

## ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ В УСТАНОВКЕ С МГД-УСКОРОЕНИЕМ И В НАТУРНЫХ УСЛОВИЯХ

В. И. Алферов, И. В. Егоров

Центральный аэрогидродинамический институт, 140160 Жуковский

Рассматриваются постановка задачи, метод решения и результаты расчетов обтекания наветренной части сферы для условий аэродинамической установки (трубы) с магнитогазодинамическим (МГД) ускорением потока воздуха и для соответствующих натуральных условий полета в атмосфере Земли. Расчетные исследования проведены на основе численного решения уравнений Навье — Стокса с учетом термохимической неравновесности воздуха и каталитических свойств поверхности тела. Результаты математического моделирования обтекания сферы для условий аэродинамической трубы с МГД-ускорением сравниваются с экспериментальными данными, полученными в ЦАГИ. Анализируется проблема пересчета экспериментальных данных на натурные условия.

**Введение.** Одна из основных проблем гиперзвукового обтекания тел состоит в адекватном моделировании физико-химических превращений в ударном слое. При этом рассматриваются различные модели гомогенных и гетерогенных процессов, протекающих в высокотемпературной возмущенной области течения [1].

В настоящее время повышенный интерес проявляется к верификации расчетных и экспериментальных данных гиперзвукового обтекания в наземных установках [2, 3] и в натуральных полетах [4]. Большое внимание уделяется поиску более адекватной математической модели колебательно-диссоциационного взаимодействия [5, 6] при обтекании тел с произвольной каталитической активностью поверхности [7]. В частности, это связано с анализом проблемы неравновесного излучения [4, 8], интенсивность которого определяется концентрацией возбужденных частиц, уровнем возбуждения колебательных степеней свободы молекулярных компонентов и другими факторами. Высокая степень возбуждения электронных степеней свободы молекулы NO сразу за фронтом ударной волны приводит к интенсивной ультрафиолетовой радиации в системе гамма-полос ( $200 \div 230$  нм) [9].

Для термохимически неравновесного газа разница в значениях констант скоростей реакций, предлагаемых различными авторами, может существенно влиять на картину течения. Все это делает весьма актуальной проблему верификации как расчетных методов, так и физико-химических моделей течения в наземных лабораторных установках. В [10] проведен обзор разных типов экспериментальных установок, в которых возможно воспроизведение указанных эффектов, и методов их исследования. К таким установкам авторы данной работы относят ударные трубы, расширительные ударные трубы и баллистические установки. В качестве параметров, по которым возможно сопоставление экспериментальных результатов с теоретическими, предлагается использовать отход и форму ударной волны около тела, а также распределение давления по телу. Малое время эксперимента в ударных трубах и небольшой размер моделей в баллистических трассах существенно ограничивают возможности экспериментального изучения неравновесных процессов.

Созданная и находящаяся в эксплуатации в ЦАГИ гиперзвуковая аэродинамическая

труба с МГД-ускорением газа в определенном смысле свободна от указанных недостатков и позволяет реализовать режимы гиперскоростного полета, исследовать обтекание тел с определяющим влиянием физико-химических процессов в ударном слое. В [11] приведены некоторые результаты сопоставления экспериментальных и расчетных значений распределения давления, а также результаты исследования положения и формы ударной волны по поверхности сферы, конуса, клина для набегающего потока в МГД-установке. Показано, что использование уравнений Навье — Стокса позволяет получить результаты, которые значительно лучше совпадают с экспериментальными, чем полученные на основе модели тонкого вязкого ударного слоя. Положение и форма ударной волны, величина ее отхода от поверхности тела также достаточно хорошо описываются уравнениями Навье — Стокса с некоторым отличием расчетных значений от экспериментальных на больших расстояниях от критической точки. Вопрос о соответствии условий обтекания в трубе натурным условиям для режимов работы МГД-установки оставался невыясненным.

В настоящей работе рассматриваются условия обтекания тел в гиперскоростной аэродинамической установке с МГД-ускорением потока воздуха и сопоставляются с соответствующими натурными условиями. Математическое моделирование основывалось на решении полных уравнений Навье — Стокса. Расчетные данные сравниваются с экспериментальными, полученными в ЦАГИ, и анализируется проблема их пересчета на экспериментальные данные, полученные в натурных условиях.

**Определяющие уравнения.** Уравнения Навье — Стокса в произвольной криволинейной системе координат  $\xi, \eta (x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta))$ , где  $x, y$  — декартовы координаты) можно записать в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = \mathbf{B}.$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — вектор консервативных зависимых переменных задачи;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{G}$  — векторы потоков в криволинейной системе координат;  $\mathbf{B}$  — вектор источника. Векторы  $\mathbf{Q}, \mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{B}$  связаны с соответствующими векторами  $\mathbf{Q}_c, \mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{B}_c$  в декартовой системе координат формулами

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{E} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y}\right), \quad \mathbf{G} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \quad \mathbf{B} = J\mathbf{B}_c,$$

в которых  $J = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$  — якобиан преобразования.

Декартовы компоненты векторов  $\mathbf{Q}_c, \mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{B}_c$  для двумерных уравнений Навье — Стокса имеют вид

$$\mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \\ \rho_k e_{v,k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} \rho_i u + I_x^i \\ \rho u^2 + p + \tau_{xx} \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho uH + q_x \\ \rho_k u e_{v,k} + q_{v,x}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho_i v + I_y^i \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p + \tau_{yy} \\ \rho vH + q_y \\ \rho_k v e_{v,k} + q_{v,y}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \omega_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{v,k} \end{pmatrix},$$

где  $\rho_i$  — массовая плотность  $i$ -го компонента смеси газов ( $i = 1, \dots, L, L$  — число компонентов смеси газов). В настоящей работе рассматривается модель воздуха с  $L = 9$  ( $O_2, N_2, NO, O, N, NO^+, O_2^+, N_2^+, e^-$ ). В принятых обозначениях  $\rho$  — суммарная плотность смеси газов;  $u, v$  — декартовы компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ;  $p$  — давление;  $e = h - p/\rho + (u^2 + v^2)/2$  — полная энергия на единицу объема;  $H = h + (u^2 + v^2)/2$  — полная энтальпия;  $h = \sum h_i C_i$  —

статическая энтальпия смеси газов;  $C_i$ ,  $\omega_i$ ,  $h_i$  — массовые концентрации, скорости образования, статические энтальпии компонентов смеси газов;  $e_{v,k}$  — удельная энергия колебательных степеней свободы двухатомных молекул, определяемая в настоящей работе по формуле гармонического осциллятора

$$e_{v,k} = \frac{R}{M_k} \frac{\theta_k}{\exp(\theta_k/T_k) - 1}.$$

Здесь  $M_k$  — молярный вес  $k$ -го компонента смеси газов;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\theta_k$ ,  $T_k$  — характеристические и колебательные температуры. В настоящей работе использована трехтемпературная модель колебательной релаксации воздуха ( $k = 1, \dots, K$ ) с  $K = 3$ , в которой  $k = 1$  соответствует возбуждению колебательных степеней свободы молекулы  $O_2$ ,  $k = 2$  —  $N_2$ ,  $k = 3$  —  $NO$ . Предполагалось, что все вращательные степени свободы молекул возбуждены равновесно и вращательные температуры  $T_{r,k}$  совпадают с поступательной  $T$ . Статические энтальпии атомарных компонентов смеси газов определялись по формулам  $h_i = (5/2)(R/M_i)T + h_i^0$ , а молекулярных — по формулам  $h_k = (7/2)(R/M_k)T + e_{v,k} + h_k^0$  ( $h_i^0$  — энтальпия образования компонента смеси газов).

В векторах потоков уравнений Навье — Стокса  $\tau$  — тензор напряжений с компонентами

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right);$$

$\mathbf{q}$  — вектор теплового потока:

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad}(T) + \tau \mathbf{V} + \sum_{i=1}^L h_i^* \mathbf{I}^i + \sum_{k=1}^K \mathbf{q}_v^k,$$

где  $h_i^* = h_i - e_{v,k}$  — удельная энтальпия компонента смеси газов без учета колебательной энергии ( $e_{v,k} = 0$  для  $O$  и  $N$ );  $\mathbf{I}^i$  — вектор диффузионного потока  $i$ -го компонента, в данной работе он определялся на основе закона Фика в приближении бинарной модели диффузии:  $\mathbf{I}_i = -\rho D_i \operatorname{grad}(C_i)$ ;  $\mathbf{q}_v^k$  — вектор потока колебательной энергии молекулярного компонента, определяемый по формуле  $\mathbf{q}_v^k = -\rho D_v^k \operatorname{grad}(C_k e_{v,k})$ ;  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $D_i$ ,  $D_v^k$  — коэффициенты вязкости, теплопроводности, диффузии и самодиффузии.

Вектор источника  $\mathbf{V}$  в уравнениях Навье — Стокса для плоского ( $\nu = 0$ ) и осесимметричного ( $\nu = 1$ ) случаев имеет вид

$$\mathbf{V} = J \left( \omega_i, 0, \frac{\nu}{r} \left( p + \mu \left( \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \frac{\nu}{r} \right) \right), 0, \omega_{v,k} \right)^T$$

( $r = |y|$  — расстояние от оси симметрии).

При определении источника  $\omega_{v,k}$  в уравнениях для колебательной энергии использовано выражение

$$\omega_{v,k} = Q_{vt,k} + Q_{vv,k} + Q_{vc,k},$$

где  $Q_{vt,k}$  — неупругие колебательно-поступательные взаимодействия;  $Q_{vv,k}$  — колебательно-колебательные взаимодействия;  $Q_{vc,k}$  — влияние химических реакций на колебательную релаксацию.

При численном интегрировании уравнений Навье — Стокса использованы алгебраические соотношения: уравнение состояния  $p = \rho RT/M$  ( $M = (\sum C_i/M_i)^{-1}$  — молярный вес смеси газов),  $\sum C_i = 1$ ,  $\sum \mathbf{I}^i = 0$ , а также условия постоянства элементного состава и нулевого значения диффузионных потоков элементов газовой смеси, которые следуют

из бинарной модели диффузии для однородной смеси газов. При определении плотности электронов предполагалось, что газ является квазинейтральным, а процесс ионизации — фоновым: его вклад не учитывался в балансе полной энергии. Это допущение справедливо при скоростях  $V_\infty \leq 8 \div 9$  км/с и становится не вполне корректным при больших скоростях. Отметим, что наличие заряженных частиц может существенно повлиять на коэффициенты переноса.

**Граничные условия.** Задача сверхзвукового обтекания наветренной части затупленного тела решалась с выделением головной ударной волны в области, ограниченной обтекаемой поверхностью тела (сферы)  $\eta = 0$ , осью симметрии течения  $\xi = 0$ , поверхностью ударной волны  $\eta = 1$  и выходной границей  $\xi = \xi_0$ . При этом координаты  $\xi, \eta$  были связаны с декартовыми  $x, y$  и с переменной отхода ударной волны от поверхности тела  $x^s(\xi)$  соотношениями

$$x = x_w(\xi) + x^s(\xi)f(\eta)n_w^x(\xi), \quad y = y_w(\xi) + x^s(\xi)f(\eta)n_w^y(\xi).$$

Здесь  $x_w(\xi), y_w(\xi)$  — параметрическое представление обтекаемой поверхности;  $n_w^x(\xi), n_w^y(\xi)$  — декартовы компоненты единичного вектора ее внешней нормали;  $f(\eta)$  — функция, определяющая сгущение узлов расчетной сетки по нормальной к поверхности тела координате. Для сферы  $x_w(\xi) = -\cos(\pi\xi), y_w(\xi) = \sin(\pi\xi)$ .

На ударной волне при  $\eta = 1$  ставились обобщенные условия Ренкина — Гюгонио  $\mathbf{G} - \mathbf{G}_\infty = 0$ . Предполагалось, что набегающий поток состоит из молекулярного азота и кислорода ( $C_{O_2} = 0,233$ ). При вычислении диффузионной составляющей вектора потока  $\mathbf{G}$  в законах сохранения на ударной волне дифференциальные операторы определялись по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

На границе расчетной области, совпадающей с твердой поверхностью тела  $\eta = 0$ , ставились условия непротекания и прилипания, условие равновесно-радиационного излучения

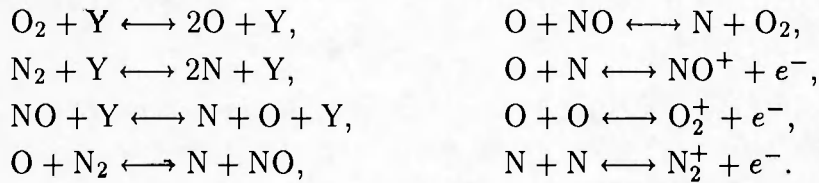
$$q_n + \varepsilon \sigma_r T^4 = 0,$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент черноты поверхности;  $\sigma_r$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $q_n$  — проекция вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  на нормаль к поверхности тела. Для компонентов смеси газов использованы условия  $I_n^i + K_i \rho_i = 0$  ( $K_i$  — коэффициент каталитичности твердой поверхности тела). Во всех расчетах для окиси азота принималось  $K_{NO} = 0$ . Для колебательных температур на поверхности тела предполагалось выполнение условий равновесия  $T_k = T$ .

На оси симметрии при  $\xi = 0$  значения газодинамических переменных определялись из условия четности и нечетности. На выходной границе расчетной области использованы «мягкие» условия экстраполяции искомых переменных  $\mathbf{U} = (u, v, p, T, T_k, C_i, x^s)^T$  с аппроксимацией вида  $3\mathbf{U}_k - 4\mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{U}_{k-2} = 0$  ( $\mathbf{U}$  — вектор неконсервативных зависимых переменных задачи). Для рассматриваемой в настоящей работе математической модели обтекания  $\dim \mathbf{U} = 14$ .

Вектор зависимых переменных задачи включает в себя  $x^s$ . При решении задачи неявным методом для определения  $x^s$  применялось дополнительное дифференциальное уравнение  $\partial x^s / \partial \eta = 0$ , а для полноты системы граничных условий на ударной волне к условиям Ренкина — Гюгонио необходимо добавить еще одно соотношение [12]. В качестве такого соотношения использовалось условие экстраполяции давления по внутренним точкам на поверхность ударной волны.

**Моделирование химических процессов.** При моделировании неравновесных химических процессов рассматривались следующие реакции диссоциации, обмена и ассоциативной ионизации:



Здесь Y — каталитическая частица, в качестве которой может выступать любой компонент газовой смеси. Скорость образования компонента смеси газов  $\omega_i$  определялась по формуле

$$\omega_i = M_i \sum_{l=1}^{20} R_{i,l}$$

на основе соответствующих скоростей реакций

$$R_{i,l} = \rho^2 (\nu''_{i,l} - \nu'_{i,l}) k_{b,l} \left[ K_{c,l} \prod_j X_j^{\nu'_{i,l}} - \prod_j X_j^{\nu''_{i,l}} \right],$$

где  $X_j = C_j/M_j$  — мольная концентрация  $j$ -го компонента;  $l$  — номер реакции;  $\nu'_{i,l}$ ,  $\nu''_{i,l}$  — стехиометрические коэффициенты. Скорости обратных реакций  $k_{b,l}(T)$  и константы равновесия  $K_{c,l}(T)$  находились по соотношениям, приведенным в [13].

Воздействие неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы молекул на скорости реакций диссоциации учитывалось через двухтемпературную зависимость константы равновесия  $K_{c,l}(T, T_k) = K_{c,l}(T) \Phi_l(T, T_k)$ . Для констант равновесия реакций диссоциации функция  $\Phi_l(T, T_k)$  определялась на основе модели эффективного колебательного уровня, отстоящего от предела диссоциации на величину  $\beta T$  ( $\beta$  — модель диссоциации [6]), по формуле

$$\Phi_k(T, T_k) = \exp \left( -\frac{D_k}{T} \right) \frac{1 - \exp(-\theta_k/T_k)}{1 - \exp(-\theta_k/T)} \exp \left[ - (D_k - \beta_k T) \left( \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Здесь  $D_k$  — энергия диссоциации. При расчетах использованы следующие значения констант [6]: для  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{NO}$  соответственно  $D_k = 59400$ ;  $113200$ ;  $75500$ ,  $\beta_k = 1,5$ ;  $3$ ;  $3$ . Для реакций обмена и ионизации функция  $\Phi_l(T, T_k)$  определялась как  $\Phi_l(T, T_k) = 1$ .

**Возбуждение колебательных степеней свободы молекул.** Моделирование взаимодействия между колебательными и поступательными степенями свободы осуществлялось на основе выражения Ландау — Тейлора

$$Q_{vt,k} = \rho_k [e_{v,k}(T) - e_{v,k}(T_k)] / (\tau_k + \tau_{0,k}),$$

где  $\tau_k$  — время релаксации:  $\tau_k = 1/(\rho N_A P_k)$ ;  $N_A$  — число Авогадро;  $P_k = \sum_j p_{k,j}(T) X_j$ .

Вид вероятностных функций  $p_{k,j}(T)$  определялся по данным [14]. Для  $T > 8000$  К использовалась поправка Парка  $\tau_{0,k}$ , предложенная в [15]:

$$\tau_{0,k} = \frac{M}{\rho N_A \sigma \sqrt{8RT/\pi M_k}} \quad (\sigma = 10^{-20}).$$

Обмен энергии между колебательными степенями свободы молекул моделировался с помощью выражения

$$Q_{vv,k} = \rho^2 N_A C_k \frac{\theta_k R}{M_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K X_j \Theta_{j,k}(T) \left( e_{v,j}^* (1 + e_{v,k}^*) - e_{v,k}^* (1 + e_{v,j}^*) \exp \frac{T_k - T_j}{T} \right).$$

Здесь  $e_{i,k}^* = 1/[\exp(\theta_k/T_k) - 1]$ . Вид функций  $\Theta_{j,k}(T)$  определялся по данным [14].

Изменение колебательной энергии молекул за счет химических реакций рассчитывалось с использованием выражения

$$Q_{vc,k} = M_k \left( \sum_{l=1}^{15} R_{k,l} \frac{(D_k - \beta_k T) R}{M_k} + \sum_{l=16}^{17} R_{k,l} e_k \right),$$

где первое слагаемое отвечает за реакции диссоциации (при этом считается, что средние изменения удельной колебательной энергии при единичном акте диссоциации и рекомбинации равны  $(D_k - \beta_k T)R/M_k$ ); второе слагаемое отвечает за реакции обмена, а среднее изменение удельной колебательной энергии при единичном акте обменной реакции принимается равным удельной колебательной энергии  $e_k$  вновь образующейся или исчезающей молекулы.

**Коэффициенты переноса.** При определении вязкости и теплопроводности смеси газов использованы полуэмпирические формулы Уилки [16] и Масона — Саксены [17]:

$$\mu = \sum_i \left( X_i \mu_i / \left( X_i + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} G_{i,j} X_j \right) \right), \quad \lambda = \sum_i \left( X_i \lambda_i / \left( X_i + 1,065 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} G_{i,j} X_j \right) \right).$$

Здесь  $G_{i,j}$  — функция, определяемая равенством

$$G_{i,j} = \frac{(1 + \sqrt{\mu_i/\mu_j} \sqrt{M_j/M_i})^2}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + M_i/M_j}};$$

$\mu_i, \lambda_i$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности чистого газа:

$$\mu_i = \frac{2,6693 \cdot 10^{-6} T^{0,6472} \sqrt{M_i}}{1,157 \sigma_i^2 \epsilon_i^{0,1472}}, \quad \lambda_i = 3,75 \cdot 10^3 \frac{R \mu_i}{M_i} \left( 0,115 + c_{pi} \frac{0,354 \cdot 10^{-3} M_i}{R} \right).$$

Диаметр столкновения  $\sigma_i$  и параметр  $\epsilon_i$  в потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия для нейтральных компонентов газа находились по данным [18]: для  $O_2, N_2, NO, O, N$  соответственно  $\sigma_i = 3,467; 3,798; 3,492; 3,05; 3,298, \epsilon_i = 106,7; 71,4; 116,7; 106,7; 71,4$ .

Для вывода функциональной зависимости коэффициентов переноса применялся потенциал Леннарда — Джонса [18]. При расчете теплопроводности чистого газа  $\lambda_i$  учитывался вклад энергии, обусловленной вращательными степенями свободы при температуре  $T$  (поправка Эйкена).

Коэффициенты диффузии в настоящей работе определялись из условия постоянства чисел Шмидта  $Sm_i = \mu/(\rho D_i)$ , значения которых принимались равными 0,5 для нейтральных компонентов смеси газов и 0,25 для ионов. При определении коэффициентов самодиффузии  $D_{ii}^{\pm}$  в выражении для потока колебательной энергии использовано условие постоянства чисел  $S_k = \mu/(\rho D_v^k)$ , значения которых принимались равными 0,5.

**Аппроксимация уравнений.** Сформулированная задача решалась численно на основе интегроинтерполяционного метода (метода конечного объема). Его применение к



уравнениям Навье — Стокса, записанным в дивергентном виде, позволяет получить разностные аналоги законов сохранения:

$$\frac{Q_{j,k}^{n+1} - Q_{j,k}^n}{\tau} + \frac{E_{j+1/2,k}^{n+1} - E_{j-1/2,k}^{n+1}}{h_\xi} + \frac{C_{j,k+1/2}^{n+1} - C_{j,k-1/2}^{n+1}}{h_\eta} = B_{j,k}^{n+1}.$$

Здесь  $n$  — номер временного слоя;  $j, k$  — номера узлов по координатам  $\xi, \eta$  соответственно;  $\tau$  — шаг по времени;  $h_\xi, h_\eta$  — шаги по координатам  $\xi, \eta$ . Данная консервативная разностная схема является полностью неявной, что позволяет теоретически снять ограничения по устойчивости при решении жесткой системы дифференциальных уравнений.

При аппроксимации конвективной составляющей вектора потоков  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{G}$  в полуцелых узлах использована схема типа центральных разностей второго порядка точности:  $E_{j+1/2} = (1/2)(E(Q_j) + E(Q_{j+1}))$ . Для аппроксимации диффузионной составляющей вектора потоков  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{G}$  на грани элементарной ячейки также применена разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности. Вычисление прямых и смешанных производных осуществлялось по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_{j+1/2,k}} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{h_\xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_{j+1/2,k}} = \frac{U_{j+1,k+1} + U_{j,k+1} - U_{j+1,k-1} - U_{j,k-1}}{4h_\eta},$$

где  $U$  — вектор неконсервативных зависимых переменных задачи.

Шаблон разностной схемы, по которому аппроксимируются полные уравнения Навье — Стокса, состоит из девяти точек. Данная схема не относится к классу монотонных разностных схем и, следовательно, не может использоваться для решения задач с разрывами. Однако при изучении задач, в которых зависимые переменные имеют гладкий характер поведения, схема типа центральных разностей позволяет получать более точные результаты по сравнению с монотонными схемами (последние, как правило, не дают строго второго порядка точности).

Задача решалась на неравномерной расчетной сетке. Вблизи верхней (ударная волна) и нижней (твердая поверхность тела) границ расчетной области выбирались две зоны толщиной  $2/\sqrt{Re}$ , в каждой из которых после сгущения содержалось 20 % от общего числа узлов в поперечном направлении.

**Решение сеточных уравнений.** Для решения нелинейных сеточных уравнений  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ , получаемых при аппроксимации дифференциальных, где  $\mathbf{X}$  — вектор искомых сеточных переменных, применялся модифицированный метод Ньютона:

$$\mathbf{X}^{[k+1]} = \mathbf{X}^{[k]} - \tau_{k+1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{[k]}).$$

Здесь  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}$  — матрица Якоби;  $k$  — номер итерации. В процессе численного решения параметр  $\tau_k$  определялся по формуле [19]

$$\tau_{k+1} = \frac{(\Delta \mathbf{X}^{[k]} - \Delta \mathbf{X}^{[k-1]}, \mathbf{X}^{[k]} - \mathbf{X}^{[k-1]})}{(\Delta \mathbf{X}^{[k]} - \Delta \mathbf{X}^{[k-1]})^2},$$

где  $\Delta \mathbf{X}^{[k]} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{[k]})$  — вектор поправок. По мере сходимости итерационного процесса  $\tau_k \rightarrow 1$ , а скорость сходимости теоретически стремится к квадратичной.

Формирование матрицы Якоби осуществлялось при помощи конечных приращений вектора невязки по вектору искомых сеточных переменных. При аппроксимации уравнений Навье — Стокса для термодинамически неравновесной смеси газов оператор  $\mathbf{D}$  имеет разреженную блочную девятидиагональную структуру, где элементарный блок — плотная матрица размера  $14 \times 14$ .

Условия	$V_{\infty}$ , км/с	$\rho_{\infty}$ , кг/м <sup>3</sup>	$R_w$ , м	$T_{\infty}$ , К	$T_{\infty,t}$ , К	$C_{O,\infty}$	$C_{N,\infty}$	$C_{NO,\infty}$	$C_{O_2,\infty}$
Трубные (МГД-установка)	6,14	$3,23 \cdot 10^{-4}$	0,02	1054	5500	0,231	0,102	0,00068	0,01
Натурные	7,43	$2,2 \cdot 10^{-4}$	0,0294	240	240	0	0	0	0,233

Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи прямого метода LU-разложения ( $D = L \times U$ , где  $L$  — нижняя,  $U$  — верхняя треугольные матрицы). Для снижения суммарного числа арифметических операций предварительно анализировалась структура разреженности матриц  $L$  и  $U$  и проводилась перенумерация неизвестных по методу вложенных сечений [20]. Эта методика была многократно опробована в численных экспериментах и доказала свою надежность и высокую эффективность [21, 22].

**Результаты расчетов и их анализ.** Расчетные исследования проведены для условий аэродинамической трубы с МГД-ускорением потока воздуха и соответствующих натурных условий. Установка работает следующим образом. Газ, нагретый в электродуговом подогревателе до  $T_0 \sim 3500$  К при  $p_0 \sim 2 \cdot 10^5$  Па, попадает в камеру смешения, где в него дозатором вводится легко ионизируемая присадка эвтектика Na ( $\sim 1\%$  по весу). Затем через первичное сверхзвуковое сопло газ поступает в МГД-ускоритель, где ускоряется в скрещенных постоянных электрическом и магнитном полях до необходимой скорости. Далее, расширяясь во вторичном сопле до заданных статических параметров, газ попадает в рабочую часть, где располагается исследуемая модель, и через диффузор, холодильник и систему эжекторов выбрасывается в атмосферу.

В таблице приведены значения основных параметров, характеризующих обтекание для условий МГД и натурных.

Критерием соответствия этих условий выбраны равенства полной энтальпии  $H = \text{const}$ , скоростного напора  $q = \text{const}$  и параметра бинарного подобия  $D = \text{const}$  ( $D = R_w \rho_{\infty}$ ,  $R_w$  — радиус сферы). На основе этих требований были найдены условия полета в атмосфере Земли, отвечающие высоте  $H = 62,7$  км.

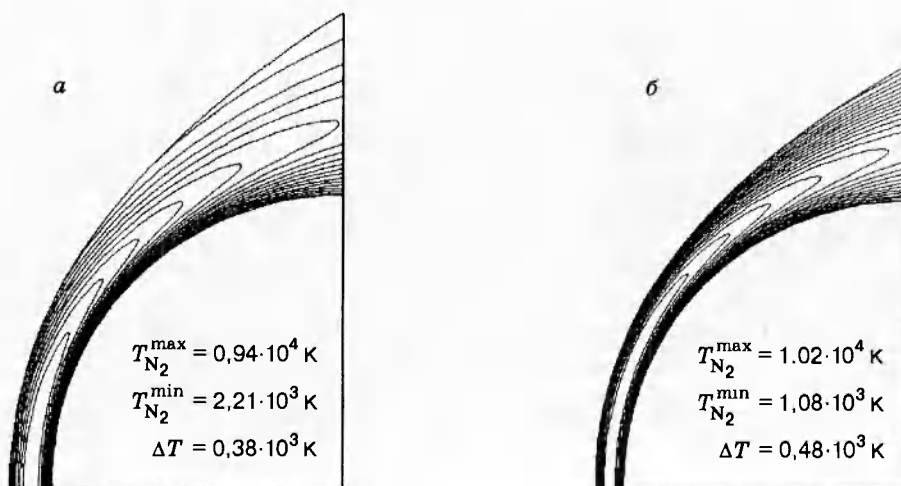


Рис. 1



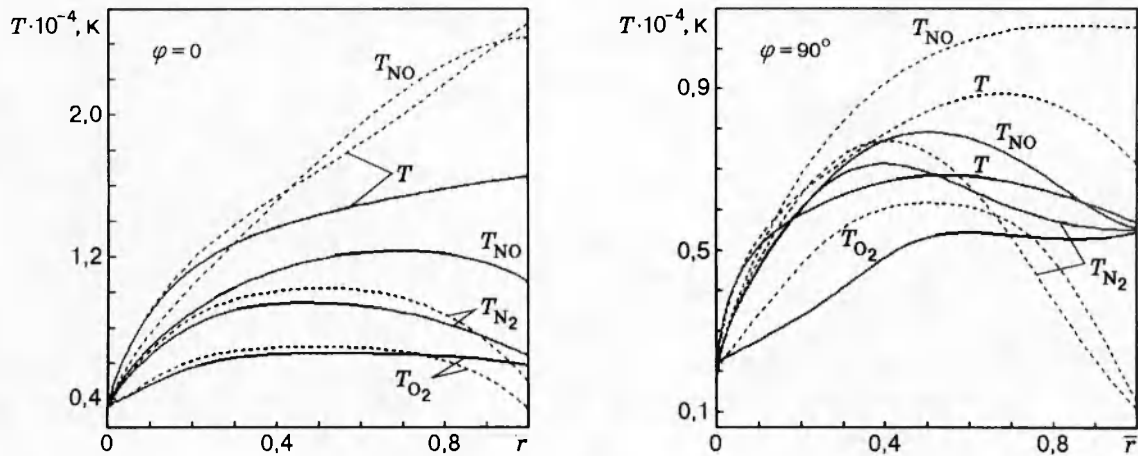


Рис. 2

Результаты получены для термически неравновесной модели воздуха для двух предельных случаев каталитической активности поверхности тела: абсолютно каталитической и абсолютно некаталитической. Коэффициент черноты поверхности  $\epsilon = 0,85$ . Основная часть расчетов проведена на сетке, содержащей  $31 \times 71$  узлов по продольной и нормальной к поверхности тела координатам  $\xi$  и  $\eta$ . Выборочный анализ точности и сходимости данных, проведенный с использованием сетки с большим числом узлов, показал, что погрешность определения равновесной радиационной температуры поверхности не превышала 1%.

На рис. 1, а и б представлены изолинии колебательной температуры азота  $T_{N_2}$  соответственно для условий эксперимента и натуральных условий (абсолютно каталитическая поверхность). Видно, что для МГД-условий увеличивается отход ударной волны от поверхности тела по сравнению с натурными условиями. Это связано с тем, что в набегающем потоке МГД-установки газ частично диссоциирован и колебательные степени свободы молекул находятся на верхних энергетических уровнях.

Профили поступательно-вращательной и колебательных температур поперек ударного слоя для двух точек сферы ( $\varphi = 0; 90^\circ$ ) приведены на рис. 2 (абсолютно каталитиче-

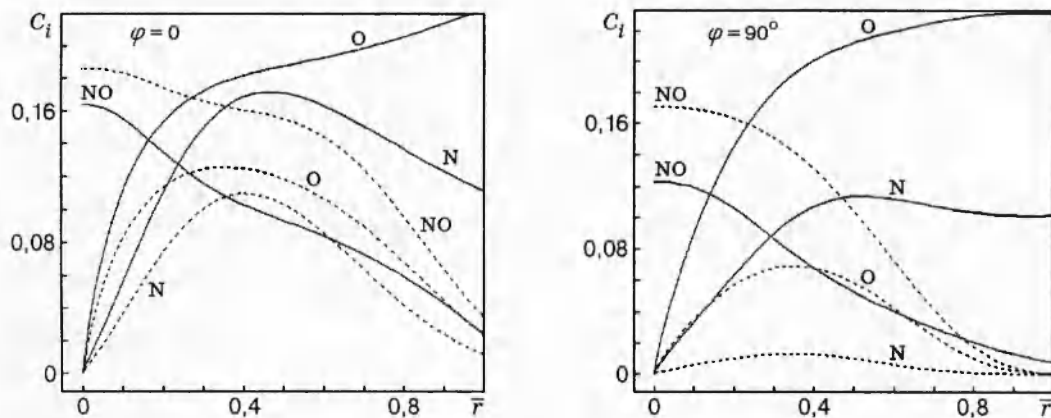


Рис. 3

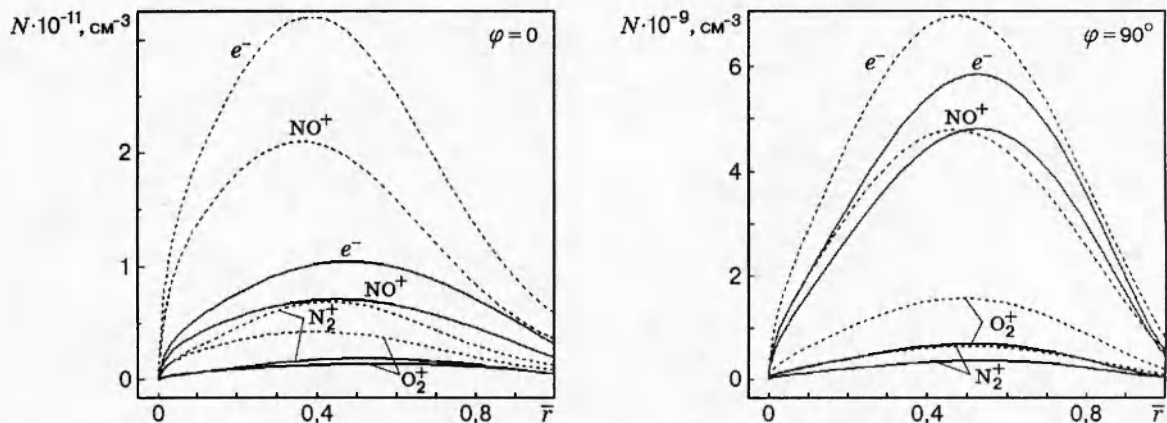


Рис. 4

ская поверхность тела,  $\bar{r}$  — расстояние от поверхности тела, отнесенное к  $x^s$ ). На рис. 2–6 сплошные линии — МГД-условия, штриховые — условия натурального полета. Видно, что колебательные температуры молекул  $O_2$  и  $N_2$  для тех и других условий близки, тогда как поступательно-вращательная  $T$  и колебательная температура  $NO$  сильно отличаются в области, примыкающей к ударной волне, и становятся близкими в окрестности твердой границы. Можно считать, что возбуждение колебательных степеней свободы молекул в МГД-установке является в определенной степени адекватным возбуждению в натурном полете.

Для анализа процесса моделирования неравновесных химических процессов в МГД-установке на рис. 3 представлены профили массовых концентраций компонентов  $O$ ,  $N$  и  $NO$  поперек ударного слоя в двух точках ( $\varphi = 0; 90^\circ$ ). Видно, что в натуральных условиях химические реакции диссоциации идут несколько медленнее. Это связано с тем, что в натуральных условиях происходит более сильное «затягивание» реакций диссоциации из-за колебательно-диссоциационного взаимодействия.

При лабораторном моделировании гиперзвуковых потоков важное место отводится исследованию плотности заряженных частиц. На рис. 4 показаны профили concentra-

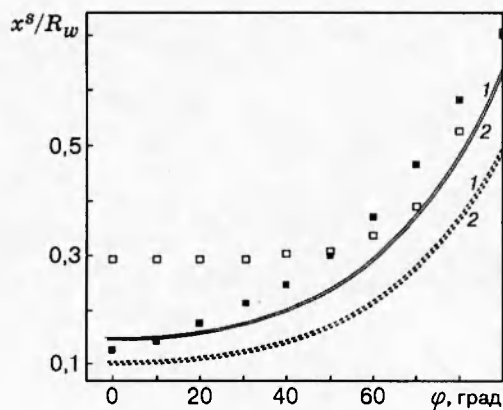


Рис. 5

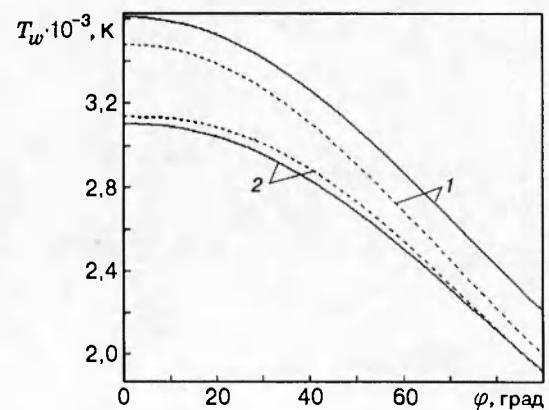


Рис. 6

ций заряженных частиц поперек ударного слоя. Для заряженных частиц поверхность тела принималась абсолютно каталитической. Согласно данным рис. 4, имеется достаточно большое различие (примерно в 3 раза) в плотности электронов в окрестности передней критической точки, тогда как в окрестности боковой поверхности наблюдается достаточно хорошее согласование натуральных данных и полученных в эксперименте.

На рис. 5 приведены данные по отходу ударной волны от поверхности тела, полученные в результате расчетов и испытаний в установке с МГД-ускорителем воздуха. Из рис. 5 видно, что каталитические свойства поверхности тела слабо влияют на отход ударной волны. Экспериментальные результаты теневой съемки (рис. 5, темные точки) хорошо согласуются с расчетными в окрестности критической точки, и имеется систематическое превышение экспериментальных данных над расчетными вниз по потоку от критической точки. Интересно отметить, что в эксперименте зона светимости в окрестности критической точки достаточно сильно выдавалась вверх по потоку от фронта ударной волны, а при продвижении вниз по потоку от критической точки она сужалась до значений, меньших, чем данные теневой съемки. При этом для  $\varphi \approx 60 \div 80^\circ$  экспериментальные результаты зоны светимости (рис. 5, светлые точки) лучше согласуются с расчетными по отходу ударной волны. Выше отмечалось, что отход ударной волны от поверхности тела для натуральных и МГД-условий сильно различается. Это связано, в первую очередь, с разным составом набегающего потока газа.

Расчетные данные, характеризующие аэродинамическое нагревание поверхности тела для натуральных и МГД-условий, представлены на рис. 6, где видно удовлетворительное согласие данных по теплообмену (1 — каталитическая поверхность, 2 — некаталитическая). Большой эффект каталитических свойств поверхности тела для МГД-условий связан с тем, что в набегающем потоке газ частично диссоциирован и колебательные степени свободы возбуждены сильнее. При этом влияние колебательно-диссоциационного взаимодействия на теплообмен в натуральных условиях оказывается более существенным, чем в МГД-условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00565).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Tirsky G. A.** Up-to-date gasdynamic models of hypersonic aerodynamic and heat transfer with real gas properties // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1993. V. 25. P. 151–181.
2. **Candler G.** On the Computation of Shock Shapes in Nonequilibrium Hypersonic Flows. N. Y., 1989 (Paper / AIAA; 89-0312).
3. **Daib A., Scholl E., Fruhauf H., Knab O.** Validation of the URANUS Navier — Stokes Code for High-temperature Nonequilibrium Flows. N. Y., 1993 (Paper / AIAA; 93-5070).
4. **Levin D. A., Candler G. V., Collins R. J., et al.** Examination of Ultraviolet Radiation Theory for Bow Shock Rocket Experiments. N. Y., 1992 (Paper / AIAA; 92-2871).
5. **Wada Y., Ogawa S., Kubota H.** Thermo-chemical models for hypersonic flows // *J. Computers Fluids.* 1993. V. 22, N 2/3. P. 179–187.
6. **Losev S. A., Makarov V. N., Pogosbekyan M. Ju., et al.** Thermochemical Nonequilibrium Kinetic Models in Strong Shock Waves on Air. N. Y., 1994 (Paper / AIAA; 94-1990).
7. **Sharma S. P., Park C.** A Survey of Simulation and Diagnostic Techniques for Hypersonic Nonequilibrium Flows. N. Y., 1987 (Paper / AIAA; 87-0406).

8. **Sharma S. P.** Nonequilibrium and Equilibrium Shock Front Radiation Measurements. N. Y., 1990 (Paper / AIAA; 90-0139).
9. **Gorelov V., Gladyshev, Kireev A., et al.** Nonequilibrium Shock-layer Radiation in the Systems of Molecular Bands NO and  $N_2^+$  (1-): Experimental Study and Numerical Simulation. N. Y., 1996 (Paper / AIAA; 96-1900).
10. **Alfjorov V. I.** A Report on Status of MHD Hypersonic Test Technology in Russia. N. Y., 1993 (Paper / AIAA; 93-3193).
11. **Alfjorov V. I., Yegorov I. V., Shcherbakov G. I.** On the application of MHD-gas acceleration wind tunnels to investigate hypersonic gas flows over bodies // Proc. 33d Symp. on Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics. June 13-15, 1995. The University of Tennessee Space Institute. P. V.2-1-V.2-6.
12. **Chakravarthy S. R.** Euler equations-implicit schemes and boundary conditions // AIAA J. 1983. V. 21, N 5. P. 699-706.
13. **Kang S. W., Jones W. L., Dunn M. G.** Theoretical and measured electron-density distributions at high altitudes // AIAA J. 1973. V. 11, N 2. P. 141-149.
14. **Бирюков А. В.** Кинетика физических процессов в газодинамических лазерах // Тр. Физ. ин-та АН СССР. 1975. Т. 83. С. 13-86.
15. **Park C., Yoon S.** Fully coupled implicit method for thermochemical nonequilibrium air at suborbital flight speeds // J. Spacecraft. 1991. V. 28, N 1. P. 31-39.
16. **Wilke S.** A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys. 1950. V. 18, N 4. P. 517-519.
17. **Mason E. A., Saxena S. C.** Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids. 1958. V. 1, N 5. P. 361-369.
18. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
19. **Каримов Т. Х.** О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1038-1042.
20. **George A.** Nested dissection of a regular finite element mesh // SIAM J. Numer. Analys. 1973. V. 10, N 2. P. 347-363.
21. **Егоров И. В.** К вопросу о влиянии реальных свойств воздуха на интегральные аэродинамические характеристики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 4. С. 156-164.
22. **Yegorov I. V., Zaitsev O. L.** Development of efficient algorithms for computational fluid dynamic problems // Proc. 5th ISCFD, Sendai. 1993. V. 3. P. 393-400.

*Поступила в редакцию 2/VII 1996 г.*

---