УДК 534.222.2

ОБ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. Я. Федоров, П. И. Цой

(Тула)

Расчету акустических течений в пограничном слое посвящено большое количество работ [1—7]. Были решены задачи определения акустических потоков между параллельными стенками [1], в трубе [2], около кругового и эллиптического цилиндров [3, 4] и около произвольной криволинейной границы раздела [5, 6]. Однако в этих работах влиянием теплопроводности жидкости на акустические течения пренебрегали (исключение составляет, видимо, только работа [2]). Кроме того, во всех указанных работах практически рассматривался частный случай течений в поле волны, касающейся границы. В данной работе акустические течения в пограничном слое определяются в поле наклонно падающей плоской волны в вязкой теплопроводной жидкости.

Как известно, медленные течения, возникающие в пограничном слое, описываются уравнением [5, 7]

$$\rho_0\nu\Delta\mathbf{V}_2 - \mathbf{F} = 0, \qquad \mathbf{F} = -\rho_0\langle(\mathbf{V}_1\cdot\nabla)\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1(\nabla\cdot\mathbf{V}_1)\rangle, \tag{1}$$

где ρ_0 — плотность жидкости в невозмущенном состоянии; $\mathbf{V}_2$ — скорость акустического течения; ν — кинематический коэффициент вязкости; угловые скобки означают усреднение по времени.

Выражение для акустического поля первого приближения $\mathbf{V}_1$, полученное в работе [8], для малых углов скольжения падающей волны можно записать в виде

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1\text{а}} + \mathbf{V}_{1\text{п}} + \mathbf{V}_{1\text{в}} + \mathbf{V}_{1\text{т}};$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{1\text{а}} = k_{11}M(\mathbf{e}_x - \eta\mathbf{e}_z),\ \mathbf{V}_{1\text{п}} = k_{11}Mv_\text{п}e^{i\varphi_\text{п}}(\mathbf{e}_x + \eta\mathbf{e}_z),\\
&\mathbf{V}_{1\text{в}} = M\omega_1\exp\left[i\left(\beta z + \varphi_\text{в} + \frac{\pi}{4}\right)\right](-\beta\sqrt{2}\mathbf{e}_x + k_{11}\mathbf{e}_z),\\
&\mathbf{V}_{1\text{т}} = \alpha\sqrt{2}\,v_\text{т}\,\omega_2\exp\left[i\left(\alpha z + \varphi_\text{т} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathbf{e}_z,\\
&M = \exp\left[i\left(k_{11}x - \sigma t + \frac{\pi}{2}\right)\right],\ \omega_1 = \exp(-\beta z),\ \omega_2 = \exp(-\alpha z),
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

где $\mathbf{V}_{1\text{а}}$, $\mathbf{V}_{1\text{п}}$ — скорости в продольной падающей и отраженной волнах, $\mathbf{V}_{1\text{в}}$ — в вязкой волне, $\mathbf{V}_{1\text{т}}$ — в тепловой волне; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы декартовой системы координат, ось Ox которой направлена вдоль границы раздела; $k_{11} = \sigma/c$ — волновое число продольных волн; β^{-1} и α^{-1} — величины вязкого и теплового акустических пограничных слоев.

Модули коэффициентов отражения $v_\text{п}$, $v_\text{в}$, $v_\text{т}$ и их фазы $\varphi_\text{п}$, $\varphi_\text{в}$, $\varphi_\text{т}$ определяются выражениями

$$\begin{gathered}
v_\text{п} = \frac{\sqrt{4\eta^4 + \Phi^4}}{(\eta + \Phi)^2 + \eta^2},\quad \varphi_\text{п} = \operatorname{arctg}\frac{2\eta\Phi}{2\eta^2 - \Phi^2},\\
\Phi = (\gamma - 1)\frac{\sqrt{2\sigma\varkappa_\text{т}}}{c} + \frac{\sqrt{2\sigma\nu}}{c},\ v_\text{т} = (\gamma - 1)\lambda_2^2\sqrt{v_\text{п}^2 + 2v_\text{п}\cos\varphi_\text{п} + 1},\\
\varphi_\text{т} = \operatorname{arctg}\frac{v_\text{п}\sin\varphi_\text{п}}{1 + v_\text{п}\sin\varphi_\text{п}} - \frac{\pi}{2},\ v_\text{в} = \lambda_1\sqrt{v_\text{п}^2 + 2v_\text{п}\cos\varphi_\text{п} + 1},
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\varphi_{\text{в}} = \varphi_{\text{т}} + \frac{\pi}{4},\ \lambda_1 = \frac{k_{11}}{\beta\sqrt{2}},\ \lambda_2 = \frac{k_{11}}{\alpha\sqrt{2}},$$

где γ — показатель адиабаты; $\varkappa_{\text{т}}$ — коэффициент термодиффузии; Φ — критический угол Константинова [8].

Теория акустических течений вблизи границ, начиная с работ Шлихтинга [3], основывалась на уравнениях пограничного слоя. Согласно этой теории, во всех выражениях удерживались члены, имеющие порядок, больший, чем $1/\beta l$ (l — характерный масштаб акустического поля). Однако для того, чтобы получить зависимость скорости акустического течения от угла скольжения падающей волны, указанной точности недостаточно. Поэтому в выражениях акустического поля первого приближения (3) сохранены члены порядка $1/\beta l$ включительно.

Известно, что в пограничном слое тангенциальная составляющая силы $\mathbf{F}$ значительно больше нормальной составляющей [5], т. е. можно считать $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x$. В этом случае $\mathbf{V}_2$ будет также направлена по оси Ox и $\mathbf{V}_2 = V_2(z)\mathbf{e}_x$. Для облегчения последующих выкладок в случае многоволновых процессов уравнение (1) удобно записать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение матрицу парных взаимодействий

$$S = \begin{Vmatrix} F_{\text{аа}} & F_{\text{ап}} & F_{\text{ав}} & F_{\text{ат}} \\ F_{\text{па}} & F_{\text{пп}} & F_{\text{пв}} & F_{\text{пт}} \\ F_{\text{ва}} & F_{\text{вп}} & F_{\text{вв}} & F_{\text{вт}} \\ F_{\text{та}} & F_{\text{тп}} & F_{\text{тв}} & F_{\text{тт}} \end{Vmatrix}.$$

Элементы этой матрицы, кроме диагональных, характеризуют силы, возникающие в результате взаимодействия различных типов волн. Диагональные же элементы описывают силы, возникающие в результате самовоздействия волн:

$$F_{\text{ап}} = -\rho_0\langle(\mathbf{V}_{1\text{а}}\cdot\nabla)V_{1\text{п}x} + V_{1\text{а}x}(\nabla\cdot\mathbf{V}_{1\text{п}})\rangle,$$
$$F_{\text{па}} = -\rho_0\langle(\mathbf{V}_{1\text{п}}\cdot\nabla)V_{1\text{а}x} + V_{1\text{п}x}(\nabla\cdot\mathbf{V}_{1\text{а}})\rangle,$$
$$F_{\text{аа}} = -\rho_0\langle(\mathbf{V}_{1\text{а}}\cdot\nabla)V_{1\text{а}x} + \mathrm{V}_{1\text{а}x}(\nabla\cdot\mathbf{V}_{1\text{а}})\rangle.$$

С введением матрицы S уравнение акустических потоков (1) принимает вид

$$(4)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\begin{Vmatrix} V_{2\text{а}} \\ V_{2\text{п}} \\ V_{2\text{в}} \\ V_{2\text{т}} \end{Vmatrix} = -(\rho_0\nu)^{-1}\|S\|\times\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$V_2 = V_{2\text{а}} + V_{2\text{п}} + V_{2\text{в}} + V_{2\text{т}},$$

где $V_{2\text{а}}$, $V_{2\text{п}}$, $V_{2\text{в}}$, $V_{2\text{т}}$ — x-компоненты скоростей акустических течений, возникающих в результате взаимодействия соответствующей волны со всеми другими типами волн, включая и самовоздействие.

Интегрируя уравнение (4) с граничными условиями $V_2|_{z=0} = 0$, $dV_2/dz|_{z\to\infty} = 0$, получим

$$(5)\qquad V_{2\text{а}} = \omega\,[\eta v_{\text{в}}(\omega_1\sin Q_{\text{в}} - \sin\varphi_{\text{в}}) + v_{\text{т}}(\omega_2\sin Q_{\text{т}} - \sin\varphi_{\text{т}})],$$

$$V_{2\text{п}} = \omega v_{\text{п}} v_{\text{т}}[\omega_2\sin(Q_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}}) - \sin(\varphi_{\text{т}} - \varphi_{\text{п}})] - \omega v_{\text{п}} v_{\text{в}}\,\eta\,[\omega_1\sin(Q_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}}) -$$
$$- \sin(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}})],\ V_{2\text{т}} = \frac{\omega}{\lambda_2} v_{\text{т}} v_{\text{в}}\frac{1}{(\mathrm{Pr}+1)^2}\Big\{\omega_1\omega_2\Big[(1 - \mathrm{Pr})\sin\Big(Q_{\text{в}} - Q_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\Big) -$$

$$- 2\mathrm{Pr}^{1/2}\cos\left(Q_{\text{в}} - Q_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\right)\Big] + \Big[2\mathrm{Pr}^{1/2}\cos\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\right) -$$

$$- (1 - \mathrm{Pr})\sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\right)\Big]\Big\},$$

$$V_{2\text{в}} = \omega v_{\text{в}}\Big\{\lambda_1\Big[\omega_1\sin\left(Q_{\text{в}} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\varphi_{\text{в}} - \frac{\pi}{4}\right) + \lambda_1 v_{\text{п}}\Big[\omega_1\sin\Big(Q_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}} -$$

$$- \frac{\pi}{4}\Big) - \sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}} - \frac{\pi}{4}\right)\Big] - \frac{1}{2}v_{\text{в}}(1 - \omega_1^2) + \frac{v_{\text{т}}}{\lambda_1}\frac{1}{(1 + \mathrm{Pr}^{-1})^2}\Big[\omega_1\omega_2[(\mathrm{Pr}^{-1} -$$

$$- 1)\sin\left(Q_{\text{в}} - Q_{\text{т}} - \frac{3}{4}\pi\right) - 2\mathrm{Pr}^{-1/2}\cos\left(Q_{\text{в}} - Q_{\text{т}} - \frac{3}{4}\pi\right)\Big] + [2\mathrm{Pr}^{-1/2}\times$$

$$\times\cos\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} - \frac{3}{4}\pi\right) - (\mathrm{Pr}^{-1} - 1)\sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} - \frac{3}{4}\pi\right)\Big]\Big]\Big\},\ Q_{\text{в}} = \beta z + \varphi_{\text{в}},\ Q_{\text{т}} =$$

$$= \alpha z + \varphi_{\text{т}},\ \omega = \frac{A^2}{k_{11}\nu},$$

где A — амплитуда падающей волны; $\mathrm{Pr} = \nu/\varkappa_{\text{т}}$ — число Прандтля.

Скорости течений на внешней стороне пограничного слоя получаются из (5) при $z \to \infty$

$$V_{2a} = -\omega[\eta v_{\text{в}}\sin\varphi_{\text{в}} + v_{\text{т}}\sin\varphi_{\text{т}}],\ V_{2\text{п}} = \omega[v_{\text{п}}v_{\text{т}}\sin(\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{т}}) +$$

$$+ \eta v_{\text{п}}v_{\text{в}}\sin(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}})],\ V_{2\text{т}} = \frac{\omega}{\lambda_2}v_{\text{т}}v_{\text{в}}\frac{1}{(\mathrm{Pr} + 1)^2}\Big[2\mathrm{Pr}^{1/2}\cos\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\right) -$$

$$(6)\quad - (1 - \mathrm{Pr})\sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} + \frac{3}{4}\pi\right)\Big],\ V_{2\text{в}} = \omega v_{\text{в}}\Big\{\lambda_1\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{\text{в}}\right) -$$

$$- \lambda_1 v_{\text{п}}\sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{п}} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}v_{\text{в}} + \frac{v_{\text{т}}}{\lambda_1}\frac{1}{(1 + \mathrm{Pr}^{-1})^2}\Big[2\mathrm{Pr}^{-1/2}\cos\Big(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} -$$

$$- \frac{3}{4}\pi\Big) - (\mathrm{Pr}^{-1} - 1)\sin\left(\varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{т}} - \frac{3}{4}\pi\right)\Big]\Big\};$$

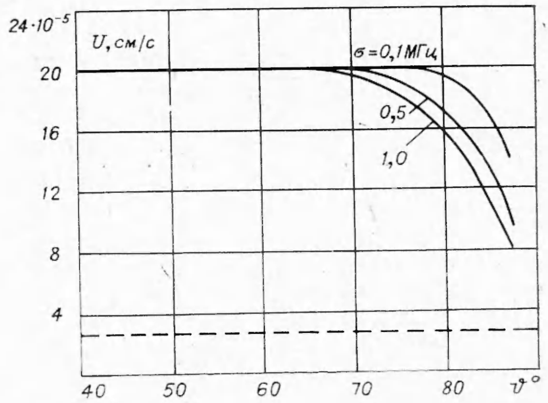
скорость потока массы будет определяться выражениями [7]

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{\text{тр}},\ \mathbf{V}_{\text{тр}} = \langle(\xi_1\cdot\nabla)\mathbf{V}_1\rangle,$$

где ξ_1 —вектор смещений жидких частиц в звуковой волне, $\xi_1 = \int \mathbf{V}_1\,dt$. Используя для $\mathbf{V}_1$ выражения (2), для $\mathbf{V}_{\text{тр}}$ на внешней стороне пограничного слоя получим

$$(7)\qquad \mathbf{V}_{\text{тр}} = V_{\text{тр}}(z)\,\mathbf{e}_x;\quad V_{\text{тр}} = A^2[1 + 2v_{\text{п}}\cos\varphi_{\text{п}} + v_{\text{п}}^2].$$

Таким образом, выражения (6), (7) позволяют рассчитать скорость акустического ветра при произвольных углах скольжения падающей волны. Численный расчет проводился для течений в воздухе, и его результаты приведены на фигуре, где видно, что скорость потока изменяет свою величину в окрестности критического угла Константинова. Характер изменения скорости от частоты совпадает с характером изменения коэффициента отражения звуковых волн от абсолютно жесткой границы [8]: чем выше частота, тем быстрее изменяется скорость. Штриховой линией показана скорость $\mathbf{U}$, рассчитанная по формулам работ [3, 5]. Как следует из графиков, скорость акустического потока при наклонном падении волны значительно выше скорости потока при скользящем падении. Этот вывод подтверждается известными экспериментальными исследованиями. Так, в работе [9] показано, что если звуковая волна падает под углом к границе, то процесс массообмена в звуковом поле, который в основном определяется акустическими течениями, идет значительно быстрее, чем для границы, параллельной направлению распространения волны.



Найдем теперь аналитическое выражение для скорости акустического течения при $\eta \gg \Phi$. В этом случае вязкость и теплопроводность жидкости не влияют на коэффициенты отражения:

$$v_п = 1,\ \varphi_п = 0,\ v_в = \frac{2k_{11}}{\beta},\ \varphi_в = -\frac{\pi}{4},$$

$$v_т = (\gamma - 1)\frac{k_{11}^2}{\alpha^2};\quad \varphi_т = -\frac{\pi}{4},$$

и из (6), (7) получаем

$$V_2 = -\frac{4A^2}{c}\left[(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\frac{(\gamma-1)}{\Pr(\Pr+1)}\right]; \tag{8}$$

$$V_{тр} = \frac{4A^2}{c}. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, что V_2 и $V_{тр}$ не зависят ни от угла скольжения η, ни от частоты звуковой волны, тогда как при углах скольжения, близких к критическому углу Константинова, скорость течения является функцией этих величин.

Поступила 27 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рэлей.** Теория звука. Т. 2. М., ГИТТЛ, 1955.
2. **Rott N.** The influence of heat conduction on acoustic streaming.— «J. Appl. Mat. and Phys.», 1974, N 25, p. 419.
3. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
4. **Сорокодум Е. Д., Тимошенко В. И.** Об акустических течениях около эллиптического цилиндра при больших числах Рейнольдса.— «Акуст. журн.», 1973, т. 19, № 6, с. 923.
5. **Нйборг В. Л.** Акустические течения.— В кн.: Физическая акустика. Т. 2, ч. Б. М., «Мир», 1969.
6. **Nyborg W. L.** Acoustic streaming near a boundary.— «J. Acoust. Soc. Amer.», 1958, vol. 30, N 4, p. 329.
7. **Зарембо Л. К.** Акустические течения.— В кн.: Мощные ультразвуковые поля. М., «Наука», 1968.
8. **Константинов Б. П.** Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченных средах. Л., «Наука», 1974.
9. **Архангельский М. Е., Каневский И. Н.** Механизм ускорения процесса проявления при нормальном падении ультразвуковой волны на фотослой.— «Акуст. журн.», 1969, т. 15, № 2, с. 178.