl \to \min.$$

Тогда наиболее близким к исходному будет поле

$$u_1^* = \frac{\int\limits_L u_1 x_1\, dl}{\int\limits_L x_1^2\, dl} x_1 + \frac{\int\limits_L u_1 x_2\, dl}{\int\limits_L x_2^2\, dl} x_2 + \frac{\int\limits_L u_1\, dl}{L}, \tag{3.10}$$

$$u_2^* = \frac{\int\limits_L u_2 x_1\, dl}{\int\limits_L x_1^2\, dl} x_1 + \frac{\int\limits_L u_2 x_2\, dl}{\int\limits_L x_2^2\, dl} x_2 + \frac{\int\limits_L u_1\, dl}{L}.$$

Начало координат и оси выбраны так, чтобы выполнялись равенства (3.5).

Отметим, что теперь перенос и поворот тела как жесткого можно определять двумя путями: непосредственно по формулам (3.3), (3.6) либо вначале путем выделения общего аффинного преобразования (3.9), (3.10) и затем уже выделением из него поворота и переноса по формулам (3.3), (3.6). Нетрудно показать, что в обоих случаях получим один и тот же результат, т. е. в рамках сделанных построений эти операции перестановочны.

Таким образом, из действительного и в общем случае нелинейного поля смещений можно выделить жесткий поворот, перенос и, кроме того, определенное аффинное преобразование. Последнее обстоятельство позволяет проследить еще одну связь между локальным и нелокальным подходами к понятию деформаций. Действительно, локально любое преобразование можно рассматривать как аффинное. Поэтому если известно, что аффинному преобразованию подвержено все тело, то условие малости элементарного объема для определения компонент деформаций становится излишним. В этом случае тензор можно отнести ко всему телу в целом.

Формулы (3.9), (3.10) позволяют получить такой же результат и в общем случае. Здесь для определения тензора можно использовать любые локальные формулы конечных деформаций. Например, формулы (2.3), где необходимо сделать замену

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \to \frac{\iint\limits_S u_i x_j\, dS}{\iint\limits_S x_j^2\, dS}.$$

При решении ряда задач описанные подходы удобны не только для получения интегральных оценок [4, 5], но и для формулировки определяющих уравнений [6].

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
2. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
3. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // ДАН СССР.— 1979.— Т. 246, № 3.
4. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О расчете локализованных течений сыпучей среды в радиальных каналах // ФТПРПИ.— 1990.— № 1.
5. **Ревуженко А. Ф.** Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ.— 1986.— № 5.
6. **Ревуженко А. Ф.** Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщения 1, 2, 3 // ФТПРПИ.— 1990.— № 4, 5; 1991.— № 5.


*г. Новосибирск*

*Поступила 23/XII 1992 г.*