УДК 532.59+539.3:534.1

КРАЕВЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ СУДНА В ЛЕДОВОМ КАНАЛЕ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

С использованием метода Винера — Хопфа построено аналитическое решение задачи о волнах, возникающих в жидкости и ледяном покрове при равномерном движении области давления, моделирующей судно на воздушной подушке, по свободной поверхности жидкости в разводье ледяного покрова. Ледяной покров моделируется двумя тонкими полубесконечными вязкоупругими пластинами постоянной толщины, плавающими на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины и разделенными полосой свободной поверхности жидкости. В движущейся системе координат прогиб пластин и возвышение жидкости полагаются установившимися. Исследованы волновые силы, возвышение свободной поверхности жидкости, прогиб и деформации пластин при различных скоростях движения судна и толщинах ледяного покрова. Показано, что при некоторых значениях скорости движения, толщины ледяного покрова и действующего давления возможно разрушение ледяного покрова вблизи кромки.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, краевые волны, плавающая вязкоупругая пластина, дисперсионные соотношения, волновые силы, преобразование Фурье, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20190508

Введение. Движение судов в северных морях играет важную роль в обеспечении снабжения населения северных территорий. Северный морской путь — кратчайший морской путь, связывающий Европу со странами Азиатско-Тихоокеанского региона. Поэтому изучение влияния ледяного покрова на волновые характеристики, а также на стационарные и движущиеся объекты представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Настоящая работа является продолжением цикла работ [1–3], в которых изучались волновые явления, возникающие при воздействии движущейся нагрузки на неоднородный ледяной покров, а также на свободную поверхность жидкости при наличии полубесконечного ледяного покрова. Решения этих задач получены методом Винера — Хопфа. В [4] решение аналогичной задачи найдено методом сращивания разложений по собственным функциям, а в [5] получено численное решение с использованием методов источников и конечных разностей. Обзор выполненных ранее исследований по данной тематике приведен в указанных выше работах.

Известно, что при движении судна в ледовом канале и канале с твердыми стенками возникают резонансные явления [6, 7]. При определенных значениях скорости и волновых чисел возникают захваченные или краевые моды. В работах [6, 7] показано, что ледовый канал является волноводом для поверхностных и изгибно-гравитационных волн, существуют волноводные моды (решения однородной задачи), распространяющиеся вдоль канала и экспоненциально затухающие в перпендикулярных направлениях. Трещина в ледяном покрове является предельным случаем ледового канала при стремлении его ширины к нулю [6]. Краевые волны в жидкости под ледяным покровом с трещиной в задаче дифракции изучались в работах [8, 9], при периодической по времени нагрузке — в [10, 11], при движущейся нагрузке — в [2].

В данной работе исследуются волны в ледяном покрове и в жидкости, а также волновые силы и деформации при равномерном движении области давления по свободной поверхности ледового канала при различных скоростях. Показано существование краевых мод. С помощью преобразования Фурье и метода Винера — Хопфа построено приближенное аналитическое решение, в котором структурное демпфирование пластины учитывается только при вычислении действительных корней дисперсионного соотношения. В этом случае полюсы решения удаляются от действительной оси, и вычисление обратного преобразования Фурье не вызывает затруднений.

1. Постановка задачи. Ледяной покров моделируется полубесконечными вязкоупругими пластинами постоянной толщины h, плавающими на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H и разделенными бесконечной полосой свободной поверхности жидкости шириной L. Модуль Юнга E полагается постоянным по толщине пластины [12]. Рассматривается движение пластин и жидкости под действием давления, приложенного в локальной области, движущейся с постоянной скоростью по свободной поверхности жидкости вдоль канала. В работе [13] показано, что завышенные значения волнового сопротивления при малых числах Фруда уменьшаются при использовании сглаженного распределения давления.

Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром O на кромке левой пластины, осью Ox, перпендикулярной кромке, осью Oy, направленной вдоль кромки, и осью Oz, направленной вертикально вверх. Левая пластина занимает область $x < 0$, правая пластина — область $x > L$. Предполагается, что судно движется по свободной поверхности жидкости вдоль канала. Распределение внешнего давления в случае неподвижной нагрузки является сглаженным по продольной координате [13]:

$$q(x,y) = \frac{q_0}{2} \begin{cases} \operatorname{th}(\varkappa(y+b)) - \operatorname{th}(\varkappa(y-b)), & |x - x_0| < a, \\ 0, & |x - x_0| > a. \end{cases}$$

Здесь $\varkappa$ — параметр сглаживания; x_0 — абсцисса центра области давления; $2a$, $2b$ — ширина и характерная длина области давления; $x_0 - a > 0$; $x_0 + a < L$; $q_0 = gM/(4ab)$; M — масса движущегося тела; g — ускорение свободного падения. Область давления движется со скоростью V в положительном направлении оси Oy.

Потенциал течения жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1}$$

Общие уравнения для линейных вязкоупругих пластин можно получить из уравнений для упругих пластин, если заменить в них упругие константы вязкоупругими операторами [14]. Будем использовать вязкоупругий оператор вида

$$Q(t) = 1 + \tau\,\partial/\partial t,$$

где t — текущее время; τ — время релаксации. При этом в уравнении прогиба пластины цилиндрическая жесткость пластины D умножается на оператор $Q(t)$. Перейдем в систему координат $y' = y - Vt$, движущуюся вместе с областью давления (далее штрихи опускаются). Тогда прогиб пластин описывается уравнением

$$D\Big(1+\tau\Big(\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big)\Delta_2^2 w + \rho_0 h\Big(\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 w = p, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{1.2}$$

Выражение для гидродинамического давления p на всей поверхности жидкости имеет вид (на пластинах $q(x,y)=0$)

$$\frac{p}{\rho} = -\Big(\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi - gw - q(x,y) \qquad (z=0). \tag{1.3}$$

В (1.2), (1.3) $w(x,y)$ — вертикальное смещение пластины или возвышение свободной поверхности; ρ_0, ρ — плотности льда и жидкости; ν — коэффициент Пуассона; Δ_2 — оператор Лапласа по горизонтальным координатам.

Осадка пластин в воду не учитывается. Граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость $z=0$. На свободной поверхности давление равно нулю. На всей поверхности жидкости выполняется кинематическое соотношение

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial y}\Big)w = \varphi_z \qquad (z=0), \tag{1.4}$$

на дне — условие непротекания

$$\varphi_z = 0 \qquad (z=-H). \tag{1.5}$$

Края пластин свободны. Краевые условия на кромках для вязкоупругих пластин получаются из условий для упругих пластин умножением их на оператор $Q(t)$. Интегрируя полученные выражения по времени (в данном случае по координате y) и учитывая, что движение началось из состояния покоя, получаем краевые условия в том же виде, что и для упругих пластин [9]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \qquad (x=0,L,\ z=0). \tag{1.6}$$

На бесконечности ставится условие затухания возмущений.

Согласно линейной теории упругости деформации пластины изменяются по толщине по линейному закону. Тензор максимальных деформаций имеет вид

$$e(x,y) = -\frac{h}{2}\begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy}\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Главные значения деформаций определяются как собственные значения матрицы (1.7). Необходимо, чтобы деформации и напряжения не превышали предельных значений, при которых начинаются пластические деформации и разрушение. Экспериментально полученные в работе [15] критические значения максимальных деформаций для льда составляют $4{,}4\cdot 10^{-5} \div 8{,}5\cdot 10^{-5}$. В [16] использовалось критическое значение максимальных деформаций $e_* = 8\cdot 10^{-5}$. В данной работе также используется это значение.

2. Решение задачи. Введем безразмерные переменные и параметры

$$(x',y',z',x_0',L',a',b') = \frac{(x,y,z,x_0,L,a,b)}{H}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g H^4}, \quad F = \frac{V}{\sqrt{gH}}, \quad \sigma = \frac{\rho_0 h}{\rho H},$$

$$q_0' = \frac{q_0}{\rho g H}, \qquad \varepsilon = \frac{\tau V}{H}, \qquad \varkappa' = H\varkappa.$$

Далее штрихи будем опускать. Потенциал течения жидкости и прогиб пластины будем искать в виде

$$\varphi = VH\phi(x,y,z), \qquad w = HW(x,y).$$

Тогда, исключая время t из (1.1)–(1.6), для функций $\phi(x,y,z)$, $W(x,y)$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (z<0),$$
$$\phi_z=0 \quad (z=-1), \qquad \phi_z=-W_y \quad (z=0),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}+F^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{\partial y} \qquad (z=0,\quad 0<x<L), \tag{2.1}$$
$$\Big(\beta\Big(1-\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Delta_2^2+1+\sigma F^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\,\frac{\partial\phi}{\partial z}+F^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad (z=0,\ x\notin(0,L)),$$
$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z=0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(2-\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z=0 \quad (x=-0,L,\ z=0).$$

Вводя преобразование Фурье по переменным x и y:

$$\Phi(\alpha,s,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$

из уравнения Лапласа и условия непротекания на дне получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-(\alpha^2+s^2)\Phi=0 \qquad (-1<z<0),$$
$$\Phi_z=0 \qquad (z=-1).$$

Тогда

$$\Phi(\alpha,s,z)=C(\alpha,s)Z(\alpha,s,z), \quad Z(\alpha,s,z)=\operatorname{ch}\big((z+1)\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\big)/\operatorname{ch}\big(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\big), \tag{2.2}$$

где $C(\alpha,s)$ — неизвестная функция.

Применяя метод Винера — Хопфа [17] и вводя функции $D_\pm$, D_1, $G_\pm$, G_1 следующим образом:

$$D_-(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{-\infty}^{0}(\phi_z+F^2\phi_{yy})\big|_{z=0}\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$
$$D_1(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{0}^{L}(\phi_z+F^2\phi_{yy})\big|_{z=0}\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$
$$D_+(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{L}^{\infty}(\phi_z+F^2\phi_{yy})\big|_{z=0}\,\mathrm{e}^{i\alpha(x-L)}\,dx,$$
$$G_-(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{-\infty}^{0}\Big[\Big(\beta\Big(1-\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Delta_2^2+1+\sigma F^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z+F^2\phi_{yy}\Big]\Big|_{z=0}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$
$$G_1(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{0}^{L}\Big[\Big(\beta\Big(1-\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Delta_2^2+1+\sigma F^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z+F^2\phi_{yy}\Big]\Big|_{z=0}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$

$$G_+(\alpha,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}\,dy\int\limits_{L}^{\infty}\Big[\Big(\beta\Big(1-\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Delta_2^2+1+\sigma F^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z+F^2\phi_{yy}\Big]\Big|_{z=0}\mathrm{e}^{i\alpha(x-L)}\,dx,$$

находим

$$D(\alpha,s)=D_-(\alpha,s)+D_1(\alpha,s)+\mathrm{e}^{i\alpha L}\,D_+(\alpha,s)=C(\alpha,s)K_1(\alpha,s),$$
$$G(\alpha,s)=G_-(\alpha,s)+G_1(\alpha,s)+\mathrm{e}^{i\alpha L}\,G_+(\alpha,s)=C(\alpha,s)K_2(\alpha,s),$$

где $K_1(\alpha,s)$, $K_2(\alpha,s)$ — дисперсионные функции для жидкости со свободной поверхностью и жидкости, находящейся под вязкоупругой пластиной:

$$K_1(\alpha,s)=\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)-F^2s^2,$$
$$K_2(\alpha,s)=[\beta(1-i\varepsilon s)(\alpha^2+s^2)^2+1-\sigma F^2s^2]\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2})-F^2s^2. \qquad (2.3)$$

Из уравнений (2.1) и представления (2.2) получаем

$$G_-(\alpha,s)=0,\qquad G_+(\alpha,s)=0,\qquad D_1(\alpha,s)=isQ(\alpha,s),$$

где $Q(\alpha,s)$ — преобразование Фурье функции $q(x,y)$:

$$Q(\alpha,s)=\int\limits_{x_0-a}^{x_0+a}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(x,y)\,\mathrm{e}^{i(\alpha x-sy)}\,dy=\frac{2\pi q_0\,\mathrm{e}^{i\alpha x_0}\sin(\alpha a)\sin(sb)}{\alpha\varkappa\,\mathrm{sh}\,(\pi s/(2\varkappa))}.$$

Тогда

$$G(\alpha,s)=G_1(\alpha,s)=C(\alpha,s)K_2(\alpha,s); \qquad (2.4)$$
$$D_-(\alpha,s)+isQ(\alpha,s)+\mathrm{e}^{i\alpha L}\,D_+(\alpha,s)=C(\alpha,s)K_1(\alpha,s). \qquad (2.5)$$

Исключая из соотношений (2.4), (2.5) $C(\alpha,s)$, выводим уравнение

$$D_-(\alpha,s)+isQ(\alpha,s)+\mathrm{e}^{i\alpha L}\,D_+(\alpha,s)=G_1(\alpha,s)K(\alpha,s),\quad K(\alpha,s)=K_1(\alpha,s)/K_2(\alpha,s). \qquad (2.6)$$

Известно, что дисперсионное соотношение для гравитационных волн

$$K_1(\gamma)\equiv\gamma\,\mathrm{th}\,\gamma-F^2s^2=0$$

при фиксированном значении s имеет два действительных корня $\pm\gamma_0(s)$ и счетное множество мнимых корней $\pm\gamma_m(s)$, $m=1,2,\ldots$. При $\tau=0$ дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн под упругой пластиной

$$K_2(\mu)\equiv(\beta\mu^4+1-\sigma F^2s^2)\mu\,\mathrm{th}\,\mu-F^2s^2=0$$

имеет два действительных корня $\pm\mu_0(s)$, четыре комплексных корня, которые обозначим $\pm\mu_{-1}(s)$, $\pm\mu_{-2}(s)$, $\mu_{-2}=-\bar{\mu}_{-1}$ (черта обозначает комплексное сопряжение), и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\mu_m(s)$, $m=1,2,\ldots$. При $\tau\neq0$ значения корней смещаются с действительной и мнимой осей, численно найти их достаточно сложно, так как они могут быть близки к комплексным корням $\pm\mu_{-1}(s)$, $\pm\mu_{-2}(s)$. Поэтому будем учитывать структурное демпфирование приближенно, только для корня μ_0, что позволит сместить вещественный корень в комплексную плоскость. Корни дисперсионных соотношений (2.3) соответственно равны $\pm\chi_m$, $\pm\alpha_m$:

$$\chi_m(s)=\sqrt{\gamma_m^2(s)-s^2},\qquad \alpha_m(s)=\sqrt{\mu_m^2(s)-s^2}.$$

В последних выражениях значения комплексных корней выбираются в верхней полуплоскости, значения вещественных корней — на положительной полуоси. Если $|s|<\gamma_0(s)$, то

$\chi_0(s)$ — вещественный корень, в противном случае все корни χ_m чисто мнимые. Все корни $\alpha_m(s)$ комплексные.

Будем рассматривать следующие области аналитичности введенных функций: $S_+ = \{\alpha\colon \operatorname{Im}\alpha > -\lambda_0\}$, за исключением вещественного полюса $-\chi_0$, и $S_- = \{\alpha\colon \operatorname{Im}\alpha < \lambda_0\}$, за исключением вещественного полюса χ_0. Здесь $\lambda_0 = \min(\operatorname{Im}\alpha_m)$.

В соответствии с методом Винера — Хопфа факторизуем функцию $K(\alpha, s)$:

$$K(\alpha, s) = K_-(\alpha, s) K_+(\alpha, s).$$

Функции K_- и K_+ аналитичны по α соответственно в нижней и верхней полуплоскостях и определяются формулами

$$K_\pm(\alpha, s) = \frac{\mu_{-1}\mu_{-2}}{(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}\, N_\pm(\alpha, s), \qquad N_\pm(\alpha, s) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j(\alpha \pm \chi_j)}{(\alpha \pm \alpha_j)\gamma_j}.$$

При $|\alpha| \to \infty$ имеем $K_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-2})$, $N_\pm(\alpha, s) = O(1)$.

Умножая левую и правую части уравнения (2.6) на $\mathrm{e}^{-i\alpha L}(K_+(\alpha, s))^{-1}$, получаем

$$\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,\frac{D_-(\alpha, s)}{K_+(\alpha, s)} + is\,\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,\frac{Q(\alpha, s)}{K_+(\alpha, s)} + \frac{D_+(\alpha, s)}{K_+(\alpha, s)} = G_1(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,K_-(\alpha, s).$$

Представим второй член левой части этого уравнения в виде

$$is\,\frac{Q(\alpha, s)}{K_+(\alpha, s)} = q_1(s) P_2(\alpha)\,\frac{\psi(\alpha)}{N_+(\alpha, s)}, \qquad P_2(\alpha) = \frac{(\alpha + \alpha_{-1})(\alpha + \alpha_{-2})}{\mu_{-1}\mu_{-2}},$$

$$q_1(s) = \frac{\pi q_0 s \sin(sb)}{\varkappa \operatorname{sh}(\pi s/(2\varkappa))}, \qquad \psi(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha(x_0+a)} - \mathrm{e}^{i\alpha(x_0-a)}}{\alpha}.$$

Полином второй степени $P_2(\alpha)$ — функция, аналитическая во всей комплексной плоскости. С использованием представления [17]

$$\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,\frac{D_-(\alpha, s)}{N_+(\alpha, s)} = U_-(\alpha, s) + U_+(\alpha, s), \qquad \mathrm{e}^{-i\alpha L}\,\frac{\psi(\alpha)}{N_+(\alpha, s)} = \Omega_-(\alpha, s) + \Omega_+(\alpha, s),$$

$$U_\pm(\alpha, s) = \pm\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty\mp i\lambda}^{\infty\mp i\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\,D_-(\zeta, s)\,d\zeta}{N_+(\zeta, s)(\zeta - \alpha)}, \qquad \Omega_\pm(\alpha, s) = \pm\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty\mp i\lambda}^{\infty\mp i\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\,\psi(\zeta)\,d\zeta}{N_+(\zeta, s)(\zeta - \alpha)}$$

(функции $U_\pm$, $\Omega_\pm$ аналитичны по α соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; $\lambda < \lambda_0$) получаем уравнение

$$P_2(\alpha)\Big(\frac{D_+(\alpha, s)}{N_+(\alpha, s)} + U_+(\alpha, s) + q_1(s)\Omega_+(\alpha, s)\Big) =$$
$$= G_1(\alpha, s) K_-(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L} - P_2(\alpha)[U_-(\alpha, s) + q_1(s)\Omega_-(\alpha, s)],$$

в левой части которого содержится функция, аналитическая по α в верхней полуплоскости, а в правой части — функция, аналитическая в нижней полуплоскости. Следовательно, эти функции представляют аналитическую функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля данная функция является полиномом, степень которого определяется поведением функции на бесконечности по α. Имеем

$$U_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-1}), \qquad \Omega_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-1}), \qquad |\alpha| \to \infty.$$

Вблизи кромки пластины градиент потенциала имеет интегрируемую особенность $O(r^{-\eta})$ ($\eta < 1$; r — расстояние до кромки пластины). Тогда при $|\alpha| \to \infty$ имеем [18]

$$G_1(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\eta+3}), \qquad D_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\eta-1}).$$

Следовательно, степень полинома равна единице и

$$\frac{D_+(\alpha, s)}{N_+(\alpha, s)} + U_+(\alpha, s) + q_1(s)\Omega_+(\alpha, s) = q_1(s)\,\frac{c_1(s) + c_2(s)\alpha}{P_2(\alpha)},$$

где $c_1(s)$, $c_2(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из условий на кромке пластины.

Разделив левую и правую части уравнения (2.6) на $K_-(\alpha, s)$ и используя представление

$$\mathrm{e}^{i\alpha L}\,\frac{D_+(\alpha, s)}{N_-(\alpha, s)} = R_-(\alpha, s) + R_+(\alpha, s), \qquad \frac{\psi(\alpha)}{N_-(\alpha, s)} = \Psi_-(\alpha, s) + \Psi_+(\alpha, s),$$

$$R_\pm(\alpha, s) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\lambda}^{\infty\mp i\lambda} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L}\,D_+(\zeta, s)\,d\zeta}{N_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)}, \qquad \Psi_\pm(\alpha, s) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\lambda}^{\infty\mp i\lambda} \frac{\psi(\zeta)\,d\zeta}{N_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)},$$

$$\lambda < \lambda_0,$$

получаем уравнение

$$P_2(-\alpha)\,(D_-(\alpha, s)/N_-(\alpha, s) + R_-(\alpha, s) + q_1(s)\Psi_-(\alpha, s)) =$$
$$= G_1(\alpha, s)K_+(\alpha, s) - P_2(-\alpha)[R_+(\alpha, s) + q_1(s)\Psi_+(\alpha, s)].$$

Аналогично можно показать, что левая и правая части последнего уравнения представляют функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости, которая является полиномом первой степени:

$$\frac{D_-(\alpha, s)}{N_-(\alpha, s)} + R_-(\alpha, s) + q_1(s)\Psi_-(\alpha, s) = q_1(s)\,\frac{d_1(s) + d_2(s)\alpha}{P_2(-\alpha)}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{D_+(\alpha, s)}{N_+(\alpha, s)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\,D_-(\zeta, s)\,d\zeta}{N_+(\zeta, s)(\zeta - \alpha)} = q_1(s)\Big(\frac{c_1(s) + c_2(s)\alpha}{P_2(\alpha)} - \Omega_+(\alpha, s)\Big),\\
&\frac{D_-(\alpha, s)}{N_-(\alpha, s)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\lambda}^{\infty+i\lambda} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L}\,D_+(\zeta, s)\,d\zeta}{N_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)} = q_1(s)\Big(\frac{d_1(s) + d_2(s)\alpha}{P_2(-\alpha)} - \Psi_-(\alpha, s)\Big).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Определим функции $c_1(s)$, $c_2(s)$. Имеют место следующие равенства:

$$G_1(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,K_-(\alpha, s) = q_1(s)(c_1 + c_2\alpha) + P_2(\alpha)(q_1(s)\Omega_-(\alpha, s) + U_-(\alpha, s)),$$

$$C(\alpha, s) = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha L}}{K_-(\alpha, s)K_2(\alpha, s)}\{q_1(s)(c_1 + c_2\alpha) + P_2(\alpha)[q_1(s)\Omega_-(\alpha, s) + U_-(\alpha, s)]\},$$

$$\Phi(x, s, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-L)}\,Z(\alpha, s, z)}{K_-(\alpha, s)K_2(\alpha, s)}\,\{q_1(s)(c_1(s) + c_2(s)\alpha) +$$
$$+ P_2(\alpha)[q_1(s)\Omega_-(\alpha, s) + U_-(\alpha, s)]\}\,d\alpha,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-L)}\sqrt{\alpha^2+s^2}\;\operatorname{th}\sqrt{\alpha^2+s^2}}{K_-(\alpha,s)K_2(\alpha,s)}\,\bigl[q_1(s)(c_1+c_2\alpha)+$$

$$+P_2(\alpha)(q_1(s)\Omega_-(\alpha,s)+U_-(\alpha,s))\bigr]\,d\alpha.$$

Вычисляя в последнем выражении интеграл с помощью теории вычетов, при $x>L$ получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0)=i\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m(x-L)}\,\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(c_1(s)-c_2(s)\alpha_m)+f_{1m}(s)],$$

$$f_{1m}(s)=P_2(-\alpha_m)\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\chi_jL}(D_-(-\chi_j,s)+q_1(s)\psi(-\chi_j))}{N_+'(-\chi_j,s)(\alpha_m-\chi_j)}.$$

Краевые условия при $x=L$ записываются в виде

$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{(\alpha_m^2+\nu s^2)\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(c_1(s)-c_2(s)\alpha_m)+f_{1m}(s)]=0,$$
$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\alpha_m(\alpha_m^2+(2-\nu)s^2)\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(c_1(s)-c_2(s)\alpha_m)+f_{1m}(s)]=0. \qquad (2.8)$$

Получим условия для определения функций $d_1(s)$, $d_2(s)$. Имеем

$$G_1(\alpha,s)K_+(\alpha,s)=q_1(s)[d_1(s)+d_2(s)\alpha]+P_2(-\alpha)[q_1(s)\Psi_+(\alpha,s)+R_+(\alpha,s)],$$

$$\Phi(x,s,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,Z(\alpha,s,z)}{K_+(\alpha,s)K_2(\alpha,s)}\,\{q_1(s)[d_1(s)+d_2(s)\alpha]+$$

$$+P_2(-\alpha)[q_1(s)\Psi_+(\alpha,s)+R_+(\alpha,s)]\}\,d\alpha.$$

При $x<0$ находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0)=i\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha_m x}\,\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(d_1+\alpha_m d_2)+f_{2m}(s)],$$

$$f_{2m}(s)=P_2(-\alpha_m)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\chi_jL}(D_+(\chi_j,s)+q_1(s)\psi(\chi_j))}{N_-'(\chi_j,s)(\chi_j-\alpha_m)}.$$

При $x=0$ краевые условия имеют вид

$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{(\alpha_m^2+\nu s^2)\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(d_1(s)+d_2(s)\alpha_m)+f_{2m}(s)]=0,$$
$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\alpha_m(\alpha_m^2+(2-\nu)s^2)\mu_m\operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\,[q_1(s)(d_1(s)+d_2(s)\alpha_m)+f_{2m}(s)]=0. \qquad (2.9)$$

Ряды по m в выражениях (2.8), (2.9) можно вычислить точно. Выполним подстановку

$$\mu_m\operatorname{th}\mu_m=-\frac{K_1(\alpha_m,s)}{\beta(\alpha_m^2+s^2)^2-\sigma F^2s^2}$$

и аналогично тому, как это сделано в [1], преобразуем полученные соотношения, выражая их через вычеты в корнях η_k многочлена, стоящего в знаменателе последнего выражения:

$$\eta_k = \pm\bigl(\pm\sqrt{\delta/\beta} - s^2\bigr)^{1/2}, \qquad \delta = \sigma F^2 s^2.$$

Интегралы в системе (2.7) вычисляем с помощью теории вычетов. Вводя новые неизвестные

$$\xi_j = \frac{D_+(\chi_j, s)}{q_1(s)N_+(\chi_j, s)}, \qquad \zeta_j = \frac{D_-(-\chi_j, s)}{q_1(s)N_-(-\chi_j, s)},$$

запишем систему уравнений (2.7)–(2.9) в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi} - C\boldsymbol{\zeta} - A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}_1, \qquad \boldsymbol{\zeta} - C\boldsymbol{\xi} - A^-\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}_2, \\ G\boldsymbol{\zeta} + B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}_3, \qquad G\boldsymbol{\xi} + D\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}_4. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{F}_n$ — векторы с компонентами ξ_j, ζ_j, c_j, d_j, F_{nj}:

$$F_{1j} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\chi_m L}\,\psi(-\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)(\chi_m + \chi_j)}, \qquad F_{2j} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)(\chi_m + \chi_j)},$$

$$F_{31} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\chi_j L}\,\psi(-\chi_j)}{N'_-(\chi_j, s)}\,\Gamma_{1j}, \qquad F_{32} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\chi_j L}\,\psi(-\chi_j)}{N'_-(\chi_j, s)}\,\Gamma_{2j},$$

$$F_{41} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_j)}{N'_-(\chi_j, s)}\,\Gamma_{1j}, \qquad F_{42} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_j)}{N'_-(\chi_j, s)}\,\Gamma_{2j},$$

C, A, A^-, G, B, D — матрицы с компонентами

$$C_{jm} = \frac{\mathrm{e}^{i\chi_m L}\,N_+(\chi_m, s)}{N'_-(\chi_m, s)(\chi_m + \chi_j)}, \qquad A_{j1} = \frac{\mu_{-1}\mu_{-2}}{(\chi_j + \alpha_{-1})(\chi_j + \alpha_{-2})}, \qquad A_{j2} = \chi_j A_{j1},$$

$$G_{1m} = -\frac{\mathrm{e}^{i\chi_m L}\,N_+(\chi_m, s)}{N'_-(\chi_m, s)}\,\Gamma_{1m}, \qquad G_{2m} = \frac{\mathrm{e}^{i\chi_m L}\,N_+(\chi_m, s)}{N'_-(\chi_m, s)}\,\Gamma_{2m},$$

$$\Gamma_{1m} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)}\Bigl(\frac{K_+(\eta_k, s)P_2(\eta_k)}{\chi_m + \eta_k} - \frac{P_2(-\eta_k)}{K_+(\eta_k, s)(\chi_m - \eta_k)}\Bigr),$$

$$\Gamma_{2m} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2}\Bigl(\frac{K_+(\eta_k, s)P_2(\eta_k)}{\chi_m + \eta_k} + \frac{P_2(-\eta_k)}{K_+(\eta_k, s)(\chi_m - \eta_k)}\Bigr),$$

$$B_{11} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)}\Bigl(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)} - K_+(\eta_k, s)\Bigr), \qquad A^-_{j1} = A_{j1}, \quad A^-_{j2} = -A_{j2},$$

$$B_{12} = -\sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k^2 + s^2}\Bigl(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)} + K_+(\eta_k, s)\Bigr), \qquad D_{n1} = B_{n1}, \quad D_{n2} = -B_{n2},$$

$$B_{21} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2}\Bigl(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)} + K_+(\eta_k, s)\Bigr),$$

$$B_{22} = -\sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k(\eta_k^2 + (2-\nu)s^2)}{\eta_k^2 + s^2}\Bigl(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)} - K_+(\eta_k, s)\Bigr).$$

После решения системы (2.10) находим прогиб пластин и возвышение свободной поверхности. При $x > L$

$$W(x,y) = -\frac{q_0}{2\varkappa} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{isy}\sin{(sb)}}{\operatorname{sh}{(\pi s/(2\varkappa))}} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m(x-L)}\,\mu_m \operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)}\Big(c_1(s) - \alpha_m c_2(s) -$$

$$-P_2(-\alpha_m)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\chi_j L}(N_+(\chi_j,s)\zeta_j + \psi(-\chi_j))}{N_-'(\chi_j,s)(\alpha_m-\chi_j)}\Big)ds, \qquad (2.11)$$

при $x < 0$

$$W(x,y) = -\frac{q_0}{2\varkappa} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{isy}\sin{(sb)}}{\operatorname{sh}{(\pi s/(2\varkappa))}} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha_m x}\,\mu_m \operatorname{th}\mu_m}{K_+(\alpha_m,s)K_2'(\alpha_m,s)} \times$$

$$\times\Big(d_1(s) + \alpha_m d_2(s) - P_2(-\alpha_m)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\chi_j L}\,N_+(\chi_j,s)\xi_j + \psi(\chi_j)}{N_-'(\chi_j,s)(\alpha_m-\chi_j)}\Big)ds, \qquad (2.12)$$

при $0 < x < L$

$$W(x,y) = -\frac{q_0F^2}{2\varkappa} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{isy}\,s^2\sin{(sb)}}{\operatorname{sh}{(\pi s/(2\varkappa))}}\Big(\Lambda(x,s) + \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{N_+(\chi_j,s)(\mathrm{e}^{i\chi_j x}\,\zeta_j + \mathrm{e}^{i\chi_j(L-x)}\,\xi_j)}{K_1'(\chi_j,s)}\Big)\,ds,$$

$$\Lambda(x,s) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\chi_j K_1'(\chi_j,s)}\begin{cases} \mathrm{e}^{i\chi_j(x_0-x+a)} - \mathrm{e}^{i\chi_j(x_0-x-a)}, & 0 < x < x_0 - a, \\ \mathrm{e}^{i\chi_j(x_0-x+a)} + \mathrm{e}^{i\chi_j(x-x_0+a)} - 2, & |x - x_0| < a, \\ \mathrm{e}^{i\chi_j(x-x_0+a)} - \mathrm{e}^{i\chi_j(x-x_0-a)}, & x > x_0 + a. \end{cases} \qquad (2.13)$$

В формуле (2.13) член $\Lambda(x,s)$ представляет собой возвышение бесконечной свободной поверхности жидкости при движении области давления, а второй член учитывает влияние края пластины и взаимодействие с изгибно-гравитационными волнами. При обращении преобразования Фурье подынтегральные функции в формулах (2.11)–(2.13) экспоненциально затухают при $s \to \infty$.

В случае симметрии, когда центр области давления движется по центральной линии канала, имеем $x_0 = L/2$, $w(x,y) = w(L-x,y)$, $\varphi(x,y,z) = \varphi(L-x,y,z)$, $\Phi_+(\alpha,s,z) = \Phi_-(-\alpha,s,z)$, $\Phi_1(\alpha,s,z) = \mathrm{e}^{i\alpha L}\,\Phi_1(-\alpha,s,z)$, $\zeta_j = \xi_j$, $\mathrm{e}^{i\chi_j L}\,\psi(-\chi_j) = \psi(\chi_j)$, и система уравнений (2.10) принимает вид

$$\boldsymbol{\xi} - C\boldsymbol{\xi} - A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}_1, \qquad G\boldsymbol{\xi} + B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}_3.$$

Так как $\chi_0 = \sqrt{\gamma_0^2(s) - s^2}$, то $\chi_0(s) = 0$ при $\gamma_0(s) = s$. Уравнение $\gamma_0(s) - s = 0$ имеет единственный корень s_0, и подынтегральная функция в выражении (2.13) содержит корневую интегрируемую особенность при $s = s_0$. Путем замены переменной интегрирования подынтегральную функцию можно сделать регулярной. Замена переменной проводится следующим образом. Область интегрирования делится на два участка:

1) $0 < s < s_0$: $s = s_0\sin\zeta$, $0 < \zeta < \pi/2$;

2) $s > s_0$: $s = s_0\operatorname{ch}\zeta$, $0 < \zeta < \infty$.

Тензор деформаций пластины вычисляется по формулам (1.7). На кромках ледяного покрова ряды являются плохо сходящимися, поэтому нужно применить тот же метод суммирования рядов, который применялся при получении граничных условий на кромках.

Волновые числа симметричных краевых мод для канала шириной $L = 50$ м
при различных значениях толщины льда и скорости движения ($\tau = 0$)

$h = 0{,}5$ м			$h = 1$ м			$h = 2$ м			
$V = 5$ м/с, $s_0 =$ 39,24	$V = 10$ м/с, $s_0 =$ 9,8	$V = 15$ м/с, $s_0 =$ 4,36	$V = 5$ м/с, $s_0 =$ 39,24	$V = 10$ м/с, $s_0 =$ 9,8	$V = 15$ м/с, $s_0 =$ 4,36	$V = 10$ м/с, $s_0 =$ 9,8	$V = 15$ м/с, $s_0 =$ 4,36	$V = 20$ м/с, $s_0 =$ 2,41	$V = 21$ м/с, $s_0 =$ 2,16
39,65	10,65	4,36	39,65	10,75	4,97	10,77	5,43	2,79	2,32
42,46	14,52	15,33	42,46	14,60	8,70	14,61	8,80	6,30	5,95
46,49	18,09	17,05	46,49	18,13	11,39	18,13	11,43	8,37	7,95
50,77	21,15	18,60	50,78	21,16	13,56	21,17	13,57	10,03	9,53
54,98	23,84	20,02	54,98	23,85	15,43	23,85	15,44	11,45	10,89
59,01	26,26	21,34	59,02	26,27	17,10	26,27	17,11	12,72	12,10
66,52	28,49	22,58	66,52	28,50	18,63	28,50	18,63	13,87	13,20
70,02	30,56	23,76	70,02	30,56	20,04	30,56	20,04	14,94	14,21

При движении тела по свободной поверхности или ледяному покрову на него действуют боковая сила и сила волнового сопротивления, которые находятся следующим образом:

$$(R_x, R_y) = -\iint\limits_S q(x, y)(w_x, w_y)\,dx\,dy.$$

Безразмерные коэффициенты волновых сил A_x, A_y вычисляются по формулам [13]

$$(A_x, A_y) = -\frac{\rho g}{2q_0^2 a}\,(R_x, R_y).$$

3. Результаты численных расчетов. Выполнены численные расчеты для случая движения судна вдоль центральной линии ледового канала при следующих входных параметрах: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\rho_0 = 900$ кг/м^3, $\nu = 1/3$, $q_0 = 1000$ Н/м^2, $a = 10$ м, $b = 20$ м, $H = 100$ м, $\varkappa = 5/b$, $\tau = 0{,}7$ с. Ширина канала равна $L = 50$ м. Толщина ледяного покрова составляла $h = 0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}0$ м, при этом значения критической скорости c_m изгибно-гравитационных волн равны 12,062; 15,585; 20,086 м/с соответственно. Скорость движения нагрузки менялась в диапазоне от 2,5 до 25,0 м/с.

Расчеты, проведенные при $\tau = 0$, показали, что подынтегральные функции в выражениях (2.11)–(2.13) имеют разрывы или резко изменяются в некоторых узких областях. Это объясняется наличием краевых мод, т. е. существованием при определенных значениях волновых чисел s нетривиальных решений однородной системы уравнений (2.10). В таблице приведены низшие значения волновых чисел, для которых существуют краевые моды, при различных значениях толщины ледяного покрова и скорости движения нагрузки.

В работе [6] отмечено, что трещина в ледяном покрове является предельным случаем ледового канала при стремлении ширины канала к нулю. При движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной существуют только две краевые моды [2] с различными волновыми числами, причем только при сверхкритических скоростях движения нагрузки. При этом краевая мода с меньшим волновым числом распространяется за нагрузкой, а мода с большим волновым числом — перед ней. В случае ледового канала как при сверхкритических, так и при докритических скоростях движения нагрузки существует большое количество краевых мод.

Из таблицы следует, что при докритических скоростях движения нагрузки (меньших минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн в пластине c_m) волновые

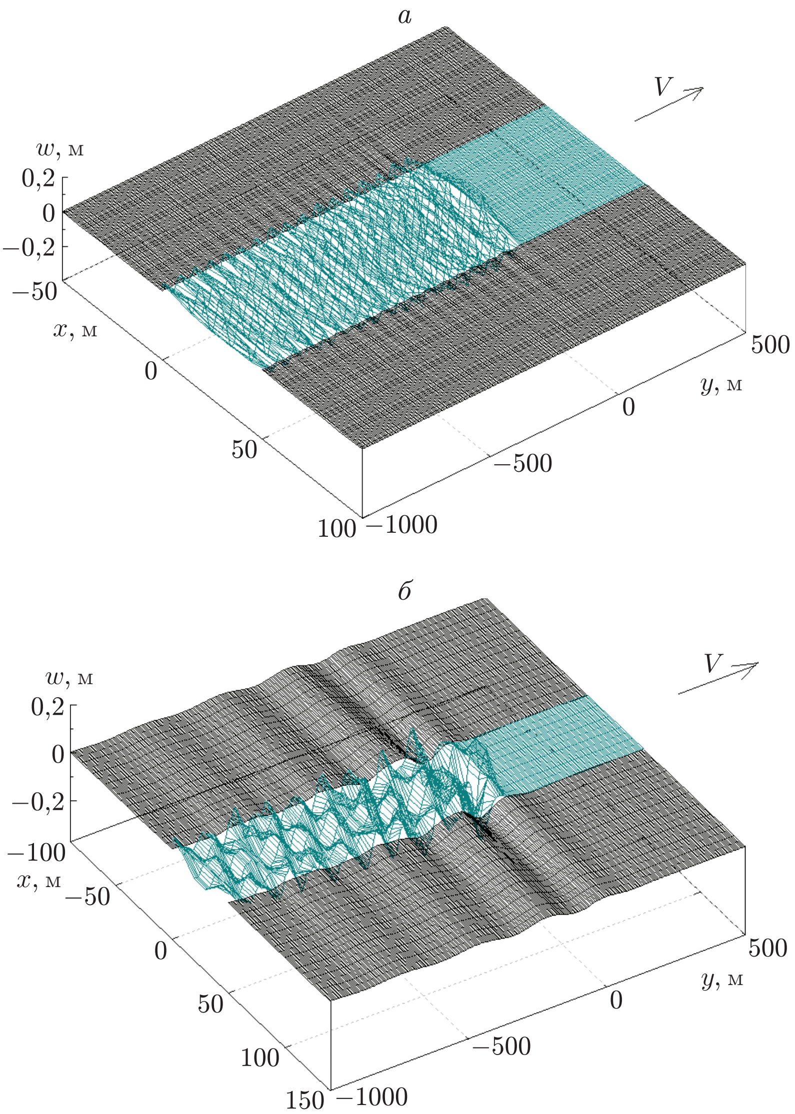

Рис. 1. Трехмерные распределения вертикальных смещений жидкости и пластины:
а — $V = 10$ м/с, $h = 1$ м, *б* — $V = 21$ м/с, $h = 2$ м

числа краевых мод практически не зависят от толщины пластины. При сверхкритических скоростях при увеличении толщины пластины расположение низших волновых чисел краевых мод в последовательности становится более плотным, а высшие практически не зависят от толщины пластины. При малых значениях времени релаксации $\tau \neq 0$ волновые числа краевых мод немного отличаются от значений, приведенных в таблице.

При докритических скоростях движения нагрузки в жидкости под пластиной вблизи кромки возбуждаются волны, которые быстро затухают вдали от нее. При сверхкритических скоростях возбуждаются изгибно-гравитационные волны, которые распространяются на большое расстояние от края и передают энергию на бесконечность. На рис. 1 представлены трехмерные распределения вертикальных смещений жидкости и пластины при докритической скорости $V = 10$ м/с и толщине ледяного покрова $h = 1$ м, а также при сверхкритической скорости $V = 21$ м/с и толщине ледяного покрова $h = 2$ м.

При малых значениях скорости движения нагрузки $V < 3$ м/с волны отсутствуют [19]. При 3 м/с $< V < 8$ м/с (при заданных значениях глубины и ширины канала) наблюдается

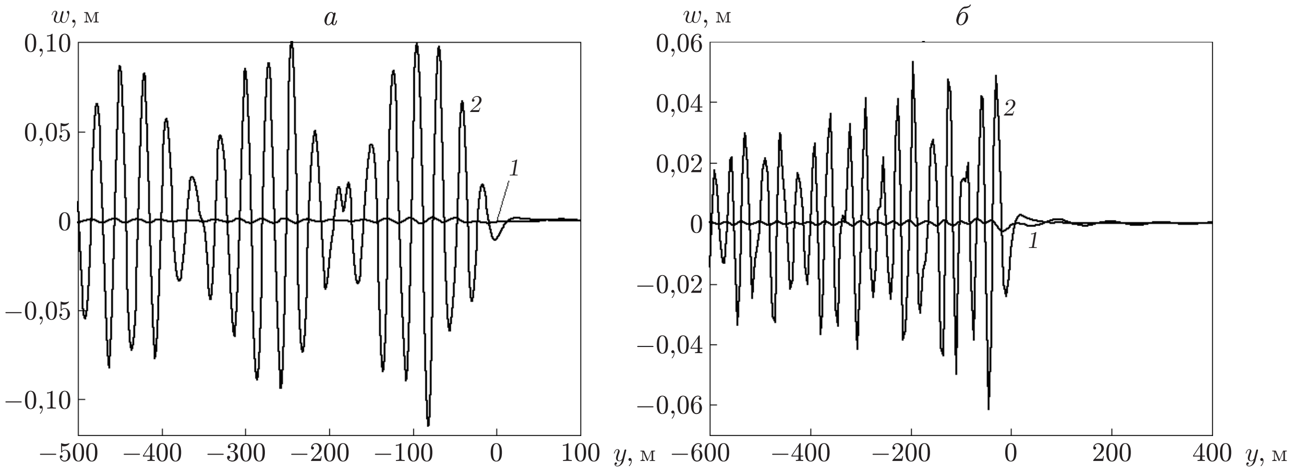

Рис. 2. Зависимость вертикальных смещений ледяного покрова толщиной $h = 1$ м (*1*) и жидкости (*2*) вблизи кромки от координаты y: *а* — $V = 6{,}86$ м/с, *б* — $V = 8{,}25$ м/с

модуляция волн. На рис. 2,*а* показаны зависимости вертикальных смещений ледяного покрова и жидкости вблизи кромки от координаты y при $V = 6{,}86$ м/с, $h = 1$ м. По-видимому, модуляция волн вызвана наложением волн, отраженных от краев ледяного покрова.

При движении нагрузки по ледяному покрову волны перед ней распространяются только при сверхкритических скоростях движения. Волны за нагрузкой имеют бо́льшие длину и амплитуду, чем перед ней. В случае ледового канала волны перед нагрузкой наблюдаются также в некотором диапазоне докритических скоростей. Это обусловлено влиянием краевых мод. Во всех проведенных расчетах при докритических скоростях длина волны в жидкости под пластиной перед нагрузкой больше длины волны за нагрузкой. На рис. 2,*б* показаны вертикальные смещения жидкости и ледяного покрова вблизи кромки при $V = 8{,}25$ м/с, $h = 1$ м. В этом случае модуляция волн отсутствует. Перед нагрузкой распространяется волна большей длины, чем за нагрузкой. Волна, распространяющаяся перед нагрузкой, имеет амплитуду того же порядка, что и за нагрузкой. Вдали от кромки возмущения в пластине быстро затухают. При сверхкритических скоростях движения нагрузки $V > c_m$ длина передней волны меньше длины волны за нагрузкой, как и в случае движения нагрузки по ледяному покрову.

На рис. 3 представлены зависимости вертикальных смещений ледяного покрова и жидкости вблизи кромки от координаты y при докритической скорости движения $V = 10$ м/с и толщине ледяного покрова $h = 0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}0$ м. Видно, что при докритических скоростях движения нагрузки амплитуды волн в жидкости слабо зависят от толщины льда, амплитуды волн в ледяном покрове становятся меньше при увеличении толщины льда. В этом случае также распространяются волны перед нагрузкой в жидкости под пластиной.

На рис. 4 приведены зависимости вертикальных смещений ледяного покрова толщиной $h = 2$ м и жидкости от координаты y при докритической скорости $V = 15$ м/с и сверхкритической скорости $V = 21$ м/с. Видно, что при переходе от докритического режима к сверхкритическому амплитуды волн в ледяном покрове существенно увеличиваются, а в жидкости становятся меньше, значительная часть энергии поверхностных волн преобразуется в энергию изгибно-гравитационных волн (см. рис. 1,*б*).

Проведенные расчеты показали, что при движении нагрузки по свободной поверхности в ледовом канале максимальные деформации льда наблюдаются вблизи кромки пластины. В случае толстого ледяного покрова ($h = 2$ м) при любых скоростях движения нагрузки

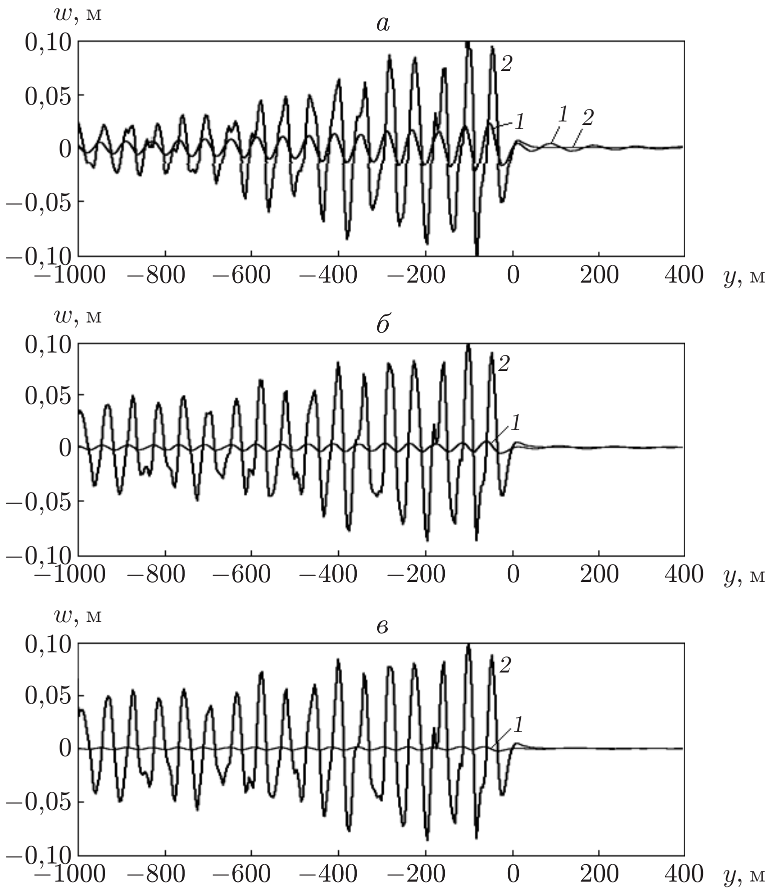

Рис. 3. Зависимость вертикальных смещений ледяного покрова (*1*) и жидкости (*2*) вблизи кромки от координаты y при $V = 10$ м/с и различных значениях толщины ледяного покрова:
а — $h = 0{,}5$ м, *б* — $h = 1$ м, *в* — $h = 2$ м

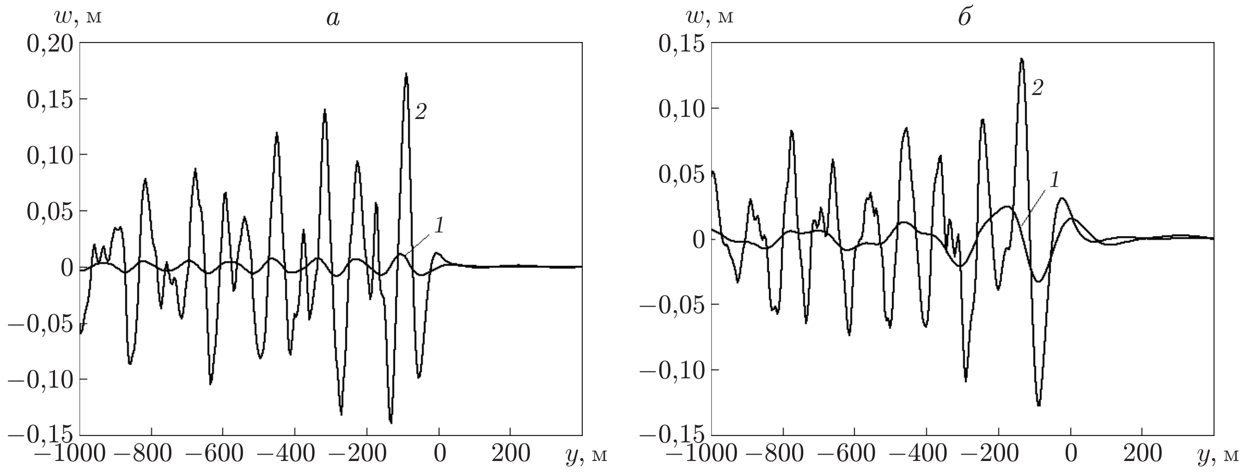

Рис. 4. Зависимость вертикальных смещений ледяного покрова толщиной $h = 2$ м (*1*) и жидкости (*2*) вблизи кромки от координаты y при различных скоростях движения:
а — $V = 15$ м/с, *б* — $V = 21$ м/с

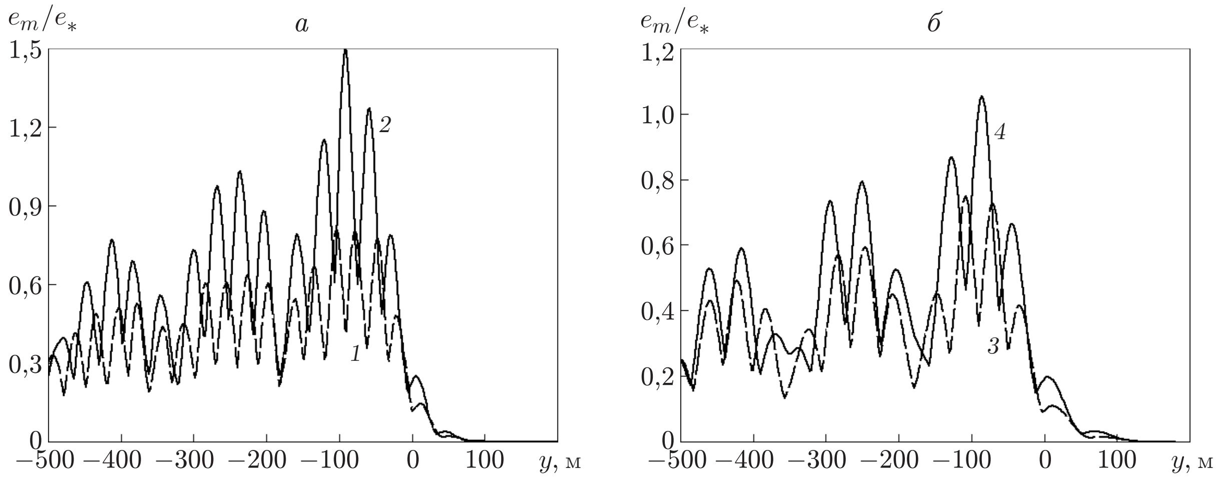

Рис. 5. Зависимость безразмерных максимальных деформаций ледяного покрова толщиной $h = 0{,}5$ м (*а*) и $h = 1$ м (*б*) вблизи кромки от координаты y:
1 — $V = 10$ м/с, *2* — $V = 11$ м/с, *3* — $V = 12{,}5$ м/с, *4* — $V = 13$ м/с

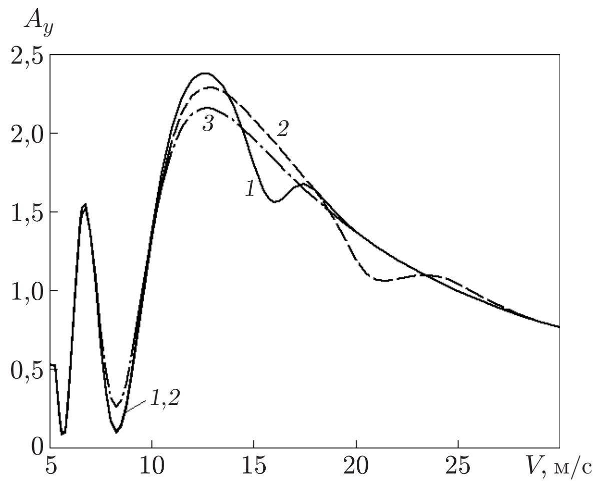

Рис. 6. Зависимость коэффициента волнового сопротивления от скорости при различных значениях толщины ледяного покрова:
1 — $h = 1$ м, *2* — $h = 2$ м, *3* — бесконечная свободная поверхность

максимальные деформации не превышали предельно допустимого значения e_*. На рис. 5 приведены зависимости безразмерных максимальных деформаций ледяного покрова вблизи кромки при $h = 0{,}5$; 1,0 м и скоростях $V = 10{,}0$; 11,0; 12,5; 13,0 м/с. Видно, что в случае ледяного покрова толщиной $h = 0{,}5$ м максимальные деформации вблизи кромки при скорости $V = 10$ м/с не превышают предельно допустимого значения e_*, а при $V = 11$ м/с превышают. В случае ледяного покрова толщиной $h = 1$ м при скорости $V = 12{,}5$ м/с максимальные деформации меньше критического значения e_*, а при $V = 13$ м/с — больше.

На рис. 6 представлены зависимости коэффициента волнового сопротивления от скорости при различных толщинах ледяного покрова, а также зависимость коэффициента волнового сопротивления от скорости для случая бесконечной свободной поверхности. Видно, что влияние ледового канала на волновое сопротивление проявляется не только при околокритических скоростях, но и при докритических в том же диапазоне скоростей, в котором образуются краевые волны перед нагрузкой. Значительное уменьшение силы волнового сопротивления при наличии ледяного покрова происходит при $V = 8{,}25$ м/с. Вертикальные смещения жидкости и ледяного покрова толщиной $h = 1$ м при этом значении скорости приведены на рис. 2,*б*. При околокритических и сверхкритических скоростях ледяной покров толщиной $h = 1$ м разрушается, поэтому зависимости коэффициента волнового сопротивления от скорости, приведенные на рис. 6, могут быть неверными. Однако в силу линейности задачи при уменьшении внешнего давления до величины, при которой деформации не превышают предельных значений, полученные зависимости остаются в силе. Из рис. 6 следует, что ледяной покров оказывает значительное влияние на величину волнового сопротивления.

Заключение. Получено аналитическое решение стационарной задачи о возбуждении волн нагрузкой, равномерно движущейся по свободной поверхности в ледовом канале. Найдены волновые числа краевых мод в ледяном канале. Исследовано влияние скорости нагрузки и толщины ледяного покрова на волновые силы и на характер генерируемых волн в жидкости и ледяном покрове, а также на деформации покрова. Обнаружено, что волны перед нагрузкой могут возбуждаться не только при сверхкритических, но и при докритических скоростях движения нагрузки вследствие наличия краевых мод. Показано, что при некоторых значениях скорости движения, толщины ледяного покрова и действующего давления возможно разрушение ледяного покрова вблизи кромки.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за внимание к работе и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ткачева Л. А.** Поведение полубесконечного ледяного покрова при равномерном движении нагрузки // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 82–98.
2. **Ткачева Л. А.** Волновое движение в ледяном покрове с трещиной при равномерном движении нагрузки // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 1. С. 17–35.
3. **Ткачева Л. А.** Волновые явления, возникающие при движении нагрузки по свободной поверхности жидкости вдоль кромки ледяного покрова // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 3. С. 73–84.
4. **Стурова И. В.** Движение внешней нагрузки по полубесконечному ледяному покрову в докритическом режиме // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 1. С. 51–60.
5. **Li Y., Liu J., Hu M., Zhang Z.** Numerical modeling of ice-water system response based on Rankine source method and finite difference method // Ocean Engng. 2017. V. 138. P. 1–8.
6. **Марченко А. В.** Резонансное взаимодействие волн в ледовом канале // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 6. С. 963–974.
7. **Porter R.** Trapping of waves by thin floating ice sheets // Q. J. Mech. Appl. Math. 2018. V. 71, N 4. P. 463–483. DOI: 10.1093/qjmam/hby014.
8. **Гольдштейн Р. В., Марченко А. В., Семенов А. Ю.** Краевые волны в жидкости под упругой пластиной с трещиной // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 3. С. 331–334.
9. **Evans D. V., Porter R.** Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth // J. Fluid Mech. 2003. V. 484. P. 143–165.
10. **Ткачева Л. А.** Краевые волны в жидкости под ледяным покровом с трещиной // Докл. АН. 2017. Т. 473, № 5. С. 545–551.
11. **Ткачева Л. А.** Воздействие локальной периодической по времени нагрузки на ледяной покров с трещиной // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 6. С. 133–148.
12. **Kerr A. D., Palmer W. T.** The deformations and stresses in floating ice plates // Acta Mech. 1972. V. 15. P. 57–72.

13. **Doctors L. J., Sharma S. D.** The wave resistance of an air-cushion vehicle in steady and accelerated motion // J. Ship Res. 1972. V. 16, N 4. P. 248–260.
14. **Фрейденталь А.** Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. М.: Физматгиз, 1962.
15. **Squire V., Martin S.** A field study of the physical properties, response to swell, and subsequent fracture of a single ice floe in the winter Bering sea: Tech. report / Univ. of Washington; N 18. Washington, 1980.
16. **Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.** The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.
17. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
18. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958.
19. **Rabaud M., Moisy F.** Ship wakes: Kelvin or Mach angle? // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. 214503.

Поступила в редакцию 13/XII 2018 г.,
после доработки — 25/II 2019 г.
Принята к публикации 25/III 2019 г.