УДК 533.9

УСЛОВИЯ ТОРОИДАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

А. Г. Олейник

(*Новосибирск*)

В магнитогидродинамическом приближении выведены необходимые условия стационарного течения плазмы в магнитном поле тороидальной геометрии.

Как известно [1], для тороидального равновесия покоящейся плазмы необходимо, чтобы была отличная от нуля азимутальная компонента магнитного поля H_ω, соответствующая углу малого обхода тора,

$$H_\omega \neq 0. \tag{1}$$

Один из возможных способов получения (1) заключается в отыскании стационарных решений уравнений магнитной гидродинамики для неподвижной среды в первом приближении по параметру тороидальности $\alpha = \frac{a}{R}$ (a и R — радиусы малого и большого обхода тора), который можно считать малым. Найденные решения имеют смысл только при выполнении (1), поскольку H_ω (точнее, $H_{0\omega}$, отвечающее нулевому приближению $\alpha = 0$) входит в знаменатели полученных выражений. Аналогичным образом могут быть получены условия тороидального равновесия для движущейся среды.

В магнитогидродинамическом приближении уравнения, описывающие стационарное движение, имеют вид

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \mathbf{H}] = 0; \quad \mathrm{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0;$$

$$\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v} = 0; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0; \quad (\mathbf{v}\nabla)S = 0, \tag{2}$$

где ρ, p, $\mathbf{v}$, S — плотность, давление, скорость и энтропия плазмы; $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля.

Воспользуемся тороидальной системой координат $\{r, \omega, \theta\}$, где r — расстояние до круговой оси тороида; θ и ω — углы большого (вокруг оси тороида) и малого обхода (вокруг круговой оси). Вводя безразмерную величину $\xi = r/R$, запишем систему (2) в виде

$$\rho\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial\xi} + \frac{v_\omega}{\xi}\frac{\partial v_r}{\partial\omega} - \frac{\alpha v_\theta^2 \cos\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega} - \frac{v^2\omega}{\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(p + \frac{H_\theta^2 + H_\omega^2}{8\pi}\right) -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\left(\frac{H_\omega}{\xi}\frac{\partial H_r}{\partial\omega} \quad \frac{\alpha H_\theta^2\cos\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega} - \frac{H_\omega^2}{\xi}\right) = 0; \tag{3}$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_\omega}{\partial\xi} + \frac{v_\omega}{\xi}\frac{\partial v_\omega}{\partial\omega} + \frac{\alpha v_\theta^2\sin\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega} + \frac{v_r v_\omega}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(p + \frac{H_r^2 + H_\omega^2}{8\pi}\right) -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\left(H_r\frac{\partial H_\omega}{\partial\xi} + \frac{\alpha H_\theta^2\sin\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega} + \frac{H_r H_\omega}{\xi}\right) = 0;$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi} + \frac{v_\omega}{\xi}\frac{\partial v_\theta}{\partial\omega} + \frac{\alpha v_\theta v_r\cos\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega} - \frac{\alpha v_\theta v_\omega\sin\omega}{1+\alpha\xi\cos\omega}\right) - \frac{1}{4\pi}\times$$
$$\times\left[H_r\frac{\partial H_\theta}{\partial\xi} + \frac{H_w}{\xi}\frac{\partial H_\theta}{\sigma\omega} + \frac{\alpha H_\theta}{1+\alpha\xi\cos\omega}(H_\rho\cos\omega - H_\omega\sin\omega)\right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[(1+\alpha\xi\cos\omega)(v_\omega H_r - v_r H_\omega)] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(v_\theta H_\omega - v_\omega H_\theta) - \frac{\partial}{\partial\xi}[\xi(v_r H_\theta - v_\theta H_r)] = 0;$$

$$(1+\alpha\xi\cos\omega)\frac{\partial}{\partial\xi}(v_\omega H_r - v_r H_\omega) + \alpha\cos\omega(v_\omega H_r - v_r H_\omega) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi(1+\alpha\xi\cos\omega)\rho v_r] + \frac{\partial}{\partial\omega}[(1+\alpha\xi\cos\omega)\rho v_\omega] + \alpha\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi\rho v_\theta) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi(1+\alpha\xi\cos\omega)H_r] + \frac{\partial}{\partial\omega}[(1+\alpha\xi\cos\omega)H_\omega] + \alpha\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi H_\theta) = 0;$$

$$v_r\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{v_\omega}{\xi}\frac{\partial p}{\partial\omega} - \frac{\gamma p}{\rho}\left(v_r\frac{\partial\rho}{\partial\xi} + \frac{v_\omega}{\xi}\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right) = 0.$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

Полагая, что параметр α мал, представим искомые величины f_i в виде $f_i=f_{0i}+f_{1i}$, где f_{0i} отвечает нулевому, а f_{1i} — первому приближению по α. Сделаем допущение, что в нулевом приближении отсутствует зависимость от θ и ω

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial\theta} = \frac{\partial f_{0i}}{\partial\omega} = 0.$$

Тогда в нулевом приближении по α система (3) сведется к единственному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p_0 + \frac{H_{0\theta}^2 + H_{0\omega}^2}{8\pi}\right) + \frac{H_{0\omega}^2}{4\pi\xi} - \frac{\rho_0 v_{0\omega}^2}{\xi} = 0, \tag{4}$$

а в первом приближении — к системе уравнений:

$$\rho_0\left(\frac{v_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\omega} - \alpha v_{0\theta}^2\cos\omega - \frac{2v_{0\omega}v_{1\omega}}{\xi}\right) - \tag{5}$$

$$-\frac{\rho_1 v_{0\omega}^2}{\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(p_1 + \frac{H_{0\theta}H_{1\theta} + H_{0\omega}H_{1\omega}}{4\pi}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{H_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial H_{1r}}{\partial\omega} - \alpha H_{0\theta}^2\cos\omega - \right.$$

$$\left. - \frac{2H_{0\omega}H_{1\omega}}{\xi}\right) = 0;$$

$$\rho_0\left(v_{1r}\frac{\partial v_{0\omega}}{\partial\xi} - \frac{v_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial v_{1\omega}}{\partial\omega} + \alpha v_{0\theta}^2\sin\omega + \frac{v_{1r}v_{0\omega}}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(p_1 + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \frac{H_{0\theta}H_{1\theta}}{4\pi}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(H_{1r}\frac{\partial H_{0\omega}}{\partial\xi} + \frac{H_{1r}H_{0\omega}}{\xi} + \alpha H_{0\theta}^2\sin\omega\right) = 0;$$

$$\rho_0\left(v_{1r}\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial\xi} + \frac{v_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial\omega} - \alpha v_{0\theta}v_{0\omega}\sin\omega\right) - \frac{1}{4\pi}\left(H_{1r}\frac{\partial H_{0\theta}}{\partial\xi} + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \frac{H_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial H_{1\theta}}{\partial\omega} - \alpha H_{0\theta}H_{0\omega}\sin\omega\right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(v_{0\omega}H_{1r} - v_{1r}H_{0\omega}) = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(v_{0\theta}H_{1\omega} + v_{1\theta}H_{0\omega} - v_{0\omega}H_{1\theta} - v_{1\omega}H_{0\theta}) - \frac{\partial}{\partial\xi}[\xi(v_{1r}H_{0\theta} - \tag{9}$$

$$- v_{0\theta}H_{1r})] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\rho_0 v_{1r}) + \frac{\partial}{\partial\omega}(\rho_1 v_{0\omega} + \rho_0 v_{1\omega}) - \alpha\xi\rho_0 v_{0\omega}\sin\omega = 0; \tag{10}$$

(11) $$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi H_{1r}) - \alpha \xi H_{0\omega} \sin \omega + \frac{\partial H_{1\omega}}{\partial \omega} = 0;$$

(12) $$v_{1r} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{v_{0\omega}}{\xi} \frac{\partial p_1}{\partial \omega} - \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\left(v_{1r} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \frac{v_{0\omega}}{\xi} \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}\right) = 0.$$

Воспользовавшись системой уравнений (5) — (12), найдем искомые величины f_{1i}, учитывая, что f_{0i} удовлетворяют уравнению (4). С этой целью из уравнений (6) — (12) выразим через H_{1r} и $H_{1r}^* = \int H_{1r}\, d\omega$ остальные искомые величины и, подставляя последние в (5), получим уравнение для нахождения H_{1r}.

Первоначально из уравнений (7), (8) — (12) выразим искомые величины через p_1, H_{1r} и H_{1r}^*. Находим

(13) $$v_{1r} = \frac{v_{0\omega}}{H_{0\omega}} H_{1r};$$

(14) $$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} p_1 + \frac{\xi}{H_{0\omega}}\left(\frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi}\right) H_{1r}^*;$$

(15) $$v_{1\omega} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{v_{0\omega}}{H_{0\omega}} H_{1r}^*\right) - \frac{v_{0\omega}\xi}{\gamma H_{0\omega} p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} H_{1r}^* - \frac{v_{0\omega}}{\gamma p_0} p_1 -$$
$$- \alpha \xi v_{0\omega} \cos \omega;$$

(16) $$H_{1\omega} = -\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi H_{1r}^*) - \alpha \xi \cos \omega\, H_{0\omega};$$

(17) $$v_{1\theta} = \frac{1}{H_{0\omega}^2 - 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2}\left\{\xi H_{1r}^*\left[\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial \xi} \frac{1}{H_{0\omega}}(4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2 - H_{0\omega}^2) -\right.\right.$$
$$\left.- \frac{H_{0\theta} v_{0\omega}}{\gamma p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi}\right] - \frac{v_{0\omega} H_{0\omega} H_{0\theta}}{\gamma p_0} p_1 + \alpha \xi \left[v_{0\theta}(H_{0\omega}^2 + 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2) -\right.$$
$$\left.\left. - 2 v_{0\omega} H_{0\theta} H_{0\omega}\right] \cos \omega\right\};$$

(18) $$H_{1\theta} = \frac{1}{H_{0\omega}^2 - 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2}\left\{\xi H_{1r}^*\left[\frac{1}{H_{0\omega}} \frac{\partial H_{0\theta}}{\partial \xi}(4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2 - H_{0\omega}^2) -\right.\right.$$
$$\left.- \frac{4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2}{\gamma p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{H_{0\theta}}{H_{0\omega}}\right] - \frac{4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2 H_{0\theta}}{\gamma p_0} p_1 - \alpha \xi \left[H_{0\theta}(H_{0\omega}^2 + 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2) -\right.$$
$$\left.\left. - 8\pi \rho_0 v_{0\omega} v_{0\theta} H_{0\omega}\right] \cos \omega\right\}.$$

Интегрируя уравнение (6) по ω и подставляя в него выражения (13) — (18), найдем p_1 через H_{1r}^*

(19) $$p_1 = \frac{\rho_0 v_{0\omega}^2}{F} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi H_{1r}^*}{H_{0\omega}}\right) - \left(\frac{\xi H_{1r}^*}{H_{0\omega}}\right) \frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \alpha \xi \frac{G}{F} \cos \omega,$$

$$F = 1 - \frac{v_{0\omega}^2}{c_0^2}\left(1 + \frac{H_{0\theta}^2}{H_{0\omega}^2 - 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2}\right),\quad c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0},$$

$$G = \rho_0 (v_{0\omega}^2 + v_{0\theta}^2) - \frac{H_{0\theta}^2}{4\pi} - \frac{1}{(H_{0\omega}^2 - 4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2)}\left[2\rho_0 v_{0\omega} v_{0\theta} H_{0\omega} H_{0\theta} -\right.$$
$$\left. - \frac{H_{0\theta}^2}{4\pi}(4\pi \rho_0 v_{0\omega}^2 + H_{0\omega}^2)\right].$$

Подставляя (19) в (13) — (18), а затем (13) —(19) в (5), получим уравнение для нахождения H_{1r}^*, полагая, что $H_{1r}^* = y(\xi)\cos\omega$ (т. е. $H_{1r} = -y\sin\omega$)

$$\frac{d}{d\xi}(Az) + Bz + \alpha\Phi = 0,\quad z = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{y\xi}{H_{0\omega}}\right), \tag{20}$$

$$A = \frac{\rho_0}{F}\left[v_{0\omega}^2\left(1 + \frac{c_A^2}{c_0^2}\right) - c_{A\omega}^2\right],$$

$$c_{A\omega}^2 = \frac{H_{0\omega}^2}{4\pi\rho_0},\quad c_A^2 = \frac{H_{0\omega}^2 + H_{0\theta}^2}{4\pi\rho_0},$$

$$B = \frac{1}{\xi}\left(\frac{\rho_0 v_{0\omega}^4}{c_0^2 F} + \rho_0 v_{0\omega}^2 - \frac{H_{0\omega}^2}{4\pi}\right),$$

$$\Phi = \frac{d}{d\xi}\left\{\xi\left[\frac{G}{F} - \frac{H_{0\omega}^2}{4\pi} + \frac{1}{H_{0\omega}^2 - 4\pi\rho_0 v_{0\omega}^2}\left(2\rho_0 v_{0\omega}v_{0\theta}H_{0\omega}H_{0\theta} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{H_{0\theta}^2}{4\pi}\left(H_{0\omega}^2 + 4\pi\rho_0 v_{0\omega}^2\right) - \frac{v_{0\omega}^2}{c_0^2}\frac{H_{0\theta}^2}{F}\right]\right\} + \left[\frac{v_{0\omega}^2}{c_0^2}\frac{G}{F} + 2\rho_0 v_{0\omega}^2 - \rho_0 v_{0\theta}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi}\left(2H_{0\omega}^2 - H_{0\theta}^2\right)\right].$$

Решая уравнение (20), находим

$$y(\xi) = -\frac{H_{0\omega}}{\xi}\int e^{-\int\frac{B}{A}d\xi}\left[-\frac{\alpha}{A}\int \Phi e^{\int\frac{B}{A}d\xi}d\xi + \frac{C_1}{A}\right]d\xi + C_2, \tag{21}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Рассмотрим сингулярные точки полученных решений, в которых искомые величины f_{1i} обращаются в бесконечность. Поскольку появление бесконечностей говорит о невозможности разрешения исходной системы уравнений, то, исключая сингулярные точки, получаем необходимые условия стационарного течения плазмы в тороиде.

Из выражения (21) следует необходимость $A \neq 0$, откуда

$$v_{0\omega}^2 \neq c_{A\omega}^2\left(1 + c_A^2/c_0^2\right)^{-1}, \tag{22}$$

из выражения (19) следует $F \neq 0$, откуда

$$v_{0\omega} \neq c_0\left[\frac{1}{2}\left(1 + c_A^2/c_0^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + c_A^2/c_0^2\right)^2 - c_{A\omega}^2/c_0^2}\right]. \tag{23}$$

Выражения (22), (23) являются необходимыми условиями возможности стационарного течения плазмы в тороиде в магнитогидродинамическом приближении.

Обращение в нуль знаменателей правых частей (17), (18) при $v_{0\omega} = c_{A\omega}$ не приводит к появлению бесконечностей, так как при подстановке в эти выражения p_1 из (19) происходит сокращение обращающихся в нуль множителей.

Согласно (19) в случае $\left(H_{0\omega}^2 - 4\pi\rho_0 v_{0\omega}^2\right) \to 0$

$$p_1 + \frac{\xi H_{1r}^*}{H_{0\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial\xi} = \frac{c_0^2}{4\pi v_{0\omega}^2 H_{0\theta}^2}\left[8\pi\rho_0 v_{0\omega}v_{0\theta}H_{0\omega}H_{0\theta} - \right. \tag{24}$$

$$\left. - H_{0\theta}^2\left(4\pi\rho_0 v_{0\omega}^2 + H_{0\omega}^2\right)\right]\alpha\xi\cos\omega.$$

В цилиндрическом случае ($\alpha=0$) условие (24), согласно (13), принимает вид

$$v_{1r}\frac{\partial p_0}{\partial \xi}+\frac{v_{0\omega}}{\xi}\frac{\partial p_1}{\partial \omega}=0,$$

что в данном случае $\left(v_{0r}=0,\ \frac{\partial p_0}{\partial \xi}\neq 0\right)$ равносильно требованию постоянства давления вдоль проекции линии тока на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра.

Поступила 13 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арцимович Л. А.** Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.

УДК 533.6.011.8

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ПОТОКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С КЛАСТЕРАМИ

Н. И. Кисляков, И. А. Пивень, А. К. Ребров, Г. А. Храмов

(*Новосибирск*)

При исследовании взаимодействия двух сверхзвуковых потоков CO_2 низкой плотности с использованием электронного пучка обнаружено наличие пульсаций интенсивности излучения, возбужденного электронами в ядре струи. Характер изменения частоты и амплитуды пульсаций в объеме ядра струи, а также область существования пульсаций зависят от параметров торможения потоков.

Использование электронного пучка для диагностики потоков разреженного газа получило широкое распространение в экспериментальных газодинамических исследованиях благодаря тому, что эти методы позволяют получить количественную информацию о плотности газов, концентрации компонентов и их энергетическом состоянии как в покоящемся, так и движущемся газе [1, 2]. Измерения основаны на возможности установления однозначной связи между интенсивностью и характером спектра, возбужденного электронным пучком, и состоянием газа. В данной работе изучались низкочастотные пульсации излучения в зоне электронного пучка, использованного для зондирования взаимодействующих потоков разреженного газа с кластерами.

Это явление изучалось при взаимодействии двух спутных потоков CO_2 в вакуумной камере. В поле потока за соплом с диаметром среза 100 мм и геометрическим числом Маха $M_1 \approx 8$ на расстоянии 1120 мм устанавливался газодинамический источник со сверхзвуковым соплом (диаметр критического сечения $d_*=0{,}53$ мм, диаметр среза $d=1{,}22$ мм) или звуковым соплом ($d_*=0{,}33$ мм). Размеры источника выбирались порядка нескольких длин свободного пробега, чтобы он не оказывал существенного влия-