УДК 536.52

Использование серого приближения для оценки истинной температуры материала по спектральному распределению обратных яркостных температур

С.П. Русин

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: sprusin@yandex.ru

Представлен графо-аналитический способ (серая модель) оценки истинной температуры непрозрачного материала как сверху, так и снизу при неизвестном характере зависимости излучательной способности от длины волны. Показано, что если в выбранном спектральном интервале график спектрального распределения обратных яркостных температур можно приближенно представить линией, выпуклой вниз, то полученное значение температуры спектрального отношения ограничивает истинную температуру сверху. Если в спектральном интервале график указанной зависимости можно представить линией, выпуклой вверх, то полученное значение температуры спектрального отношения ограничивает истинную температуру сверху. Если в спектральном интервале график указанной зависимости можно представить линией, выпуклой вверх, то полученное значение температуры спектрального отношения ограничивает истинную температуру снизу. Решение данной обратной задачи необходимо сочетать с решением прямой задачи. В результате появляется дополнительная информация о спектральном распределении излучательной способности материала в выбранном спектральном интервале. Кроме того, это является проверкой сделанных допущений. В работе также приводится пример обработки экспериментальных данных, известных из литературных источников.

Ключевые слова: истинная температура, яркостная температура, серое приближение.

Введение

Как известно, косвенная информация о термодинамической (истинной) температуре T и излучательной способности ε свободно излучающего непрозрачного объекта может быть получена с помощью регистрации спектра теплового излучения. При этом искомыми величинами являются истинная температура T и зависимость ε от длины волны λ в зарегистрированном участке спектра. Такая задача является обратной по отношению к зарегистрированному спектру излучения, т.к. по следствию определяется причина. Кроме того, эта задача является некорректно поставленной, поскольку имеет не одно решение и малым погрешностям входных данных могут соответствовать большие погрешности выходных данных [1–3]. Методам определения истинной температуры по спектру теплового излучения посвящены монографии [4, 5]. В ряде случаев получены экспериментальные реализации предложенных подходов [6, 7]. Целесообразность использования этих подходов подтверждена также результатами компьютерного моделирования [8, 9]. Вместе с тем, в фундаментальной двухтомной монографии по термометрии излучения [10, 11], написанной международным коллективом авторов, отмечалось, что для некоторых специфических ситуаций многоволновая пирометрия может иметь

© Русин С.П., 2020

Русин С.П.

преимущество, в то время как в целом одноволновая термометрия, вооруженная разумной оценкой излучательной способности поверхности, очевидно, будет более простым решением и, вероятно, даст более низкие неопределенности для оценок температуры ([10], стр. 15). Аналогичная критика многоволновой термометрии была высказана и в [11] (стр. 15), но уже другими авторами.

Сложилась парадоксальная ситуация, когда регистрация излучения объекта при одной длине волны обладает большей информационной ценностью, чем информация, зарегистрированная при нескольких длинах волн. Объяснение этому следует искать, прежде всего в том, что, как уже отмечалось, задача определения истинной температуры нагретого материала по зарегистрированному спектру теплового излучения является некорректно поставленной. В частности, она имеет не одно решение. Поэтому методы и алгоритмы обработки экспериментальных данных должны выделить из множества решений нужное, которое позволит дать хотя бы одностороннюю оценку точности полученных результатов.

На рис. 1. представлены зависимости обратных яркостных температур $1/T_{rad}$ от λ при T = 1800 К в вакууме для вольфрама, тантала и молибдена в интервале длин волн $[\lambda_1, \lambda_m]$. Для вольфрама $\lambda_1 = 300$ нм, для тантала и молибдена $\lambda_1 = 400$ нм. Для всех трех металлов $\lambda_m = 2000$ нм. Эти зависимости рассчитаны по спектральным распределениям ε , опубликованным в [12]. Отметим, что для всех трех металлов зависимости $1/T_{rad}$ от λ выпуклы вниз. Из рис. 1 также следует, что даже первичное представление исходных данных в таком виде дает возможность судить об истинной температуре объекта измерения. Разумеется, чем ближе λ_1 к началу координат, тем точнее может быть определена искомая температура графическим и численным путями, т.к. при $\lambda \to 0$ $T_{rad} \to T$ [13].

Как следует из данных справочника [12], для многих материалов графики зависимостей $1/T_{\rm rad}$ от λ в различных спектральных интервалах могут быть представлены



в том или ином приближении как выпуклые вниз, вверх или представлять собой линию, близкою к прямой. В соответствии с формулой Планка и приближением Вина это говорит о влиянии излучательной способности материала на форму этих линий. Так, например, зависимость $1/T_{rad}$ от λ , близкая к прямолинейной, характерна для серого излучения ($\varepsilon(\lambda) = \text{const}$). Это следует непосредственно из приближения Вина, записанного для обратных яркостных температур:

$$1/T_{\rm rad}(\lambda) = 1/T - \lambda \ln \varepsilon(\lambda)/c_2, \qquad (1)$$

где $c_2 = 14,388 \cdot 10^6$ нм·К — вторая постоянная излучения в формуле Планка [10].

После регистрации яркостной температуры $T_{\rm rad}$ соотношение (1) представляет собой одно уравнение с двумя неизвестными. Как известно, для определения температуры материала в сером приближении достаточно измерить яркостные температуры только для двух длин волн. Сначала на основании (1) запишем систему из двух уравнений для длин волн λ_1 и λ_m в общем виде:

$$\begin{aligned} c_2 / (\lambda_1 T_{\mathrm{rad},1}) &= c_2 / (\lambda_1 T) - \ln \varepsilon_1, \\ c_2 / (\lambda_m T_{\mathrm{rad},m}) &= c_2 / (\lambda_m T) - \ln \varepsilon_m, \\ T_{\mathrm{rad},1} &= T_{\mathrm{rad}} (\lambda_1), \quad T_{\mathrm{rad},m} = T_{\mathrm{rad}} (\lambda_m), \quad \varepsilon_1 &= \varepsilon (\lambda_1), \quad \varepsilon_m = \varepsilon (\lambda_m). \end{aligned}$$

где

Вычтя из первого уравнения второе, после преобразований получим:

``

$$1/T_{\rm c} = \frac{1/(\lambda_1 T_{\rm rad,1}) - 1/(\lambda_m T_{\rm rad,m})}{1/\lambda_1 - 1/\lambda_m} = 1/T + \frac{\ln(\varepsilon_m/\varepsilon_1)}{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_m)},\tag{2}$$

где $T_{\rm c}$ — температура спектрального отношения. В сером приближении $\varepsilon_1 = \varepsilon_m$. Тогда из (2) следует, что $1/T_c = 1/T_{gr}$, T_{gr} — температура материала в сером приближении $T_{\rm c} = T_{\rm gr},$ где

$$1/T_{\rm c} = \frac{1/(\lambda_1 T_{\rm rad,1}) - 1/(\lambda_m T_{\rm rad,m})}{1/\lambda_1 - 1/\lambda_m}.$$
(3)

Итак, вычислить значение $T_{\rm c} = T_{\rm gr}$ сравнительно несложно. Основная трудность заключается в том, чтобы определить, как ограничивает полученная величина искомую истинную температуру материала: сверху, снизу или выполняется серое приближение.

Из (2) следует, что при одних и тех же значениях λ_1 , λ_m , $T_{rad}(\lambda_1)$, $T_{rad}(\lambda_2)$, T_c имеется три варианта оценки значений искомой температуры T: при $\varepsilon_m/\varepsilon_1 < 1$ $T_c > T$, при $\varepsilon_m/\varepsilon_1 > 1$ $T_c < T$ и при $\varepsilon_m/\varepsilon_1 = 1$ $T_c = T$. Однако при этом не известны ни значения ε_1 и ε_m , ни отношение $\varepsilon_m/\varepsilon_1$. Таким образом, определение истинной температуры материала по температуре спектрального отношения также является некорректно поставленной задачей. Возникает необходимость в дополнительной информации. Одной из возможностей ее получения является анализ зависимости $1/T_{rad}$ от λ , экспериментально определенной в спектральном интервале от λ_1 до λ_m . В настоящей работе для оценки истинной температуры непрозрачного материала, когда неизвестна форма спектрального распределения излучательной способности материала в процессе сужения спектрального интервала, используется серое приближение и температура спектрального отношения. Показано, что при использовании серого приближения для оценки истинной температуры материала недостаточно знания яркостных температур только при двух длинах волн. Необходима дополнительная информация о зависимости обратных яркостных температур от длины волны в данном спектральном интервале.

Температура спектрального отношения, вычисленная по серой модели, ограничивает величину истинной температуры сверху, если в рассматриваемом спектральном интервале график зависимости $1/T_{\rm rad}$ от λ можно представить условно выпуклым вниз (например, график данной зависимости можно заключить между двумя линиями, выпуклыми вниз). Если же на спектральном интервале график указанной зависимости можно представить условно выпуклым вверх, то значение температуры спектрального отношения ограничивает искомую температуру T снизу. При линейной зависимости $1/T_{\rm rad}$

от λ температура спектрального отношения соответствует истинной температуре материала.

Решение обратной задачи необходимо сочетать с решением прямой задачи, когда по полученному значению температуры спектрального отношения определяется зависимость относительной излучательной способности материала. Это позволяет проверить сделанные допущения и представить форму зависимости излучательной способности материала при температуре, близкой к искомой.

В разделах, приведенных ниже, будет рассмотрен в соответствии с предложенным подходом пример обработки экспериментальных данных, известных из литературных источников, также будут обсуждаться способы выбора спектрального интервала, на котором регистрируется спектр теплового излучения.

1. Две модели излучательной способности

Для более подробного анализа рассмотрим два иллюстративных примера, когда образцы при T = 1800 К свободно излучают в оптически прозрачное пространство, но для них в первом случае зависимость $\ln \varepsilon$ от λ линейно убывает в спектральном интервале от $\lambda_1 = 300$ нм до $\lambda_m = 2000$ нм (модель 1), а во втором случае в том же спектральном интервале функция $\ln \varepsilon$ линейно возрастает при увеличении λ (модель 2). Оценка точности серого приближения будет сделана с помощью этих моделей. Исходные данные генерируются в соответствии с формулой Планка. Анализ проводится в пределах применимости приближения Вина для обратных яркостных температур в соответствии с (1).

1.1. Пример № 1. Зависимость In *ε* от *λ* линейно убывает в заданном спектральном интервале

В первом иллюстративном примере полагается, что в заданном спектральном интервале

$$\ln \varepsilon = -a_1 - a_2 \lambda. \tag{4}$$

Здесь и далее полагается также, что постоянные коэффициенты a_1 и a_2 имеют только положительные значения. Для задания линейной зависимости $\ln \varepsilon$ от λ , согласно (4), использовались две точки: $\varepsilon_1 (\lambda_1 = 300 \text{ нм}) = 0.7$ и $\varepsilon_m (\lambda_m = 2000 \text{ нм}) = 0.2$. Графики зависимостей ε и $\ln \varepsilon$ от λ представлены на рис. 2.

На основании (1) и (2) получим:

$$1/T_{\rm rad} = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2,\tag{5}$$

где $a_0 = 1/T$. Согласно (5), зависимость $1/T_{rad}$ от λ на рис. 3 представляет собой линию,



Рис. 2. Зависимости $\varepsilon(a)$ и $\ln \varepsilon(b)$ от $\lambda (\ln \varepsilon = -a_1 - a_2 \lambda)$.

выпуклую вниз. С математической точки зрения это означает, что производная $(1/T_{rad})'_{\lambda}$ возрастает на [λ_1 , λ_m]. Функция $1/T_{rad}$ от λ , выпуклая вниз, характеризуется еще и тем, что ее график всеми точками лежит над любой своей касательной (или на ней) и под любой своей хордой (или на ней) (см., например, [14]).

Оценим искомую температуру *T* с помощью серой модели. Для этого на графике рис. 3 выбираются две точки — A { λ_1 , 1/ $T_{rad}(\lambda_1$)} и B{ λ_m , 1/ $T_{rad}(\lambda_m)$ } — и через них проводится прямая линия 2 до пересечения с осью ординат. Ордината этой точки пересечения



Рис. 3. Зависимость обратных яркостных температур $1/T_{\rm rad}$ от λ при T = 1800 К для модельного образца при $\ln \varepsilon = -a_1 - a_2 \lambda$ в прозрачной среде.

l — зависимость $1/T_{rad}$ от λ в интервале $[\lambda_1, \lambda_m]$, *2* —линия, соединяющая точки A и B (серая модель), *3* — зависимость $1/T_{rad}$ от λ в интервале $[0, \lambda_1]$; α — угол между прямой *2* и положительным направлением

оси абсцисс, β — угол между прямой 2 и касательной к графику зависимости $1/T_{rad}$ от λ в точке А.

может быть вычислена с помощью температуры спектрального отношения по формуле (3). В рассматриваемом случае $1/T_c = 5,2482 \cdot 10^{-4}$ 1/K, $T_c = 1905,4$ K. Заметим, что здесь T_c — это температура, соответствующая температуре $T_{\rm gr}$ серой модели, т.е. $T_c = T_{\rm gr}$ (2).

Значение $1/T_{\rm rad}$ при $\lambda = 0$ — величина условная, которая не имеет физического смысла. С математической точки зрения это постоянное слагаемое $1/T_{\rm c} = 1/T_{\rm gr}$ зависимости $1/T_{rad}$ от λ для серой модели в спектральном интервале [λ_1, λ_m]. Как следует из рис. 3, продвигая точку В по линии *I* в коротковолновую часть спектра, можно приблизится к искомой температуре. Важно оценить эти приближения сверху и снизу. С этой целью на рис. 3 штриховыми линиями выполнены дополнительные построения. Обозначим ординату точки А как h, a абсциссу — как g. На этом же рисунке сплошной линией показана касательная, проведенная к графику зависимости $1/T_{rad}$ от λ в точке А до пересечения с осью ординат. В этом случае ординате точки пересечения будет соответствовать некоторая обратная температура $1/T_*$. Угол, который составляет прямая 2 с положительным направлением оси абсцисс, обозначим а. Острый угол между касательной и линией 2 обозначим β , причем $0 < \beta < \alpha$. Равенство $\beta = \alpha$ исключается, т.к оно имеет место только для абсолютно чтрного тела (АЧТ). Из элементарных геометрических соображений следует, что угол, который составляет касательная в точке А с положительным направлением оси абсцисс, равен $\alpha - \beta$. Тогда для серой модели ордината точки пересечения прямой 2 с осью ординат равна

$$1/T_{\rm c} = 1/T_{\rm gr} = h - g \cdot \mathrm{tg}\alpha. \tag{6}$$

Ордината точки пересечения касательной с осью ординат рассчитывается по аналогичному соотношению. Тогда

$$1/T_* = h - g \cdot tg(\alpha - \beta). \tag{7}$$

Поскольку $\alpha > \alpha - \beta$, то $tg\alpha > tg(\alpha - \beta)$ и $1/T_* > 1/T_{gr}$.

Покажем, что, в свою очередь, $1/T > 1/T_*$. Для этого график функции $1/T_{rad}$ от λ (линия *l* на рис. 3), построенный в соответствии с (5), продолжим в коротковолновую область до пересечения с осью ординат. Эта линия, разумеется, также выпукла вниз. Как уже отмечалось, график функции, выпуклой вниз, всеми точками лежит над любой своей касательной или на ней. Следовательно, ордината точки пересечения графика функции $1/T_{rad}$ от λ с осью ординат лежит выше точки, ордината которой $1/T_*$. Поэтому $1/T > 1/T_*$, $T_* > T$ и $T_{or} > T$.

Отсюда следует важный вывод: если график зависимости $1/T_{\rm rad}$ от λ на заданном спектральном интервале представляет собой непрерывную линию, выпуклую вниз, то условная температура $T_{\rm gr} = T_{\rm c}$, рассчитанная по серой модели в точках A и B, будет ограничивать истинную температуру объекта сверху, т.е. будет выполняться неравенство $T_{\rm gr} > T$.

Поскольку $T_{\rm gr} > T$, то $\varepsilon > \varepsilon_{\rm gr} = \text{const}$ на заданном спектральном интервале. Как показали вычисления, $\varepsilon_{\rm gr} = 0,1603$. Это примерно в 4,37 раза меньше $\varepsilon(\lambda_1) = 0,7$ и в 1,25 раза меньше $\varepsilon(\lambda_m) = 0,2$.

1.2. Пример № 2. Зависимость In *ε* от λ линейно возрастает в заданном спектральном интервале

Покажем, что и в этой ситуации из зарегистрированной зависимости $1/T_{rad}$ от λ может быть извлечена полезная информация об истинной температуре объекта. Во втором иллюстративном примере полагалось, что в заданном спектральном интервале

$$\ln \varepsilon = -a_1 + a_2 \lambda. \tag{8}$$

Для задания линейной зависимости $\ln \varepsilon$ от λ , согласно (8), использовались две точки: $\varepsilon_1 (\lambda_1 = 300 \text{ нм}) = 0.3 \text{ и } \varepsilon_m (\lambda_m = 2000 \text{ нм}) = 0.7.$ Графики зависимостей ε и $\ln \varepsilon$ от λ представлены на рис. 4. На основании (1) и (8) получим

$$1/T_{\rm rad} = a_0 + a_1 \lambda - a_2 \lambda^2.$$
(9)

Зависимость $1/T_{rad}$ от λ в графическом виде на рис. 5 представляет собой линию, выпуклую вверх. Согласно (9), производная $(1/T_{rad})'_{\lambda}$ убывает на [λ_1 , λ_m]. В соответствии с (3), ордината точки пересечения прямой 2 с осью ординат равна $1/T_c = 1/T_{gr} =$ = 5,7634 · 10⁻⁴ 1/K ($T_c = T_{gr} = 1735,1$ K). Причем величина T_{gr} больше, чем значение $T_{rad}(\lambda_1) = 1722,2$ K.

На рис. 5 в точке А проведена касательная, которая пересекает ось ординат. Используя тот же подход, что и в п. 1.1, можно констатировать следующее. Если график зависимости $1/T_{\rm rad}$ от λ на заданном спектральном интервале представляет собой непрерывную линию, выпуклую вверх, то условная температура, рассчитанная по серой модели в точках А и В, будет ограничивать истинную температуру объекта снизу, т.е. будет выполняться неравенство $T_{\rm gr} < T$.



Рис. 4. Зависимости $\varepsilon(a)$ и $\ln \varepsilon(b)$ от λ ($\ln \varepsilon = -a_1 + a_2 \lambda$).



Рис. 5. Зависимость $1/T_{rad}$ от λ при T = 1800 К для модельного образца при $\ln \varepsilon = -a_1 + a_2 \lambda$ в прозрачной среде. I — зависимость $1/T_{rad}$ от λ в интервале $[\lambda_1, \lambda_m]$, 2 —линия, проведенная через точки А и В (серая модель), 3 — зависимость $1/T_{rad}$ от λ в интервале $[0, \lambda_1]$.

2. Выбор спектрального интервала

Поскольку в процессе эксперимента измерения спектральных интенсивностей (или соответствующих яркостных температур) осуществляются при различных длинах волн, желательно выбрать спектральный интервал, в котором эти измерения имели бы наибольшую точность. Желательно также, чтобы в этом спектральном интервале зависимость $1/T_{\rm rad}$ от λ была близка к прямолинейной. Но это не единственный критерий. Рассматриваемые методы определения истинной температуры основаны на различии значений интенсивностей в спектре теплового излучения при постоянной температуре. Поэтому важно, чтобы, во-первых, это различие было, как можно больше, и, во-вторых, чтобы спектральные интенсивности были измерены с наибольшей точностью. Эти условия влекут за собой требование высоких значений частных производных измеряемых интенсивностей по температуре и длине волны.

В связи с тем, что $I_c(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)I_0(\lambda, T)$, где $I_0(\lambda, T)$ — спектральная интенсивность АЧТ, выбор спектрального интервала может быть выполнен приближенно, по зависимости $I_0(\lambda, T)$ от λ , без проведения регистрации спектра вплоть до максимума излучения. Прежде всего, отметим, что функция $I_c(\lambda, T = \text{const})$ должна иметь максимум при некоторой длине волны λ_{max}^c . При этом функция $I_c(\lambda, T)$ в спектральном интервале от $0 < \lambda < \lambda_{\text{max}}^c$ возрастает. Соответственно производная $\partial I_c(\lambda, T)/\partial \lambda > 0$, причем при увеличении температуры T значения $\partial I_c(\lambda, T)/\partial \lambda$ также увеличиваются. В спектральном интервале $\lambda_{\text{max}}^c < \lambda < \infty$ функция $I_c(\lambda, T)$ убывает, соответственно производная $\partial I_c(\lambda, T)/\partial \lambda < 0$. При увеличении температуры T значения $\partial I_c(\lambda, T)/\partial \lambda$



пературы объекта. Это следует из законов излучения АЧТ.

Кроме перечисленных критериев необходимо, чтобы в выбранном спектральном интервале выполнялось приближение Вина с требуемой точностью. Эта точность может быть оценена с помощью соотношения [10]:

$$\eta_{\rm W} = I_{0,\rm W} \left(\lambda T\right) / I_0 \left(\lambda T\right) = 1 - \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right),\tag{10}$$

где $\eta_{\rm W}$ — отношение спектральной интенсивности АЧТ $I_{0,{\rm W}}(\lambda T)$, вычисленной согласно приближению Вина, к спектральной интенсивности АЧТ $I_0(\lambda T)$, вычисленной в соответствии с формулой Планка.

На рис. 6 в графической форме представлена зависимость $\eta_{\rm W}$ от $0 < \lambda T \le c_3$, где $c_3 = \lambda_{\rm max} T = 2,8978 \cdot 10^6 \,\rm mm \cdot K$ — постоянная излучения закона смещения Вина, $\lambda_{\rm max}$ — длина волны, при которой достигается максимум функции $I_0(\lambda, T)$ АЧТ [10]. Как следует из (10), при $\lambda = \lambda_{\rm max}$ величина $\lambda_{\rm max} T = c_3 \,\rm mm \cdot K$ и $\eta_{\rm W} = 1 - \exp(-c_2/c_3) = 0,993$. При λ , меньших $\lambda_{\rm max}$, точность приближения Вина увеличивается, приближаясь к единице.

Разумеется, что при применении формулы Планка, ограничение, связанное с использованием приближения Вина, может быть снято. Однако в этом случае измеренные интенсивности в различных участках спектра могут мало отличаться. Так, например, равенство интенсивностей при двух длинах волн делает невозможным применение методов термометрии спектрального отношения. Как уже отмечалось, ухудшается также точность рассматриваемого метода. Из изложенного следует, что желательно, чтобы спектральный интервал для экспериментальных исследований имел в качестве нижнего предела наименьшую длину волны, при которой может быть зарегистрировано излучение измерительной системой, а верхний предел должен быть меньше, чем c_3/T .

3. Пример использования распределения обратных яркостных температур образца из вольфрама для оценки его истинной температуры

Для генерирования исходных данных были выбраны экспериментальные результаты работы [15], в которой определялась зависимость излучательной способности вольфрама от длины волны при различных постоянных температурах в вакууме. Полагалось, что излучательная способность ε может быть аппроксимирована непрерывной гладкой функцией, а ее относительная погрешность $\delta_{\varepsilon} = 0,005$ во всем спектральном интервале от 310 до 800 нм. В связи с тем, что спектральная интенсивность $I_0(\lambda, T)$ вычислялась с компьютерной точностью, относительная погрешность δ_I интенсивности собственного излучения $I_c(\lambda, T)$ равнялась относительной погрешности δ_{ε} .

Полагалось, если график зависимости обратных яркостных темпераиур от длины волны можно заключить между двумя линиями, одновременно выпукыми вверх (вниз), то этот график можно считать условно выпуклым вверх (вниз). В качестве исходных данных использовалась зависимость $1/T_{rad}$ от λ при T = 2400 K, рассчитанная по данным работы [15] с помощью формулы Планка. Сама зависимость в графической форме представлена на рис. 7. В соответствии с принятыми допущениями эта зависимость условно выпукла вниз, т.к. график функции может быть расположен между двумя линиями, выпуклыми вниз.

Как следует из рис. 7, прямая линия, соединяющая точки A и B, характеризует зависимость $1/T_{\rm rad}^{\rm gr}$ для серой модели. Эта прямая пересекается с графиком зависимости $1/T_{\rm rad}$ от λ только в точках A и B, причем для внутренних точек спектрального интервала от $\lambda_1 = 310$ нм до $\lambda_m = 800$ нм выполняется неравенство $1/T_{\rm rad}^{\rm gr} - 1/T_{\rm rad} > 0$. Продолжая на графике рис. 7 прямую AB до пересечения с осью ординат, получим значение $1/T_{\rm gr} = 1/T_{\rm c}$, которое соответствует значению $T_{\rm c} = 2426,5$ К. При уменьшении величины λ_m значения $T_{\rm c}$ также будут уменьшаться, приближаясь к истинной температуре. Так, при $\lambda_m = 600, 500$ и 400 нм значения $T_{\rm c}$ будут равны 2419,5, 2413,6 и 2402,4 К соответственно.

На рис. 8 представлены зависимости T_c от λ_m при $\lambda_1 = 310$ нм (кривая *l*) и $\lambda_1 = 400$ нм (кривая *2*). Расчеты были выполнены по соотношению (3) с последующим вычислением T_c .



Puc. 7. Зависимость 1/*T*_{rad} от λ при *T* = 2400 К для образца из вольфрама в вакууме в спектральном интервале от 310 до 800 нм, рассчитанная по данным работы [15].
 I — значения 1/*T*_{rad} (λ), полученные по данным [15], 2 —линия, соединяющей точки А (λ₁= 310 нм) и В (λ_m = 800 нм), 3 — продолжение прямой, соединяющей точки А и В до пересечения с осью ординат.

Рис. 8. Зависимости T_c от λ_m для образца из вольфрама в вакууме при истинной температуре T = 2400 К и значениях $\lambda_1 = 310$ нм (1) и $\lambda_m = 400$ нм (2), рассчитанные по данным работы [15].

Из приведенных кривых и результатов вычислений следует, что при $\lambda_1 = 310$ нм и увеличении λ_m значения T_c монотонно возрастают (кривая *l* на рис. 8). При $\lambda_m = 780$ нм и $\lambda_m = 800$ нм значения T_c почти совпадают. Это означает, что



на рис. 7 соответствующие значения $1/T_{rad}$ фактически принадлежат одной и той же прямой, проходящей через точки A и B. При $\lambda_1 = 310$ нм и $\lambda_m = 400$ нм зависимость T_c от λ_m принимает наименьшее значение, равное $T_c = 2402,4$ К. При $\lambda_1 = 310$ нм и $\lambda_m = 800$ нм эта же зависимость принимает наибольшее значение, равное $T_c = 2426,5$ К. Для зависимости 2 (рис. 8) наименьшее значение $T_c = 2430,1$ К имеет место при $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_m = 500$ нм, а наибольшее значение $T_c = 2441,4$ К — при $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_m = 760$ нм. Однако этих данных недостаточно для утверждения, что величина 2402,4 К ограничивает истинную температуру сверху. Существует еще абсолютная инструментальная среднеквадратичная погрешность (неопределенность) T_c^{ins} измерительной системы. Эта погрешность может быть определена по известной формуле

$$\Delta T_{\rm c}^{\rm ins} = \left\{ \left(\frac{\partial T_{\rm c}}{\partial T_{\rm rad,1}} \Delta T_{\rm rad,1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{\rm c}}{\partial T_{\rm rad,m}} \Delta T_{\rm rad,m} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{\rm c}}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{\rm c}}{\partial \lambda_m} \Delta \lambda_m \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

где

$$\Delta T_{\mathrm{rad},i} = \lambda_i T_{\mathrm{rad},i}^2 \delta_{I,i} / c_2, \quad i = 1, m.$$
(12)

Вывод формулы см., например, в [16].

Отметим, что при определении погрешностей, вносимых неточностью длин волн, необходимо знать зависимость T_c от λ при λ_1 = const. Такая зависимость не всегда имеется в распоряжении исследователя. Поэтому для искомой оценки предлагается определить предельно возможные значения T_c^{up} , которые ограничивают величину T сверху, по формулам (3) и (12). Исходя из графика зависимости I (рис. 7), полагалось, что для точки А $T_{rad,1}^{new} = T_{rad} (\lambda_1) + \Delta T_{rad} (\lambda_1)$, $\lambda_1^{new} = \lambda_1 + \Delta \lambda_1$; для точки В $T_{rad,m}^{new} = T_{rad} (\lambda_m) - \Delta T_{rad} (\lambda_m)$, $\lambda_m^{new} = \lambda_m - \Delta \lambda_m$. При этом $\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_m = 2$ нм, $\delta_{I,1} = \delta_{I,m} = 0,005$. Вычисления проводились при $\lambda_1 = 310$ и $\lambda_1 = 400$ нм, результаты представлены на рис. 9.

Как следует из рис. 9 и результатов вычислений, при $\lambda_1 = 310$ нм и $\lambda_m = 400$ нм $T_c^{up} = 2413,4$ К. Это наименьшая предельная величина, которая ограничивает искомую температуру сверху. Для зависимости *l* (на рис. 9) при $\lambda_1 = 310$ нм и $\lambda_m = 800$ нм величина T_c^{up} принимает наибольшее значение, равное 2430,5 К. При уменьшении $\Delta\lambda$ величина T_c^{up} несколько уменьшается. Так, при $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_m = 1$ нм, $\lambda_1 = 310$ нм и $\lambda_m = 400$ нм,



| <i>Рис.</i> 9. Зависимости T_{c}^{up} от λ_{m} для образца |
|--|
| из вольфрама в вакууме при истинной |
| температуре $T = 2400$ K |
| и значениях $\lambda_1 = 310 (1), 400 (2)$ нм, |
| рассчитанные по данным работы [15]. |
| |

 $\delta_I = 0,005$ имеем $T_c^{up} = 2410,6$ К. Для зависимости 2 (рис. 9) при $\lambda_1 = 400$ нм, $\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_m = 2$ нм, $\delta_I = 0,005$ наименышее значение $T_c^{up} = 2443,8$ К достигается

при $\lambda_m = 600$ нм, а наибольшее значение — $T_c^{up} = 2447,4$ К — при $\lambda_m = 700$ нм.

Из расчетных данных, которые в виде графиков представлены на рис. 8 и 9, следует, что в спектральном интервале от 310 до 800 нм истинная температура *T* образца из вольфрама не может превышать 2415 К. С другой стороны, истинная температура *T* не может быть меньше яркостной температуры $T_{\rm rad}$ ($\lambda = 300$ нм) = 2309,3 К. Появляется возможность «увидеть» (но не выбрать) зависимость относительных излучательных способностей $\varepsilon_{\rm f} = I_{\rm c} (\lambda, T)/I_0 (\lambda, T_{\rm f})$ и $\ln \varepsilon_{\rm f}$ (здесь $T_{\rm f}$ означает референтную температуру) от λ при температуре, близкой к искомой *T*. Это можно осуществить путем решения прямой задачи, когда известна оценка истинной температуры. Набор спектральных зависимостей $\varepsilon_{\rm f}$ определялся по соотношению

$$\varepsilon_{\rm f}(\lambda, T, T_{\rm f}) = I_{\rm c}(\lambda, T) / I_0(\lambda, T_{\rm f}) = \varepsilon(\lambda, T) I_0(\lambda, T_{\rm f}) / I_0(\lambda, T), \tag{13}$$

где $I_{c}(\lambda, T)$ — спектральная интенсивность (яркость) собственного излучения, $I_{0}(\lambda, T)$ — спектральная интенсивность (яркость) излучения АЧТ.

В приближении Вина

$$\varepsilon_{\rm f} = \varepsilon(\lambda, T) \exp(p/\lambda),$$
 (14)

где

$$p = c_2 \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T} \right) = c_2 \left(T - T_f \right) / \left(TT_f \right),$$

$$\ln \varepsilon_f = \ln \varepsilon \left(\lambda, T \right) + p/\lambda.$$
(15)

На рис. 10 представлены зависимости логарифма относительной излучательной способности $\ln \varepsilon_f$ (рис. 10*a*) и относительной излучательной способности ε_f (рис. 10*b*) при референтных температурах T_f , изменяющихся от 2415 до 2370 K с шагом 15 K. Как следует из рисунка, зависимость ε от λ имеет максимум в коротковолновом участке спектра, монотонно убывая при увеличении длины волны. Эта зависимость полностью согласуется с условием, что график функции $1/T_{rad}$ от λ на выбранном спектральном интервале является выпуклым вниз. Действительно, дифференцируя (1) по λ , получим

$$(1/T_{\rm rad})'_{\lambda} = -\left\{\ln\varepsilon + \lambda(\ln\varepsilon)'_{\lambda}\right\} > 0$$
$$\lambda(\ln\varepsilon)'_{\lambda} + \ln\varepsilon < 0.$$
(16)

или

462





Рис. 10. Зависимости логарифма относительной излучательной способности $\ln \varepsilon_{\rm f}(a)$ и относительной излучательной способности $\varepsilon_{\rm f}(b)$ от λ при различных референтных температурах $T_{\rm f}$. $T_{\rm f} = 2415$ (1), 2400 (2), 2385 (3), 2370 (4) К.

Неравенство (16) выполняется для любой функции, убывающей монотонно. Кроме того, оно может выполняться также для функций, производная которых $(\ln \varepsilon)'_{\lambda} \ge 0$ в коротковолновой части выбранного спектрального интервала.

Из рис. 10 также следует, что при $T_{\rm f} = 2370$ К максимум зависимости ε материала от λ «исчезает». Это объясняется тем, что согласно (16), при этом значении $T_{\rm f}$ выполняется неравенство $\ln \varepsilon_{\rm f} > \ln \varepsilon$ во всем спектральном интервале. При $T_{\rm f} = T = 2400$ К зависимость $\varepsilon_{\rm f}$ от λ тождественна зависимости ε вольфрама от λ , экспериментально определенной в работе [15]. Из изложенного следует, что искомая температура T принадлежит интервалу от 2370 до 2415 К. Дальнейшее уточнение величины истинной температуры может быть проведено методами, представленными, например, в работе [16].

Заключение

При неизвестном характере зависимости излучательной способности от длины волны температура спектрального отношения (серое приближение) не позволяет оценить температурный интервал, к которому принадлежит истинная температура непрозрачного материала, т.к. яркостные температуры регистрируются только для двух длин волн и недостает дополнительной информации о монотонном убывании или возрастании ε от λ в выбранном спектральном диапазоне. В представленной работе предпринята попытка восполнить эти пробелы.

Представлен графо-аналитический способ оценки истинной температуры непрозрачного объекта как сверху, так и снизу при неизвестном характере зависимости излучательной способности от длины волны. При этом в качестве дополнительной информации используется спектральное распределение обратных яркостных температур в выбранном спектральном интервале.

Показано, что если в данном спектральном интервале график зависимости обратных яркостных температур от длины волны можно представить линией, условно выпуклой вниз (например, когда график функции расположен между двух линий, выпуклых вниз), то полученное значение температуры спектрального отношения ограничивает искомую температуру сверху. Если же график указанной зависимости можно представить линией, выпуклой вверх, то полученное значение температуры спектрального отношения ограничивает искомую температуру снизу. Если график зависимости обратных яркостных температур от длины волны приближенно представляет собой прямую линию, то температура спектрального отношения совпадает с истинной.

Решения данной обратной задачи необходимо сочетать с решением прямой задачи, когда по спектральному распределению яркостных температур и полученной оценке истинной температуры определяется зависимость относительной излучательной способности от длины волны. Это является дополнительной информацией о спектральном распределении излучательной способности материала в выбранном спектральном интервале и проверкой сделанных допущений.

Показана возможность уменьшения интервала допустимых температур, к которому принадлежит искомая температура, путём сужения спектрального окна со стороны длинных волн. Рассмотрены способы выбора спектрального интервала для регистрации теплового излучения и важность регистрации излучения в коротковолновом участке спектра.

Для оценки истинной температуры объекта показана перспективность использования выпуклых функций при аппроксимации зависимости обратных яркостных температур от длины волны.

На основании экспериментальных данных, известных из литературных источников, приведён пример оценки истинной температуры объекта измерения по зарегистрированному спектру теплового излучения.

Список литературы

- 1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Курс, 2017. 400 с.
- Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 336 с.
- **3. Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
- 4. Свет Д.Я. Оптические методы измерения истинных температур. М.: Наука, 1982. 295 с.
- Снопко В.Н. Основы методов пирометрии по спектру теплового излучения. Минск: Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, 1999. 224 с.
- 6. Плотниченко В.Г., Пырков Ю.Н., Свет Д.Я. Бесконтактное измерение истинной температуры и спектральной излучательной способности веществ в конденсированной фазе // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37, № 3. С. 469–474.
- Khan M.A., Allemand C., Eagar T.W. Noncontact temperature measurement. II. Least squares based techniques // Rev. Sci. Instrum. 1991. Vol. 62, No. 2. P. 403–409.
- Леонов А.С., Русин С.П. О решении обратной задачи определения температуры по спектру теплового излучения нагретых тел // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 3. С. 475–486.
- **9. Girard F., Battuello M., Florio M.** Multiwavelength thermometry at high temperature: why it is advantageous to work in the ultraviolet // Int J. Thermophys. 2014. Vol. 35. P. 1401–1413.
- Experimental methods in the physical sciences: radiometric temperature measurements. I. Fundamentals / Eds. by Z.M. Zhang, B.K. Tsai, G. Mashin. Experimental Methods in the Physical Sci. 2009. Vol. 42. 343 p.
- Experimental methods in the physical sciences: radiometric temperature measurements. II. Applications / Eds. by Z.M. Zhang, B.K. Tsai, G. Mashin. Experimental Methods in the Physical Sci. 2010. Vol. 43. 478 p.
- 12. Латыев Л.Н., Петров В.А., Чеховской В.Я., Шестаков Е.Н. Излучательные свойства твердых материалов: справочник / под ред. А.Е. Шейндлина. М.: Энергия, 1974. 472 с.
- Русин С.П. Определение температуры непрозрачного объекта по спектру теплового излучения: формы представления исходных данных и методы // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 4. С. 561–576.
- 14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.
- 15. Larrabee R.D. Spectral emissivity of tungstent // J. Opt. Soc. Am. 1959. Vol. 49, No. 6. P. 619-625.
- 16. Русин С.П. Об адекватности модели излучательной способности экспериментальным данным при определении истинной температуры непрозрачного материала по спектру теплового излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 3. С. 479–489.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2019 г., после доработки — 24 декабря 2020 г., принята к публикации 10 февраля 2020 г.