УДК 532.59

ДОКРИТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ИЗ-ПОД ЩИТА

В. И. Налимов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследована задача о вытекающем из-под плоского горизонтального щита двумерного стационарного потока тяжелой несжимаемой идеальной безвихревой жидкости. Дно считается ровным и горизонтальным. Течение предполагается докритическим. В точной постановке доказано существование решения, отличного от равномерного потока. Показано, что на бесконечности решение ведет себя как некрасовская волна.

В работе изучается задача о вытекающем из–под плоского горизонтального щита двумерном стационарном потоке тяжелой несжимаемой идеальной безвихревой жидкости. Дно считается ровным и горизонтальным. Течение предполагается докритическим, т. е. характерная скорость потока жидкости меньше скорости распространения длинных волн бесконечно малой амплитуды.

Доказательство существования бегущих волн для бесконечно глубокой жидкости впервые дали А. И. Некрасов в 1921 г. и независимо от него Т. Леви-Чевита в 1925 г. Несколько позднее Дж. Струиком, а затем А. И. Некрасовым установлены аналогичные теоремы для жидкости конечной глубины. Ссылки на работы этих авторов по данной тематике приведены в [1]. Существование докритических течений над неровным дном доказано в [2]. Разрешимость задачи о докритическом обтекании вихря установлена в [3].

Если допустить возможность контакта свободной границы и твердой стенки (щита), то нелинейные краевые условия сильно усложняются. Возникающая в задаче о докритическом течении из–под щита проблема теории ветвления обладает неприятной особенностью — количество условий разрешимости больше числа свободных параметров (эффект бесконечности). Тем не менее удается доказать разрешимость этой волновой задачи, если использовать симметрию задачи и ввести новый параметр — фазу волны.

1. Постановка задачи. Для описания течения жидкости в качестве независимых переменных выбираются [1] безразмерные потенциал скорости φ и функция тока ψ. Такой выбор независимых переменных позволяет работать не в частично неизвестной области течения, а в фиксированной полосе между двумя линиями тока: $\psi = 0$ и $\psi = 1$.

Как известно, комплексный потенциал скорости $\chi = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией независимой комплексной переменной $z = x + iy$. Сопряженная комплексная скорость $\bar{w} = d\chi/dz$ — также аналитическая функция z. После представления $w = \exp\{-i(\theta + i\tau)\}$ задача о течении жидкости сводится [1] к отысканию в единичной горизонтальной полосе аналитической функции $\theta + i\tau$ от χ с краевым условием $\theta_\psi - \lambda \exp\{-3\tau\} \sin\theta = 0$ на «свободной поверхности» $\psi = 1$, $\varphi > 0$ с постоянной $\lambda = gh_0U^{-2}$ (g — ускорение силы тяжести, h_0 — характерная глубина потока, U — характерная скорость потока). Без потери общности предполагается, что точка контакта свободной поверхности и крышки переходит в точку $\varphi = 0$, $\psi = 1$. Требование докритичности течения означает, что $\lambda > 1$. Так как на дне и крышке угол наклона скорости потока должен совпадать с углом наклона касательной, то $\theta = 0$ при $\psi = 0$, $\psi = 1$ ($\varphi \leqslant 0$).

Предполагается, что искомое течение мало отличается от равномерного потока: $\theta = \varepsilon^2 U$, $\tau = \varepsilon^2 V$, $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1$ ($\lambda_0 > 1$, ε — малый параметр, λ_1 — искомый параметр).

Для независимых переменных используются обозначения x, y вместо φ и ψ. Кроме того, полагается

$$f_0(U,V,\lambda_1,\varepsilon)=\lambda_1 U-3\lambda_0 UV+\varepsilon^2 f_1(U,V,\lambda_1,\varepsilon); \tag{1.1}$$

$$f_1(U,V,\lambda_1,\varepsilon)=\varepsilon^{-6}(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1)[\exp(-3\varepsilon^2 U)-1+3\varepsilon^2 V]\sin(\varepsilon^2 U)+$$
$$+\varepsilon^{-6}(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1)[\sin(\varepsilon^2 U)-\varepsilon^2 U](1-3\varepsilon^2 V)-3\lambda_1 UV. \tag{1.2}$$

В новых обозначениях исходная задача формулируется как задача об отыскании в полосе $-\infty<x<\infty$, $0<y<1$ пары функций (U,V) из системы Коши — Римана

$$U_y+V_x=0,\quad U_x-V_y=0 \tag{1.3}$$

с краевыми условиями на «твердых стенках»

$$U=0\quad(y=0);\qquad U=0\quad(y=1,\ x\leqslant 0) \tag{1.4}$$

и условием на «свободной границе»

$$U_y-\lambda_0 U=\varepsilon^2 f_0(U,V,\lambda_1,\varepsilon)\qquad(y=1,\ x>0). \tag{1.5}$$

Так как сопряженная к U функция V находится с точностью до произвольной постоянной, то для ее однозначного определения необходимо дополнительное условие. Предполагается, что

$$U(x,y)\to 0\qquad(x\to-\infty). \tag{1.6}$$

По заданной функции $u(x)=U(x,1)$ из системы Коши — Римана (1.3) с краевым условием $U(x,0)=0$ и условием на бесконечности (1.6) однозначно восстанавливаются функции U и V. Поэтому в дальнейшем решением задачи (1.3)–(1.6) будет называться функция $u(x)$ (или пара $u(x)$, $v(x)=V(x,1)$).

2. Функциональные пространства. При докритических течениях жидкости за щитом образуется цуг нелинейных волн, что является главным препятствием при исследовании задачи (1.3)–(1.6). Поэтому естественно изучать задачу (1.3)–(1.6) в связанных с ней функциональных пространствах. Пусть ω — положительный корень уравнения $\xi\operatorname{cth}\xi-\lambda_0=0$, ρ_0 — наименьший положительный корень уравнения $\xi\operatorname{ctg}\xi-\lambda_0=0$, число ρ выбрано так, что $0<\rho<\rho_0$.

Множество экспоненциально убывающих с показателем ρ функций, определенных на всей оси R и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{E^s}=\max_{\tau=\pm\rho}\|u(x)\exp(\tau x)\|_{H^s(R)},$$

обозначается через E^s; $\overset{\circ}{E}{}^s$ — подпространство функций из E^s, равных нулю при $x<0$. Основные свойства пространств Соболева — Шварца $H^s(R)$, как и свойства пространств $H^s(0,L)$, периодических на оси функций, можно найти в [4, 5].

Пусть, далее, функция $\theta(x)$ обладает следующими свойствами: $\theta'\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(R)$, $\theta=0$ при $x\leqslant 1$, $\theta(x)=1$ при $x\geqslant 2$. Функциональные пространства V^s, в которых будет изучаться задача (1.3)–(1.6), состоят из функций вида $u=u^0+\theta u^+$, $u^0\in H^s(R)$, $u^+\in H^s(0,L)$, последняя является периодической функцией с периодом $L=2\pi/\omega$. Норма в пространстве V^s определяется равенством $\|u\|_{V^s}=\|u^0\|_{E^s}+\|u^+\|_{H^s(0,L)}$. Ясно, что V^s — полное линейное нормированное пространство.

При $s>1/2$ пространство V^s является банаховой алгеброй [6]: $\|uv\|_{V^s}\leqslant C_0\|u\|_{V^s}\|v\|_{V^s}$. Это позволяет оценивать в нем нормы сложных аналитических функций.

Если ряд $\sum t^\alpha F_\alpha = F(t)$ $(t = t_1, \dots, t_m)$ сходится в окрестности начала координат, то для сложной функции при $s > 1/2$

$$\|F(\mathbf{v})\|_{V^s} \leqslant \tilde{F}(\|\mathbf{v}\|_{V^s}), \quad \|\mathbf{v}\|_{V^s} = \sum_{k=1}^{m} \|v_k\|_{V^s}, \tag{2.1}$$

где

$$\tilde{F}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C_0^k \max_{|\alpha|=k} (\alpha! |F_\alpha|) X^k.$$

Для того чтобы ряды для мажорант сходились, предполагается, разумеется, малость нормы векторной функции v. Так как мажоранта от производной не превышает производную от мажоранты, то при $s > 1/2$ из формулы

$$F(v) - F(w) = \sum_{j=1}^{m} (v_j - w_j) \int_0^1 F_{t_j}(\xi v + (1-\xi) w) \, d\xi \tag{2.2}$$

следует оценка

$$\|F(v) - F(w)\|_{V^s} \leqslant \|(v - w)\|_{V^s} \int_0^1 \tilde{F}'(\xi \|v\|_{V^s} + (1-\xi)\|w\|_{V^s}) \, d\xi. \tag{2.3}$$

Пусть операторы проектирования Π_+ и Π_0 действуют по правилам $\Pi_+ u = u^+$, $\Pi_0 u = u^0$. Для сложной функции

$$\Pi_+ F(v) = F(v^+), \quad \Pi_0 F(v) = F(v) - F(\theta v^+) + (1-\theta) F(\theta v^+) + \theta (F(\theta v^+) - F(v^+))$$

и при $s > 1/2$ справедлива оценка

$$\|\Pi_0 F(v)\|_{E^s} \leqslant C \tilde{F}'(C \|v\|_{V^s}). \tag{2.4}$$

Здесь и ниже различные несущественные постоянные обозначаются одним и тем же символом C.

Представление $F(v) = \Pi_0 F(v) + \theta F(v^+)$ проверяется элементарно. Функция $\theta(1-\theta) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(R)$. Так как произведение функции из E^s на функцию из V^s при $s > 1/2$ принадлежит пространству E^s [6] с соответствующей оценкой, то утверждение (2.4) следует из формул (2.2) и (2.3).

Для функций, заданных на вещественной оси, оператор сдвига T_ν определяется равенством $T_\nu u(x) = u(x - \nu)$. Очевидно, что для любой сложной функции $T_\nu F(\mathbf{v}) = F(T_\nu \mathbf{v})$ и любой периодической функции

$$\|T_\nu u\|_{H^s(0,L)} = \|u\|_{H^s(0,L)}, \quad \|\partial T_\nu u / \partial \nu\|_{H^s(0,L)} \leqslant \omega \|u\|_{H^{s+1}(0,L)}. \tag{2.5}$$

3. Линейная задача. В [6] изучена в пространствах V^s линейная задача (1.3)–(1.6) с заданной функцией $f(x)$, стоящей в правой части граничного условия (1.5). Однородная линейная задача (1.3)–(1.5) имеет нетривиальное решение (Φ, Ψ). В соответствии с соглашением п. **1** пара φ, ψ $(\varphi = \Phi(x,1)$, $\psi = \Psi(x,1))$ называется собственной функцией задачи (1.3)–(1.5). В [6] установлено представление $\varphi = \varphi^0 + \theta \sin \omega (x - x_0)$ и показано, что $\varphi^0 \in E^s$ с любым $s < 1$. Сопряженная к φ функция ψ, удовлетворяющая требованию (1.6), также принадлежит пространству V^s [6], и ее периодическая компонента вычисляется по формуле

$$\psi^+ = \operatorname{cth} \omega \cos \omega (x - x_0) - \int_0^\infty \varphi^0(x) \, dx - \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \theta'(x) \cos \omega (x - x_0) \, dx.$$

Если выполнены три условия ортогональности:

$$\int_0^L f^+(x)\,dx = 0; \tag{3.1}$$

$$\int_0^L f^+(x)\cos\omega x\,dx = 0, \quad \int_0^L f^+(x)\sin\omega x\,dx = 0, \tag{3.2}$$

то решение линейной задачи (1.3)–(1.6) существует. Его интегральное представление содержит операторы K_1 и K_2 с символами:

$$\hat K_1(\xi) = \sqrt{\pi - i\xi}/Y^+(\xi), \quad \hat K_2(\xi) = Y^-(\xi)\sqrt{\pi + i\xi}/(\xi^2 - \omega^2).$$

Оператор $\hat{}$ ставит в соответствие обобщенной функции $u(x)$ ее преобразование Фурье $\hat u(\xi)$ [2], функции $Y^{\pm}(\xi)$ для всех вещественных ξ обладают следующими свойствами:

$$C^{-1} \leqslant |Y^{\pm}(\xi)| \leqslant C_1, \quad Y^{\pm}(\xi) = \overline{Y^{\pm}(\xi)}, \quad \hat K_1(\xi)\hat K_2(\xi) = \hat m(\xi), \qquad \hat m(\xi) = (\xi \operatorname{cth}\xi - \lambda_0)^{-1}$$

(черта обозначает операцию комплексного сопряжения). Соответствующий символу $\hat m(\xi)$ оператор свертки ниже обозначен M.

Решение линейной задачи (1.3)–(1.5) допускает представление $u = Kf + C\varphi$, $v = K_0 u + C_1$ с произвольными постоянными C и C_1. Здесь и ниже оператор K_0 есть оператор свертки с символом: $\hat K_0(\xi) = i \operatorname{cth}\xi$; $K = K_2 H K_1$, где $H(x)$ — функция Хевисайда: $H(x) = 0$ при $x < 0$ и $H(x) = 1$ при $x \geqslant 1$.

Оператор K_0 определен на функциях из V^s, удовлетворяющих условию ортогональности (3.1). Если $s < 0$, то это условие понимается в смысле обобщенных функций. Для таких функций

$$\Pi_+ K_0 f = K_0 f^+ - a(f), \qquad a(f) = \hat f(0); \tag{3.3}$$

$$\|K_0 f^+\|_{H^s(0,L)} + \|\Pi_0 K_0 f\|_{E^s} \leqslant C\|f\|_{V^s}. \tag{3.4}$$

Линейный вещественный функционал $a(f)$ непрерывен на функциях, удовлетворяющих условию ортогональности (3.1): для любых r

$$|a(f)| \leqslant C\|f\|_{V^r}. \tag{3.5}$$

При $0 < s < 1$ оператор K действует из подпространства функций из V^s, удовлетворяющих условиям ортогональности (3.2) в пространство V^{s+1}. Справедливо равенство $\Pi_+ Kf = Mf^+ - \operatorname{Im}\{b(f)\exp(i\omega x)\}$. Линейный комплексный функционал $b(f) = (1/2\omega)Y^-(\omega)\sqrt{\pi + i\omega}\widehat{HK_1}(\omega)$ определен на функциях $f \in V^r$, $r > -1/2$, удовлетворяющих условиям ортогональности (3.1):

$$|b(f)| \leqslant C\|f\|_{V^r}. \tag{3.6}$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|Mf^+\|_{H^{s+1}(0,L)} + \|\Pi_0 Kf\|_{E^{s+1}} \leqslant C\|f\|_{V^s} \tag{3.7}$$

для указанных s.

4. Нелинейная задача о течении из-под щита. Согласно сказанному выше, сопряженная к u функция, удовлетворяющая условию ортогональности (3.1), имеет вид $v = K_0 u$. Поэтому у задачи (1.3)–(1.6) существует нетривиальное решение, если оно есть у уравнения

$$u = \varepsilon^2 K\{\lambda_1 u + f_0(u, K_0 u, \lambda_1, \varepsilon)\} + \varphi. \tag{4.1}$$

Пусть $\nu = x_0 + \varepsilon\lambda_3$, $\quad w(x) = w^0(x) + \theta(x)w^+(x-\nu)$, где

$$w^+(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin\omega x. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.1) ищется в виде

$$u(x) = \varphi^0(x) + (1+\varepsilon\lambda_2)\,\theta(x)\sin\omega(x-\nu) + \varepsilon w(x). \tag{4.3}$$

Искомыми величинами будут векторный параметр $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и векторная функция $\mathbf{w}(x) = (w^+(x), w^0(x))$. Для функции вида (4.3)

$$a(u) = -a_0 - \varepsilon\Lambda_0(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon). \tag{4.4}$$

Здесь $a_0 = -\hat{\varphi}(0) = C_2\sqrt{\pi}\omega^{-2}Y^-(0)$;

$$\Lambda_0 = -a(w) + \mathrm{Re}\{\hat{\theta}'(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\nu}[\lambda_2 + \varepsilon^{-1}(-\mathrm{e}^{-i\omega\lambda_2} + 1)]\}. \tag{4.5}$$

В [6] постоянная C_2 определялась из условия нормировки $\varphi^1 = \sin\omega(x-x_0)$. В соответствии с представлением решения (4.3) и формулой (3.3)

$$v = v^0 + \theta(x)[a_0 + \varepsilon\Lambda_0 + \mathrm{cth}\omega(1+\varepsilon\lambda_2)\cos\,\omega(x-\nu) + \varepsilon K_0 w^+(x-\nu)], \tag{4.6}$$

где $v^0 = \Pi_0 K_0 u$. По определению оператора сдвига

$$T_{-\nu}u^+ = (1+\varepsilon\lambda_2)\,\sin\,\omega x + \varepsilon w^+(x).$$

Оператор сдвига перестановочный с любым оператором свертки. Поэтому $T_{-\nu}v^+ = a + \varepsilon\Lambda_0 + (1+\varepsilon\lambda_2)\,\mathrm{cth}\,\omega\cos\,\omega x + \varepsilon K_0 w^+(x)$.

Согласно определению оператора K_0,

$$K_0 w^+(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \mathrm{cth}\, n\omega\,\cos\, n\omega x.$$

Поэтому функции $f_k^+(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) = T_{-\nu}\Pi_+ f_k(u, v, \varepsilon) = f_k(T_{-\nu}u^+, T_{-\nu}v^+, \varepsilon)$ $(k = 0, 1)$ нечетны по x. Функция $f_0(u, v, \lambda_1, \varepsilon)$ будет удовлетворять условиям ортогональности (3.1), (3.2), если

$$\int_0^L f_0^+(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)\,\sin\,\omega x\,dx = 0.$$

Это равенство определяет параметр

$$\lambda_1 = 3a_0 + \varepsilon\Lambda_1(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) \tag{4.7}$$

с функционалом

$$\Lambda_1 = 3\Lambda_0 + \frac{3}{2}\,\lambda_0(\mathrm{cth}\,\omega - \mathrm{cth}\,2\omega)a_2 - \frac{\varepsilon}{\pi(1+\varepsilon\lambda_2)}\int_0^L [3\lambda_0 w^+ K_0 w^+ - f_1^+(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)]\,\sin\omega x\,dx. \tag{4.8}$$

Пусть u, v заданы равенствами (4.3), (4.6) соответственно и $f(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) = f_0(u, v, \lambda_1, \varepsilon)$. По определению $T_{-\nu}f^+ = f_0^+$. Пусть, кроме того, $\Lambda_4(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) = b(f(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon))$. В силу выбора параметра λ_1 (4.7) и свойства оператора K (3.3) из уравнения (4.1) следует равенство для младших гармоник

$$(1+\varepsilon\lambda_2)\sin\omega x = \sin\omega(x - x_0 + \nu) - \varepsilon^2\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{i\omega(x+\nu)}\Lambda_4\}.$$

Оно определяет параметры λ_2 и λ_3:

$$\lambda_k = \varepsilon\Lambda_k(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) \qquad (k = 2, 3).$$

Здесь $\Lambda_2 = \sin\omega\nu\mathrm{Im}\,\lambda_4 - \cos\omega\nu\mathrm{Re}\,\lambda_4 - \varepsilon^{-2}[1-\cos(\varepsilon\omega\lambda_3)]$; $\Lambda_3 = \varepsilon^{-1}\omega^{-1}\arcsin\{\varepsilon^2[\sin\omega\nu\mathrm{Re}\,\lambda_4 + \cos\omega\nu\mathrm{Im}\,\lambda_4]\}$; $\nu = x_0 + \varepsilon\lambda_3$. Пусть оператор проектирования Π ставит в соответствие каждой нечетной периодической функции из пространства $H^s(0,L)$ функцию, удовлетворяющую условиям ортогональности (3.1), (3.2). Из сказанного следует, что уравнение (4.1) эквивалентно системе

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \varepsilon\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon), \quad \mathbf{w} = \varepsilon\mathbf{F}(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon), \tag{4.9}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_0 = (3a_0, 0, 0)$; $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$; $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$;

$$F_1(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon) = M\Pi f^+(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon), \quad F_2 = \Pi_0 K f(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon). \tag{4.10}$$

При выводе системы (4.9) учтено, что оператор сдвига перестановочный с любым оператором свертки.

Ниже запись $\mathbf{w} \in V^s$ (соответственно $\mathbf{w} \in \overset{\circ}{V}{}^s$) означает, что $w^0 \in E^s(w^0 \in \overset{\circ}{E}{}^s)$, $w^+ \in H^s(0,L)$, т. е. конечна норма $\|\mathbf{w}\|_{V^s} = \|w^0\|_{E^s} + \|w^+\|_{H^s(0,L)}$.

Другими словами, $\mathbf{w} \in V^s$, если $w = w^0 + \theta w^+ \in V^s$, и $\mathbf{w} \in \overset{\circ}{V}{}^s$, если $w \in \overset{\circ}{V}{}^s$.

Лемма. *Пусть $1/2 < s < 1$. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ оператор $(\boldsymbol{\lambda}_0 + \varepsilon\boldsymbol{\Lambda}, \varepsilon\mathbf{F})$ переводит шар $B = \{\boldsymbol{\lambda} \in R^3,\ \mathbf{w} \in V^{s+1} \mid |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0|^2 + \|\mathbf{w}\|^2_{V^{s+1}} < 1\}$ в себя и является сжимающим.*

Доказательство. Для краткости записи целесообразно принять следующее соглашение: нелинейный оператор $\Phi(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})$ принадлежит классу Γ^r, если для всех $(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda}) \in B$ и $(\mathbf{w}_1,\boldsymbol{\lambda}) \in B$

$$\|\Phi(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})\|_{V^r} + \sum_{j=1}^{3} \|\partial\Phi(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})/\partial\lambda_j\|_{V^r} \leqslant C, \quad \|\Phi(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda}) - \Phi(\mathbf{w}_1,\boldsymbol{\lambda})\|_{V^r} \leqslant C\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_1\|_{V^r}$$

с постоянными C. Запись $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda}) \in \Gamma^r$ означает, что все компоненты оператора $\boldsymbol{\Phi}$ принадлежат классу Γ^r. Аналогично функционал $A(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda}) \in \Gamma^r$, если для указанных $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}_1$

$$|A(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})| + \sum_{j=1}^{3} |\partial A(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})/\partial\lambda_j| \leqslant C, \quad |A(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda}) - A(\mathbf{w}_1,\boldsymbol{\lambda})| \leqslant C\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_1\|_{V^r}.$$

Доказательство леммы сводится к проверке утверждений $\Lambda_k \in \Gamma^{s+1}$, $\mathbf{F} \in \Gamma^{s+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$.

Функционал $a(f)$ линеен, и для него справедливо неравенство (3.5). Если положить $r = s - 1$, то из определения (4.5) функционала Λ_0 и свойств (2.5) оператора сдвига следует $\Lambda_0 \in \Gamma^s$. Поэтому оператор, ставящий в соответствие вектору $(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda})$ пару (u,v) по формулам (4.3) и (4.6), принадлежит классу Γ^s. Функции $f_0(u,v,\lambda_1,\varepsilon)$ и $f_1(u,v,\varepsilon)$ есть целые аналитические функции своих аргументов. Соответствующие им сложные функции $f_k(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon)$ также принадлежат классу Γ^s согласно (2.1), (2.3) и (2.5).

При $s > 1/2$ пространство V^s непрерывно вложено в C. Поэтому [6] $|f(x)| \leqslant C\|f\|_{V^s}$ и стоящий в правой части (4.8) интеграл определен для достаточно малых ε. В соответствии с оценками сложных функций (2.3) и (2.4) $\Lambda_1 \in \Gamma^{s+1}$. Поскольку $b(f)$ — линейный функционал, то $\Lambda_4 \in \Gamma^{s+1}$ в соответствии с оценкой (3.6) при $r = s - 1$ и уже установленными свойствами оператора $f(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon)$. Очевидным образом Λ_2 и Λ_3 принадлежат классу Γ^{s+1}. Так как $f^+ = T_{-\nu} f^+ \in \Gamma^s$, то по свойству (3.7) оператора M $F_1(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon) \in \Gamma^{s+1}$. Аналогично $F_2(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon) \in \Gamma^{s+1}$ согласно той же самой оценке. Лемма доказана.

Теорема. *При достаточно малых ε существует решение задачи* (1.1)–(1.6) *такое, что $u - \varphi^0 \in \overset{\circ}{V}{}^{s+1}$, $v - K_0\varphi^0 \in V^{s+1}$.*

Доказательство. Существование функции u, обладающей требуемыми свойствами, вытекает из принципа сжатых отображений для системы (4.9). Так как $v = K_0 u$, то из (3.4) следуют нужные свойства функции v. Теорема доказана.

Замечание. При $\varepsilon = 0$ $u = \varphi$, при $s \geqslant 1$ функция $\varphi^0 \in V^r (r < 1)$ и $\varphi^0 \notin V^s$. По теореме поправки к решению, связанные с нелинейностью, более гладкие, чем основное решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Налимов В. И.** Сверхкритические течения из-под щита // ПМТФ. 1989. № 2. С. 77–81.
3. **Маклаков Д. В.** Существование решения задачи о докритическом обтекании вихря // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1990. С. 89–102.
4. **Хермандер Л.** Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
5. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
6. **Налимов В. И.** Псевдодифференциальные операторы с аналитическими символами // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 627–637.

Поступила в редакцию 2/VII 1996 г.