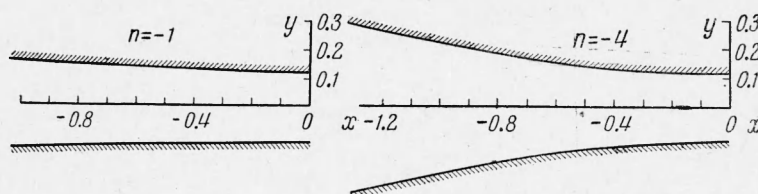


Для этих данных приводится также таблица координат профилей, которая



позволяет посредством (6), (7) найти контактные напряжения и скорости.

Поступила 5 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. Гостехиздат, 1954.
2. Карпов К. А. Таблицы функций $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$. Изд. АН СССР, 1958.
3. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. 24, вып. 5.
4. Григорьев О. Д. О некоторых классах плоского течения жестко-пластического тела. ПМТФ, 1961, № 6.

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ФОРМОИЗМЕНЕНИИ ЛИСТА ПРИ ПОМОЩИ ВАЛКОВ

Б. А. Друянов

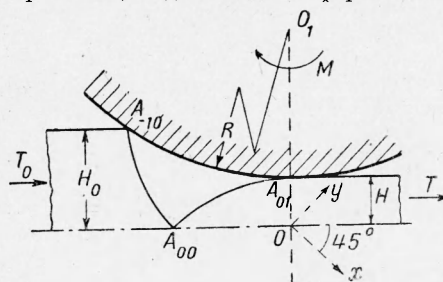
(Москва)

Процесс формоизменения листа при помощи шероховатых валков, частным случаем которого является прокатка, имеет определенное сходство с процессом сжатия листа шероховатыми плитами. Действительно, в обоих случаях касательные напряжения на линии контакта меняют знак, т. е. на линии контакта имеются зоны, где металл прилипает к инструменту и где скользит вдоль него. Однако если задача о сжатии листа неоднократно рассматривалась [1-3] и для нее в рамках теории плоского течения жестко идеально пластических тел построены решения, то для задачи о формоизменении листа при помощи валков такие решения отсутствуют. Это объясняется, конечно, кривизной контактной линии и невозможностью применения вследствие этого интегралов уравнений теории плоской деформации идеально пластических тел. Построение решений для задачи о формоизменении листа при помощи валков может быть выполнено применением метода решения статически неопределимых задач [4].

Для задачи о сжатии листа наиболее простое решение получается в случае, когда толщина листа равна ширине плит. В этом случае пластические области состоят из двух жестких треугольников. В следующем пункте аналогичное решение строится для рассматриваемой задачи.

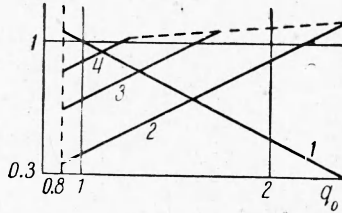
1. Пусть лист из идеально пластического материала деформируется, проходя через шероховатые валки (фиг. 1). Примем, что силы трения на линии контакта $A_{-10} A_{01}$ могут достигать величины k — предела текучести материала листа на сдвиг. На участке линии контакта, где это имеет место, материал листа может скользить вдоль линии контакта. На участке, где силы трения меньше k , имеет место прилипание.

Пусть пластическая область (фиг. 1) состоит из криволинейного треугольника $A_{-10} A_{01} A_{00}$. Предположим, что на всей дуге $A_{-10} A_{01}$ имеется прилипание, т. е. задана скорость. Для определения скоростей в области $A_{-10} A_{01} A_{00}$ следует решить задачу Ко-



Фиг. 1

пи. Так как уравнения Гейрингера допускают решение, соответствующее движению без деформации, то из единственности решения задачи Коши для уравнений Гейрингера



Фиг. 2. Зависимость усилий от q_0 . Линиям 1—4 соответствуют: 1— $T/2kH$; 2, 3, 4 — $T_0/2kH_0$ при $\varepsilon=0.10, 0.59, 0.70$

следует, что пластическая область $A_{-10}A_{01}A_{00}$ вращается вокруг точки O_1 со скоростью вала, как твердое тело.

Линии скольжения $A_{-10}A_{00}$ и $A_{00}A_{01}$ являются линиями разрыва скоростей, их форма определяется из условия непрерывности на них нормальной скорости.

Обозначим через Ω и R угловую скорость и радиус валков, через v_0 и v — скорость полосы до и после деформации. Введем безразмерные величины

$$\varepsilon = (H_0 - H) / H_0, \quad r = R / H, \quad \omega = \Omega H / v$$

$$\xi = x / H, \quad \eta = y / H$$

Из условия несжимаемости следует, что $v_0/v = 1 - \varepsilon$.

Пусть φ — угол наклона линии $A_{00}A_{01}$. Условие непрерывности нормальной скорости на $A_{00}A_{01}$ приводит к системе уравнений

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \left(1 + r - \frac{1}{\omega}\right) \sin \left(\varphi - \frac{1}{4} \pi\right), \quad d\eta = \operatorname{tg} \varphi d\xi \quad (1.1)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\xi = -\left(1 + r - \frac{1}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + C \sin \varphi, \quad \eta = \left(1 + r - \frac{1}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} - C \cos \varphi \quad (1.2)$$

Таким образом, $A_{00}A_{01}$ является дугой окружности с центром на прямой OO_1 . Эта окружность должна проходить через точку A_{01} и пересекать ось симметрии под углом 45° . Отсюда

$$C = \left(1 + r - \frac{1}{\omega}\right) \sqrt{2} = -\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \quad (1.3)$$

Условие непрерывности нормальной скорости на $A_{-10}A_{00}$ приводит к уравнениям

$$\xi = -\left(1 + r - \frac{1 - \varepsilon}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + D \sin \psi, \quad \eta = \left(1 + r - \frac{1 - \varepsilon}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + D \cos \psi \quad (1.4)$$

Следовательно, $A_{-10}A_{00}$ также является окружностью с центром на OO_1 . Так как $A_{-10}A_{00}$ должна проходить через точку A_{00} ортогонально к $A_{00}A_{01}$, то

$$D = \left(1 + r - \frac{1 - \varepsilon}{\omega}\right) \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \quad (1.5)$$

Из (1.3) и (1.5) следует, что

$$\omega = \varepsilon / 2(\sqrt{2} + 1), \quad r = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} / \varepsilon - 1)$$

Рассмотрение деформации, которую испытывает элемент, пересекающий $A_{-10}A_{00}$, показывает, что эта линия скольжения относится к семейству α .

Вычисление сил, которые должны быть приложены к жестким частям верхней половины листа, чтобы обеспечить их равновесие, приводит к формулам

$$T / 2kH = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} q_0$$

$$T_0 / 2kH_0 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} (1 - \varepsilon) \left[\cos \left(\alpha_0 + \frac{1}{4} \pi \right) + 2\alpha_0 \sin \left(\alpha_0 + \frac{1}{4} \pi \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{2} q_0$$

Здесь q_0 — значение $-(\sigma_x + \sigma_y) / 2k$ в точке A_{00} ; α_0 — значение ψ в точке A_{-10} .

Момент, который должен быть приложен к верхнему валку, равен

$$M / 2kH^2 = 1.90 + 5.84\alpha_0 - 4.12 [\cos (\alpha_0 + 0.25\pi) + 2\alpha_0 \sin (\alpha_0 + 0.25\pi)] +$$

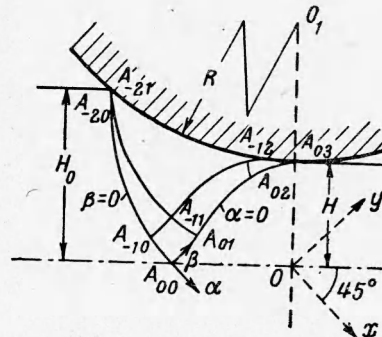
$$+ 1.71 [0.16 + \cos (\alpha_0 + 0.25\pi) + 2\alpha_0 \sin (\alpha_0 + 0.25\pi)] (1 + r) +$$

$$+ q_0 1.71 \{ (1 + r) [0.41 - \sin (\alpha_0 + 0.25\pi)] - 2.41 [1 - \sin (\alpha_0 + 0.25\pi)] \}$$

Положительные направления T , T_0 и M показаны на фиг. 1.

Так как модуль среднего напряжения в поперечном сечении жесткой части листа не должен превышать $2k$, то должны выполняться неравенства $|T/2kH| \leq 1$, $|T_0/2kH_0| \leq 1$. Соответствующая область значений q_0 ограничена на фиг. 2 пунктирными линиями. Из фиг. 2 видно, что среди допустимых значений q_0 не существует такого, при котором T или T_0 равнялись бы нулю. С другой стороны, $M > 0$ при допустимых значениях q_0 . Таким образом, рассмотренная схема пластической деформации при прокатке невозможна.

2. Рассмотрим более общий! случай. Пусть жестко-пластическая граница состоит из линий скольжения $A_{-20}A_{00}$ и $A_{00}A_{03}$ (фиг.3). Предполагая, что во всех! пластических областях линии скольжения криволинейны, введем криволинейные координаты по формулам



Фиг. 3

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{2k} - \left(\frac{P}{2k} - \varphi \right) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[-\frac{p_0}{2k} + \left(\frac{P}{2k} + \varphi \right) \right]$$

Здесь

$$\varphi = \frac{1}{2} \text{Arc-tg} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \quad p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Обозначим через v_α , v_β безразмерные проекции скорости на направления α , β (за характерную скорость принята скорость листа после деформации). Эти величины удовлетворяют уравнению $\partial^2 f / \partial \alpha \partial \beta + f = 0$ и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} &= (1 - \varepsilon) \cos \left(\alpha + \frac{1}{4} \pi \right), & \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} &= -(1 - \varepsilon) \sin \left(\alpha + \frac{1}{4} \pi \right) & \text{при } \beta = 0 \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} &= \cos \left(\beta + \frac{1}{4} \pi \right), & \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} &= -\sin \left(\beta + \frac{1}{4} \pi \right) & \text{при } \alpha = 0 \end{aligned}$$

Пользуясь методом Римана, можно определить v_α , v_β во всей пластической области [5]

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \sin\left(\alpha + \beta + \frac{1}{4}\pi\right) - \varepsilon \int_0^\alpha J_0\left[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}\right] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \\ v_\beta &= (1-\varepsilon) \cos\left(\alpha + \beta + \frac{1}{4}\pi\right) - \varepsilon \int_0^\beta J_0\left[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}\right] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предположим, что на участке $A_{-21}A_{-12}$ имеет место прилипание (фиг. 3). Тогда треугольник $A_{-21}A_{-12}A_{-11}$ вращается вокруг точки O_1 , как жесткое целое, со скоростью вала. Следовательно, можно определить v_α , v_β в этом треугольнике

$$v_\alpha = -\omega Y + \omega(1+r) \sin\left(\varphi + \frac{1}{4}\pi\right), \quad v_\beta = \omega X + \omega(1+r) \cos\left(\varphi + \frac{1}{4}\pi\right) \quad (2.2)$$

Здесь

$$X = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi, \quad Y = -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

Сравнивая (2.1) и (2.2), получаем

$$X = -\left(1 + r - \frac{1 - \varepsilon}{\omega}\right) \cos\left(\alpha + \beta + \frac{1}{4} \pi\right) - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{\beta} J_0 [2 \sqrt{\alpha(\beta - \lambda)}] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4} \pi\right) d\lambda$$

$$Y = \left(1 + r - \frac{1}{\omega}\right) \sin\left(\alpha + \beta + \frac{1}{4} \pi\right) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{\alpha} J_0 [2 \sqrt{(\alpha - \lambda)\beta}] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4} \pi\right) d\lambda$$

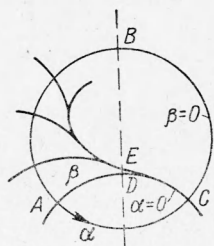
Эти формулы определяют сетку линий скольжения в области $A_{-21}A_{-12}A_{11}$. Линии $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ — сетки линий скольжения, определяемой формулами (2.3),

представляют собой окружности радиуса $\varepsilon/\omega\sqrt{2}$ с центрами на прямой OO_1 (фиг. 3). Радиусы кривизны такой сетки в зависимости от α, β были найдены Хиллом [3]

$$\frac{R_1}{H} = \frac{\varepsilon}{\omega\sqrt{2}} \left[J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha} J_1(2\sqrt{\alpha\beta}) \right]$$

Здесь R_1 — радиус кривизны линий скольжения α ; J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков.

Полагая $R_1 = 0$, получим уравнение огибающей линий скольжения β . На фиг. 4 показано расположение линий скольжения в области $ABCD$. Линия контакта $A_{-21}A_{03}$ может пересекать прямую OO_1 только выше точки D .



Фиг. 4. Огибающая линий β в поле линий скольжения, порожденного двумя окружностями равного радиуса

Из рассмотрения поля линий скольжения в окрестности линии $\alpha = 0$ следует, что некоторая линия скольжения β должна касаться линии контакта слева от точки A_{03} . Эта точка является концом участка $A_{-21}A_{-12}$, где имеет место прилипание. На участке $A_{-12}A_{03}$ линии скольжения β касаются линии контакта (фиг. 3). Пластические области для рассматриваемого случая показаны на фиг. 3.

Решение возможно, если точка A_{00} лежит на оси симметрии листа. Это условие приводит к уравнению, которое можно получить так же, как было получено аналогичное уравнение в задаче о волочении листа [8]. Это уравнение связывает r, ω и ε . Таким образом, в рассматриваемом случае, как и в предыдущем, остается один свободный параметр q_0 .

3. Интегралы, входящие в (2.1), можно разложить в ряды Неймана. Положим

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \sin \lambda d\lambda$$

Применим преобразование Лапласа

$$F(p, \beta) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta) e^{-p\alpha} d\alpha = \frac{e^{-\beta/p}}{p(p^2 + 1)}$$

По формуле обращения получим

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p\alpha - \beta/p} \frac{dp}{p(p^2 + 1)}$$

Подынтегральная функция удовлетворяет условиям теоремы Жордана. Поэтому $f(\alpha, \beta)$ равна сумме вычетов подынтегральной функции

$$f(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha + \beta) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k J_{2k}(2\sqrt{\alpha\beta})$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, представляет собой частный случай функции Ломмеля двух аргументов [6].

Рассмотренный способ носит общий характер и позволяет получать решения краевых задач для телеграфного уравнения в рядах Неймана.

Поступила 4 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел. Теория пластичности. Сб. статей под ред. Ю. Н. Работнова. ИЛ, 1948.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГИТТЛ, 1959.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, 1956.
4. Друянов Б. А. Метод решения статически неопределимых задач плоского течения идеально пластических тел. ДАН СССР, 1962, т. 143, № 4.
5. Друянов Б. А. Волочение через криволинейную матрицу. ПМТФ, 1962, № 1.
6. Ватсон Г. Н. Теория бesselевых функций. Ч. 1, ИЛ, 1949.