12. **Алёхин В. В., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых упругих тел и материалов // VI Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл.— Ташкент, 1986.
13. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
14. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** Задача синтеза композита одномерного строения в заданном классе материалов // Динамика сплошной среды/ ИГ СО АН СССР.— 1986.— Вып. 78.
15. **Колпаков А. Г.** Осреднение в одном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1982.— Т. 18, № 10.
16. **Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // Механика композит. материалов.— 1987.— № 1.
17. **Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // VI Всесоюз. конф. по полимерным и композит. материалам: Тез. докл.— Рига: Зинатне, 1986.
18. **Лурье К. А., Черкаев А. В.** Регуляризация проблемы оптимального проектирования неоднородных тел с помощью композиционных материалов // V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл.— Алма-Ата: Наука, 1981.
19. **Работнов Ю. И.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
20. **Лионс Ж.-Л.** Замечания по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композиционных материалах // Вычислительные методы в математике, геофизике и оптимальном управлении.— Новосибирск: Наука, 1978.
21. **Колпаков А. Г.** Усредненные характеристики слоистых композитов (численный алгоритм) // Численные методы решения задач упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюз. конф.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
22. **Колпаков А. Г.** Усредненный критерий прочности связующего волокнистых композитов // ПМТФ.— 1988.— № 2.
23. **Колпаков А. Г.** Задача проектирования волокнистых композитов с заданными характеристиками // Материалы VI Всесоюз. конф. по композиционным материалам.— Ереван, 1987.— Т. 1.
24. **Колпаков А. Г.** Деформационно-прочностные характеристики слоистых и волокнистых композитов. Расчет и проектирование // I Всесоюз. симпоз. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций»: Тез. докл.— Ужгород, 1988.
25. **Gailleria D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Engng Sci.— 1986.— N 12.
26. **Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.** Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 19.
27. **Колпаков А. Г.** Расчет и проектирование слоистых пластинок // ПМТФ.— 1989.— № 4.
28. **Колпаков А. Г.** Прочностные характеристики слоистых конструкций: (Расчет и проектирование) // III Всесоюз. науч.-техн. совещание «Динамика и прочность автомобиля»: Тез. докл.— М., 1988.
29. **Колпаков А. Г.** Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 6.
30. **Партон В. З., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г.** К расчету высокомодульных перекрестно-армированных композитных оболочек // Механика композит. материалов.— 1989.— № 1.
31. **Каламкаров А. Л.** К определению эффективных характеристик сетчатых оболочек и пластинок периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 2.
32. **Колпаков А. Г., Колпакова И. Г.** Теплопроводность через границу с нелокальными характеристиками // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 9.
33. **Колпаков А. Г.** Об асимптотике первой краевой задачи для эллиптических уравнений в области с тонким покрытием // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 6.

г. Новосибирск *Поступила 22/VI 1989 г.*

УДК 539.3+539.4

В. И. Герман, В. В. Кобелев

РАЦИОНАЛЬНОЕ АРМИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ИДЕАЛЬНОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

Проблемы отыскания оптимальной анизотропии и рациональной структуры армирования деталей из композиционных материалов, находящихся в плоском напряженном или плоском деформированном состоянии, изучались в [1—5]. В [1, 2] установлен критерий максимальной прочности деталей из слоистых анизотропных композитов. В [3, 4] получены условия оптимальности и в случае осевой симметрии решены задачи оптимизации жесткости анизотропных пластин. Условия оптимальности в задаче о максимизации несущей способности тела из анизотропного пластического материала определены в [5]. Пользуясь этими условиями, численно можно найти оптимальные схемы армирования [4]. Что касается аналитических решений, то их удается получить только при высокой симметрии конструкций, так как соответствующая задача в силу нелинейности условий оптимальности также оказывается нелинейной. Существенные упрощения могут быть достигнуты за счет идеализации реологической модели материала.

В данной работе рассматривается композиционная среда, армированная двумя семействами нерастяжимых волокон. Такая среда имеет название идеального волокнистого композита [6, 7]. Ставится задача отыскания схемы армирования материала, при которой нагрузки воспринимаются только волокнами, а напряжения в связующем отсутствуют. Получены условия существования равнонапряженных схем армирования, показано, что их нахождение при выполнении некоторых условий сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

1. Уравнения теории идеального волокнистого композита. Модель идеального волокнистого композита представляет собой простейшую модель материала, составленного из высокомодульных волокон и низкомодульной матрицы, и заключается в принятии двух гипотез: волокна непрерывно распределены в матрице и они нерастяжимы.

Получим уравнения равновесия плоской среды, армированной двумя семействами нерастяжимых волокон, в предположении, что напряжения в матрице равны нулю. Рассмотрим пластину единичной толщины в условиях плоского напряженного состояния. В двумерной области Ω, которую занимает пластина, введем систему криволинейных ортогональных координат x_1x_2 (рис. 1), ее орты — $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$. Направления укладки двух семейств волокон в каждой точке зададим единичными векторами $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$. Пусть с осью $\mathbf{i}_1$ первое волокно образует угол φ, а второе — угол ψ, т. е. $\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{j}_1 = \cos\varphi$, $\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{j}_2 = \cos\psi$ (точкой обозначено скалярное произведение векторов). Считаем, что углы φ и ψ изменяются от точки к точке и являются достаточно гладкими функциями координат. Напряжения в материале характеризуются тензором

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma^{\alpha\beta}\mathbf{j}_\alpha \otimes \mathbf{j}_\beta = \sigma^{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta, \tag{1.1}$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}$ в системе координат x_1x_2; $\Sigma^{\alpha\beta}$ — компоненты $\boldsymbol{\sigma}$ в косоугольной системе координат, связанной с векторами $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$; символом $\otimes$ обозначено прямое произведение тензоров [8]. Здесь и в дальнейшем по паре повторяющихся греческих индексов производится суммирование от 1 до 2. Так как в рассматриваемом случае нагрузку воспринимают только волокна, матрица компонент $\Sigma^{\alpha\beta}$ тензора $\boldsymbol{\sigma}$ имеет диагональный вид

$$\Sigma^{11} = p,\ \Sigma^{22} = q,\ \Sigma^{12} = \Sigma^{21} = 0.$$

Найдем явный вид матрицы $\sigma^{\alpha\beta}$ компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в системе координат x_1x_2. Для этого учтем, что $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ получаются из $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ поворотом на углы φ и ψ соответственно:

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi,\ \mathbf{j}_2 = \mathbf{i}_1\cos\psi + \mathbf{i}_2\sin\psi. \tag{1.2}$$

Тогда из (1.1)

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma^{\alpha\beta}\mathbf{j}_\alpha \otimes \mathbf{j}_\beta = p\mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{j}_1 + q\mathbf{j}_2 \otimes \mathbf{j}_2 = p(\cos^2\varphi\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + 2\sin\varphi\cos\varphi\mathbf{i}_1 \otimes$$
$$\otimes\, \mathbf{i}_2 + \sin^2\varphi\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) + q(\cos^2\psi\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + 2\cos\psi\sin\psi\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \sin^2\psi\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) =$$
$$= \sigma^{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta,$$

откуда

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p\cos^2\varphi + q\cos^2\psi & (1/2)\,p\sin 2\varphi + (1/2)\,q\sin 2\psi \\ (1/2)\,p\sin 2\varphi + (1/2)\,q\sin 2\psi & p\sin^2\varphi + q\sin^2\psi \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

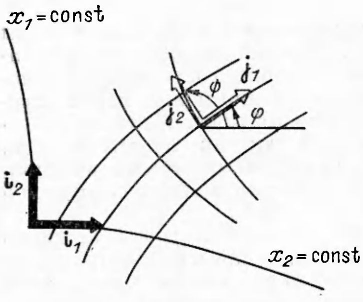

Рис. 1

Уравнения равновесия среды в случае отсутствия объемных сил имеют вид

(1.4)
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2\sigma^{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1\sigma^{12}) - \sigma^{22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \sigma^{12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2\sigma^{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1\sigma^{22}) - \sigma^{11}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \sigma^{12}\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0$$

(H_1, H_2 — коэффициенты Ламэ системы координат x_1x_2). Подстановка (1.3) в (1.4) дает

(1.5)
$$H_2\frac{\partial}{\partial x_1}(p\cos^2\varphi + q\cos^2\psi) + \frac{H_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}(p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi) +$$
$$+ (p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi)\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + (p\cos 2\varphi + q\cos 2\psi)\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{H_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi) + H_1\frac{\partial}{\partial x_2}(p\sin^2\varphi + q\sin^2\psi) -$$
$$- (p\cos 2\varphi + q\cos 2\psi)\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + (p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi)\frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0.$$

Считаем, что на границе области всюду заданы статические краевые условия

(1.6)
$$\sigma^{11}n_1 + \sigma^{12}n_2 = T^1,\ \sigma^{12}n_1 + \sigma^{22}n_2 = T^2,$$

где T^1, T^2 — компоненты вектора поверхностных усилий; n_1, n_2 — проекции на оси $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ единичной нормали к границе. В терминах p и q граничные условия (1.6) примут вид

(1.7)
$$(p\cos^2\varphi + q\cos^2\psi)n_1 + (1/2)(p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi)n_2 = T^1,$$
$$(1/2)(p\sin 2\varphi + q\sin 2\psi)n_1 + (p\sin^2\varphi + q\sin^2\psi)n_2 = T^2.$$

Заметим, что при заданных φ и ψ краевая задача (1.5), (1.7) для определения функций p и q не всегда разрешима. Это значит, что система волокон, характеризуемая углами укладки φ и ψ и нагруженная усилиями T^1 и T^2, является статически неуравновешенной. В композитной среде, армированной нерастяжимыми элементами, эта неуравновешенность компенсируется за счет напряжений в матрице. Рассуждая в обратном порядке, легко прийти к выводу, что разрешимость уравнений (1.5), (1.7) свидетельствует об отсутствии напряжений в матрице рассматриваемой композитной среды, нагруженной в соответствии с (1.6).

Перед тем как переходить к формулировке задачи рационального армирования, укажем физический смысл p и q. Векторы натяжения волокон $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в декартовой системе координат имеют следующие компоненты ($\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}_1 + F_y\mathbf{i}_2$, $\mathbf{G} = G_x\mathbf{i}_1 + G_y\mathbf{i}_2$):

$$F_x = f\cos\varphi,\ F_y = f\sin\varphi,\ G_x = g\cos\psi,\ G_y = g\sin\psi$$

(f и g — натяжения волокон первого и второго семейств). Введем теперь концентрации волокон η_1 и η_2, определив их как число волокон каждого семейства, проходящих здесь через единичный отрезок, перпендикулярный направлению волокон. Вычисляя проекцию полной силы на отрезки единичной длины, перпендикулярные направлениям волокон, получаем $p = f\eta_1$, $q = g\eta_2$. Итак, p, q — натяжения волокон, отнесенные к единице длины.

2. Равнопрочная схема армирования двумя неортогональными системами волокон. В п. 1 уравнения (1.5), (1.7) рассматривались в качестве соотношений для определения натяжений волокон p и q. Сформулируем обратную задачу. Пусть теперь требуется найти такое распределение углов укладки волокон в плоскости x_1x_2, задаваемое функциями $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$, чтобы напряжения в волокнах удовлетворяли равенствам

$$p(x_1, x_2) = P, \; q(x_1, x_2) = Q, \tag{2.1}$$

где P, Q — заданные величины. Для равнопрочной схемы армирования P и Q — тождественные константы.

Построение равнопрочной схемы армирования целесообразно начать с отыскания решения краевой задачи для σ^{11}, σ^{22}, σ^{12}, в которой соотношения (1.4) дополнены уравнением

$$\sigma^{11} + \sigma^{22} = P + Q = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$\sigma^{11}(s) = T^1n_1 - T^2n_2 + n^2{}_2(P+Q), \tag{2.3}$$

$$\sigma^{22}(s) = T^2n_2 - T^1n_1 + n^2{}_1(P+Q), \quad \sigma^{12}(s) = T^1n_2 + T^2n_1 - n_1n_2(P+Q),$$

полученными из (1.4) с учетом (2.2)

Краевая задача (1.4), (2.2), (2.3) в общем случае является переопределенной, однако если функции $T^1(s)$, $T^2(s)$ удовлетворяют некоторому дополнительному соотношению, она оказывается корректной. Поясним сказанное для случая, когда система координат x_1x_2 совпадает с глобальной декартовой системой координат xy. Уравнения (1.4) с учетом (2.2) примут вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) представляют собой условия Коши — Римана, и, следовательно, σ_{xx} и σ_{xy} — сопряженные гармонические функции:

$$\Delta\sigma_{xx} = 0, \; \Delta\sigma_{xy} = 0 \tag{2.5}$$

(Δ — оператор Лапласа). Нетрудно заметить, что пара σ_{yy} и σ_{xy} также обладает указанным свойством.

Наличие двух краевых условий (2.3) для двух гармонически сопряженных функций переопределяет задачу, поскольку корректная постановка заключается в задании на границе области Ω только одного из условий (2.3). Однако если подчинить функции $T_x(s)$ и $T_y(s)$ определенному соотношению, краевая задача (2.3), (2.4), а вместе с ней и задача (1.4), (2.2), (2.3) нормально разрешимы. Вывод этого соотношения следующий. Решается задача Дирихле для уравнения (2.5), например, с первым условием (2.3), и определяется гармоническая функция $\sigma_{xx}(x, y)$. Далее интегрированием (2.3) отыскивается сопряженная гармоническая функция $\sigma_{xy}(x, y)$. Тем самым определены граничные значения $\sigma_{xx}(s)$ и $\sigma_{xy}(s)$. Компоненты усилий $T_x(s)$, $T_y(s)$ должны тождественно удовлетворять системе равенств (2.3) вдоль всей границы. Если это условие не может быть выполнено в какой-либо точке границы, то это означает, что равнопрочного решения для заданных краевых условий $T_x(s)$, $T_y(s)$ во всей области, включая границу, найти не удастся.

Предположим теперь, что усилия $T^1(s)$, $T^2(s)$ таковы, что напряжения $\sigma^{11}(x_1, x_2)$, $\sigma^{22}(x_1, x_2)$, $\sigma^{12}(x_1, x_2)$ определены в области Ω как функции параметра $P+Q$. Нахождение углов армирования сводится к решению трансцендентной системы алгебраических уравнений относительно $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$:

$$P\cos 2\varphi + Q\cos 2\psi = \sigma^{11} - \sigma^{22}, \; P\sin 2\varphi + Q\sin 2\psi = 2\sigma^{12}. \tag{2.6}$$

Получим решение этой системы уравнений. Перенося члены, содержащие ψ в правую часть, возводя оба уравнения в квадрат и складывая, имеем $2Q(a\cos 2\psi + b\sin 2\psi) = a^2 + b^2 + Q^2 - P^2 (a = \sigma^{11} - \sigma^{22},\; b = 2\sigma^{12})$. Это уравнение и аналогичное для φ сводятся к

$$\sin 2(\alpha + \psi) = (R^2 + Q^2 - P^2)/2QR, \tag{2.7}$$

$$\sin 2(\alpha + \varphi) = (R^2 + P^2 - Q^2)/2PR.$$

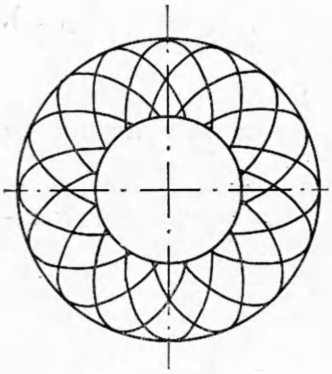

Рис. 2

Здесь $R(P+Q)$— второй инвариант девиатора тензора напряжений $R(P+Q)=\sqrt{(\sigma^{11}-\sigma^{22})^2+4(\sigma^{12})^2}$; угол α определяется равенством $\operatorname{tg} 2\alpha = a/b$. Заметим, что не все корни уравнений (2.7) удовлетворяют уравнениям (2.6), хотя обратное утверждение, разумеется, справедливо, а для разрешимости (2.6), (2.7) необходимо, чтобы P и Q соответствовали определенным ограничениям. Область допустимых P и Q задается системой неравенств

$$\max_{(x_1,x_2)\in\Omega} \frac{|R^2+Q^2-P^2|}{|2QR|} \leqslant 1, \tag{2.8}$$

$$\max_{(x_1,x_2)\in\Omega} \frac{|R^2-Q^2+P^2|}{|2PR|} \leqslant 1.$$

Если первоначально выбранная пара значений P и Q не удовлетворяет ограничениям (2.8), следует выбрать материал с другими значениями прочности волокон.

3. Рациональное армирование диска, равномерно нагруженного по краям. Для иллюстрации предложенной методики отыскания рациональной схемы армирования пластин приведем пример расчета равнопрочной схемы армирования диска, нагруженного по внутреннему радиусу. Пусть граничные условия заданы в виде ($r_1 < r_2$)

$$\sigma_r(r_1) = -T,\quad \sigma_r(r_2) = 0,\quad \sigma_{\theta r}(r_1) = \sigma_{\theta r}(r_2) = 0. \tag{3.1}$$

Будем искать схему армирования, удовлетворяющую соотношениям

$$P = Q = (1/2)K,\quad \psi(r) = -\varphi(r). \tag{3.2}$$

Следствием (3.2) являются равенства $\sigma_{\theta r}(\theta, r) \equiv 0$, $\alpha = \pi/4$. Соотношения (1.4), (2.2) запишутся как

$$\frac{d}{dr}[\sigma_r r] = \sigma_\theta,\quad \sigma_r + \sigma_\theta = K. \tag{3.3}$$

Решение краевой задачи (3.1), (3.3) существует при значениях параметров T и K, связанных соотношением $K = 2Tr_1^2/(r_2^2 - r_1^2)$, и имеет вид

$$\sigma_r = \frac{Tr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - r_2^2/r^2\right),\quad \sigma_\theta = \frac{Tr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + r_2^2/r^2\right).$$

Угол армирования задается выражением

$$\varphi = (1/2)\arccos(-r_2^2/r^2). \tag{3.4}$$

Соответствующие (3.4) линии укладки волокон указаны на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Образцов И. Ф., Васильев В. В., Вуиаков В. А.** Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1977.
2. **Образцов И. Ф., Васильев В. В.** Оптимальная структура и прочность слоистых композитов при плоском напряженном состоянии // Механика композит. материалов.— 1979.— № 2.
3. **Баничук Н. В.** Оптимизация анизотропных свойств деформируемых сред в плоских задачах теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.
4. **Баничук Н. В.** Оптимизация форм упругих тел.— М.: Наука, 1980.
5. **Баничук Н. В., Кобелев В. В.** Об оптимальной пластической анизотропии // ПММ.— 1987.— Вып. 3.
6. **Mulhern J. F., Rogers T. G., Spencer A. J. M.** A continuum model for fibre-reinforced plastic material // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1967.— V. 301, N 1467.
7. **Пипкин А. С.** Конечные деформации идеальных волокнистых композитов // Механика композиционных материалов.— М.: Мир, 1978.
8. **Векуа И. Н.** Основы тензорного анализа и теории инвариантов.— М.: Наука, 1978.

г. Москва

Поступила 2/XII 1987 г., в окончательном варианте — 23/II 1989 г.