Таким образом, проведенный анализ возбуждения автоколебаний вполне согласуется с наблюдаемыми в экспериментах явлениями.

Авторы выражают благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 27 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1944, т. 44, № 8.
2. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4.
4. *Joseph D. D., Carmi S.* Stability of poiseuille flow in pipes, annuli and channels.— «Quart. Appl. Math.», 1969, vol. 26, N 4.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.
6. *Schubauer G. B., Skramstad H. K.* Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate. NACA Tech. Rept. N 909.
7. *Голов В. К., Поляков Н. Ф., Тимофеев В. А.* Исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при малых дозвуковых скоростях.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1972, вып. 2.
8. *Поляков Н. Ф.* Исследование частотных спектров возмущений в ламинарном пограничном слое и области перехода.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1973, вып. 3.
9. *Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н.* Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости.— ПМТФ, 1970, № 2.

УДК 532.516

СПЕКТР МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

О. А. Лихачев

(Новосибирск)

В последнее время проведен тщательный анализ спектра малых возмущений ряда течений [1—3]. В то же время для пограничного слоя исследования в рамках линейной теории возмущений ограничивались окрестностью нейтральной кривой, хотя спектральный анализ представляет несомненный интерес не только для нахождения критерия устойчивости ламинарного потока, но и для решения задачи с начальными данными о развитии во времени произвольного малого возмущения. В частности, возможность представления произвольного возмущения через систему базисных функций связана с вопросом полноты системы. Ясно, что конечная система базисных функций не может быть полной. В работе [4] доказана конечность и получена оценка области существования собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя, и на этом основании сделан вывод о конечности спектра малых возмущений для течения в пограничном слое. Довольно полный обзор по исследованию нейтральной устойчивости ламинарного пограничного слоя можно найти в монографии [5].

В данной работе методами линейной теории гидродинамической устойчивости получен спектр малых возмущений течения в пограничном слое с использованием полных граничных условий на внешней границе. Показано, что спектр малых возмущений конечен для каждого фиксированного значения волнового числа α. Исследованы особенности поведения спектра при достаточно малых α.

При исследовании устойчивости пограничного слоя обычно принимается, что на внешней границе потока возмущение затухает как решение невязкой задачи

$$\varphi \sim e^{-\alpha y}.$$

В данной работе рассмотрены полные условия затухания возмущений на бесконечности, которые впервые были поставлены в [6]:

$$(\varphi''-\alpha^2\varphi)'+\gamma(\varphi''-\alpha^2\varphi)=0; \tag{1}$$

$$(\varphi''-\gamma^2\varphi)'+\alpha(\varphi''-\gamma^2\varphi)=0 \text{ при } y=\delta.$$

Здесь $\gamma=\gamma_r+i\gamma_e$,

$$\gamma_r=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad \gamma_e=\frac{b}{2\gamma_r},\quad a=\alpha^2+\alpha RY,$$

$$b=\alpha\,\mathrm{Re}\,(1-X),$$

где $C=X+iY$ — искомое собственное значение ($Y<0$ соответствует экспоненциальному затуханию возмущений); δ — толщина пограничного слоя. Штрих обозначает производную по y.

Для течения около плоской пластины уравнения пограничного слоя допускают автомодельные решения, и аффинные профили получаются введением преобразования подобия для независимой переменной и функции тока ψ в виде [7]

$$\eta=y\sqrt{\frac{U}{\nu x}};\quad \psi=\sqrt{\nu x U}\cdot f(\eta).$$

Это преобразование подобия приводит систему уравнений пограничного слоя к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2f'''+ff''=0,$$

$f=f'=0$ при $\eta=0$; $f'=1$ при $\eta=\delta$, здесь штрих обозначает производную по η. Продольная составляющая скорости при этом равна

$$u=\frac{1}{U}\frac{\partial\psi}{\partial y}=f',\quad 0\leqslant\eta\leqslant\delta. \tag{2}$$

В дальнейшем используется предположение о плоскопараллельности течения в пограничном слое с профилем (2).

Задача гидродинамической устойчивости плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к анализу спектра собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда

$$\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi-i\alpha\mathrm{Re}\,[(u-C)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-u''\varphi]=0$$

с условиями прилипания на стенке $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ и условиями (1) на внешней границе. При этом считается, что вне пограничного слоя при $\eta>\delta$ скорость постоянна и равна скорости потенциального течения U. Возмущения затухают на бесконечности, если $\gamma_r>0$. Здесь рассматриваются двумерные возмущения как наиболее опасные, поскольку в данном случае справедлива теорема Сквайра.

Более детально рассмотрим случай, когда фазовая скорость X близка к единице, так что $|b|\ll|a|$. Тогда, если допустить только положительные γ_r, непрерывное продолжение граничных условий при переходе X через единицу возможно только при $a>0$. Если же $a<0$, как это и реализуется в действительности при достаточно малых значениях волнового числа α, то при переходе через $X=1$ граничные условия будут изменяться скачком, так как γ_e терпит разрыв; в окрестности $X=1$

$$\gamma_r = \frac{|b|}{2\sqrt{|a|}}; \quad \gamma_e = \operatorname{sign} b \sqrt{|a|}.$$

Таким образом, спектр затухающих возмущений не может быть непрерывно продолжен через волновое число, при котором $X=1$. Назовем такое волновое число α_* предельным. По-видимому, при $\alpha<\alpha_*$ спектра для затухающих на бесконечности возмущений просто не существует.

Если снять ограничение $\gamma_r>0$, то непрерывный переход через α_* можно осуществить при выборе ветвей

$$\gamma_r = \frac{b}{2\sqrt{|a|}}; \quad \gamma_e = \sqrt{|a|}.$$

Это соответствует тому, что при $X<1$ возмущения на бесконечности затухают, а при $X>1$ — нарастают. Поэтому при численных расчетах принималось

$$\gamma_r = \frac{b}{2\gamma_e}; \quad \gamma_e = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

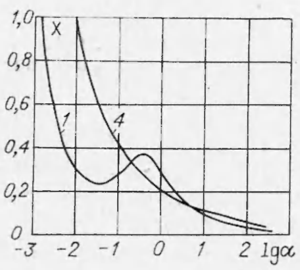
но следует помнить, что возмущения с $X>1$ физического смысла не имеют. Численное решение задачи осуществлялось с помощью метода, предложенного в работе [8].

Поиск спектра проводился методом перехода по параметру от известного спектра для течения в канале. На внешней границе пограничного слоя для возмущений ставились условия в виде

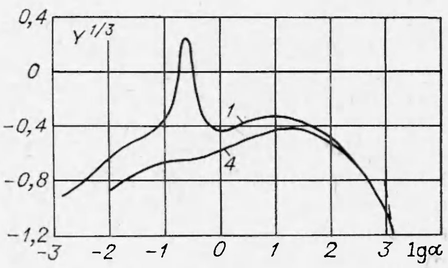
$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^2+B & AB\\ A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi''\\ \varphi'''\end{pmatrix}(1-\varepsilon),$$

где $A=-(\gamma+\alpha)/\alpha\gamma$; $B=-1/\alpha\gamma$; ε — параметр, которому при $\varepsilon=0$ соответствуют условия (1), а при $\varepsilon=1$ — условия прилипания. В канале при $\alpha\ll1$ известно асимптотическое выражение для спектра [2], используя которое, непрерывным переходом по α можно построить весь спектр малых возмущений. Выполняя затем непрерывный переход по параметру ε для фиксированного значения волнового числа α, мы реализуем переход от условий прилипания на внешней границе к условиям затухания возмущений на бесконечности. В канале при $\alpha\gg1$ возмущения делятся на два класса: пристенные, для которых $X\to0$, и приосевые с фазовой скоростью $X\to1$. Для приосевых мод после перехода по параметру ε возмущения имеют фазовую скорость $X>1$ при всех значениях волнового числа α, т. е. полученные моды не удовлетворяют физическому требованию затухания возмущений на бесконечности и должны быть исключены из рассмотрения. Таким образом, в пограничном слое отсутствуют коротковолновые возмущения, локализованные около внешней границы потока. Нумерация мод спектра для течения в пограничном слое соответствует сохранению номера спектральной моды, от которой осуществлен переход.

На фиг. 1, 2 представлены зависимости X и Y от волнового числа α для первых двух спектральных мод при $\mathrm{Re}=10^3$. За характерный масштаб принята толщина вытеснения пограничного слоя δ_*. Цифрами указаны соответствующие спектральные номера мод. Из фиг. 1 видно, что существуют такие волновые числа α_*, для которых $X=1$, и при $\alpha<\alpha_*$ данная спектральная мода исчезает, поскольку при $X>1$ не удовлетворяются физические условия на внешней границе пограничного слоя. Причем с увеличением спектрального номера n соответствующие предельные волновые числа α_{*n} увеличиваются, т. е. $\alpha_{*n-1}<\alpha_{*n}$. Таким образом, для каждого фиксированного волнового числа α существует конечное число спектральных мод. При $\mathrm{Re}\to 0$ волновые числа $\alpha_{*n}\to\infty$, так как в покоящейся в полупространстве жидкости дискретного спектра не существует. И наоборот, при увеличении числа Рейнольдса α_{*n} уменьшаются, т. е. для фиксированного волнового числа α число мод растет с увеличением Re.



Фиг. 1



Фиг. 2

Наиболее опасной оказалась первая спектральная мода, на которой при числах Рейнольдса, бо́льших критического, реализуется неустойчивость течения в пограничном слое. Был проведен расчет критических значений числа Рейнольдса и волнового числа, значения которых равны: $\mathrm{Re}=519$, $\alpha=0{,}304$.

Автор благодарит М. А. Гольдштика и В. Н. Штерна за полезные обсуждения результатов работы.

Поступила 25 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штерн В. Н.* Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта.— ПМТФ, 1969, № 6.
2. *Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н.* Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости.— ПМТФ, 1970, № 2.
3. *Сагалаков А. М., Штерн В. Н.* Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле.— ПМТФ, 1970, № 3.
4. *Слепцов А. Г.* Оценки собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 5. Новосибирск, 1974, № 5.
5. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., «Наука», 1965.
6. *Супруненко И. П.* Устойчивость струйных течений.— «Изв. АН СССР. Механика», 1965, № 4.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.
8. *Сапожников В. А.* Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки.— «Труды Всес. семинара по численным методам механики вязкой жидкости», т. 2, Канев, 1968; Новосибирск, «Наука», 1969.