

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский

(Донецк)

Рассматривается задача об отражении магнитозвуковых волн от плоского слоя электропроводящей жидкости (или газа), находящейся в постоянном однородном магнитном поле H . Найдены коэффициенты отражения и прозрачности слоя в предельных случаях слабого и сильного магнитных полей.

1. Предположим, что на плоский слой толщины d под произвольным углом падает плоская быстрая магнитозвуковая волна (фигура). Граница слоя совпадает с плоскостью xu . Плоскость падения волны совмещена с плоскостью xz . Вектор H лежит в этой же плоскости и составляет с осью x угол φ . Среды по обе стороны слоя электропроводящие. При этом будут отражаться в верхнюю среду и проходить в нижнюю как быстрые, так и медленные магнитозвуковые волны. Внутри слоя в результате многократных отражений от его границ образуются результирующие магнитозвуковые волны обоих типов, распространяющиеся в противоположных направлениях оси z .

Векторы скорости и изменения напряженности магнитного поля в магнитозвуковых волнах лежат в плоскости падения. Волны Альфвена поляризованы перпендикулярно этой плоскости и распространяются независимо от магнитозвуковых. Поэтому в данной задаче их можем не принимать во внимание.

Среду, из которой падает волна, слой и нижнюю среду будем обозначать соответственно номерами 3, 2 и 1. Величины, относящиеся к различным типам магнитозвуковых волн, будем обозначать буквами с двумя индексами $A_{\mu\nu}$, где $\mu = 1, 2, 3$ — номер среды, в которой распространяется волна, $\nu = 1$ соответствует быстрой, а $\nu = 2$ — медленной волнам. Кроме того, величины, относящиеся к волнам, распространяющимся в положительном направлении оси z , будем отмечать штрихами.

Из уравнений магнитной гидродинамики в случае плоских магнитозвуковых волн вытекают соотношения [1]

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu x} &= A_{\mu\nu} v_{\mu\nu z}, & E_{\mu\nu y} &= B_{\mu\nu} v_{\mu\nu z}, & p_{\mu\nu} &= Z_{\mu\nu} v_{\mu\nu z} \\ A_{\mu\nu} &= \frac{H(u_{\mu\nu} - 1)u_{\mu\nu}k_{\mu\nu z}}{\omega\psi_{\mu}\beta_{\mu\nu}}, & B_{\mu\nu} &= \frac{-\omega A_{\mu\nu}}{ck_{\mu\nu z}}, & Z_{\mu\nu} &= \frac{(\text{sign } k_{\mu\nu z})\rho_{\mu}a_{\mu}\sqrt{u_{\mu\nu}}\sin\alpha_{\mu\nu}}{\beta_{\mu\nu}} \\ \beta_{\mu\nu} &= u_{\mu\nu}\cos\varphi - \sin\theta_{\mu\nu}\cos\alpha_{\mu\nu}, & \alpha_{\mu\nu} &= 90^\circ - (\theta_{\mu\nu} - \varphi), & \alpha_{\mu\nu}' &= 90^\circ - (\theta_{\mu\nu}' + \varphi) \\ \psi_{\mu} &= \frac{H^2}{4\pi\rho_{\mu}a_{\mu}^2}, & u_{\mu\nu} &= \left(\frac{\omega}{k_{\mu\nu}a_{\mu}}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_z , p и ρ — составляющая скорости, гидродинамическое давление и плотность жидкости соответственно, h — малое изменение напряженности магнитного поля в волне, E_y — напряженность индуцированного электрического поля, k — волновой вектор, ω — частота, a — обычная скорость звука в жидкости, c — скорость света, α — угол между векторами k и H , u и ψ — квадраты фазовой скорости и напряженности магнитного поля в безразмерной форме соответственно.

Углы $\theta_{\mu\nu}$ связаны соотношениями (закон Снеллиуса)

$$k_{\mu\nu} \sin\theta_{\mu\nu} = k_{31} \sin\theta_{31} \quad (1.2)$$

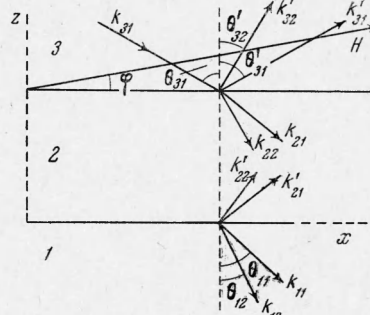
Фазовые скорости магнитозвуковых волн определяются дисперсионным уравнением

$$\begin{aligned} u_{\mu}^2 - (1 + \psi_{\mu})u_{\mu} + \psi_{\mu}\cos^2\alpha_{\mu} + i\omega\eta_{\mu}(u_{\mu} - 1) &= 0 \\ \eta_{\mu} &= c^2/4\pi\sigma_{\mu}a_{\mu}^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где σ_{μ} — электропроводность среды.

В случае хорошо проводящих сред $\omega\eta_{\mu} \ll 1$ и слабого магнитного поля $\psi_{\mu} \ll 1$ из (1.3) находим

$$u_{\mu 1} = 1 + \psi_{\mu}\sin^2\alpha_{\mu 1}, \quad u_{\mu 2} = \psi_{\mu}\cos^2\alpha_{\mu 2} - i\omega\eta_{\mu} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

При этом соотношения (1.2) с точностью до главных членов принимают вид

$$\theta_{\mu\nu}' = \theta_{\mu\nu}, \quad \frac{\sin \theta_{21}}{a_3} = \frac{\sin \theta_{11}}{a_{\mu}} = \frac{\sin \theta_{\mu 2}}{a_{\mu} \sqrt{\psi_{\mu} \sin^2 \varphi - i\omega\eta_{\mu}}} \quad (1.5)$$

При сильном магнитном поле $\psi_{\mu} \gg 1$ имеем

$$u_{\mu 1} = \psi_{\mu} + \sin^2 \alpha_{\mu 1}, \quad u_{\mu 2} = \cos^2 \alpha_{\mu 2} \left(1 - \frac{1}{\psi_{\mu}} \sin^2 \alpha_{\mu 2} \right) \quad (1.6)$$

$$\theta_{\mu\nu}' = \theta_{\mu\nu}, \quad \sin \theta_{\mu 1} = \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_{\mu}}} \sin \theta_{31}, \quad \sin \theta_{\mu 2} = \frac{1}{\sqrt{\psi_{\mu}}} \sin \varphi \sin \theta_{\mu 1}$$

Принимая амплитуду v_{31z} за единицу, записываем поле скоростей в виде

$$v_{3z} = -\exp[-i\gamma_{31}(z-d)] + \sum_{\nu=1}^2 W_{3\nu}' \exp[i\gamma_{3\nu}(z-d)], \quad v_{1z} = -\sum_{\nu=1}^2 W_{1\nu} \exp(-i\gamma_{1\nu}z)$$

$$v_{2z} = \sum_{\nu=1}^2 [-\bar{W}_{2\nu} \exp(-i\gamma_{2\nu}z) + W_{2\nu}' \exp(i\gamma_{2\nu}z)] \quad (\gamma_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} \cos \theta_{\mu\nu}) \quad (1.7)$$

Здесь опущен для краткости общий множитель $\exp[i(k_x x - \omega t)]$; $W_{3\nu}'$ и $W_{1\nu}$ — амплитудные коэффициенты отражения и прозрачности слоя, подлежащие определению. Выражения для $h_{\mu x}$, $E_{\mu y}$, p_{μ} получаются согласно (1.4) заменой коэффициентов $W_{\mu\nu}$ в (1.7) соответственно на $A_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$, $Z_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$.

На границах слоя имеют место условия

$$v_{1z} = v_{2z}, \quad h_{1x} = h_{2x}, \quad E_{1y} = E_{2y}, \quad p_1 = p_2 \quad \text{при } z = 0$$

$$v_{2z} = v_{3z}, \quad h_{2x} = h_{3x}, \quad E_{2y} = E_{3y}, \quad p_2 = p_3 \quad \text{при } z = d \quad (1.8)$$

Таким образом, получаем систему восьми уравнений для определения коэффициентов $W_{\mu\nu}$.

2. Решение этой системы при слабом магнитном поле с точностью до главных членов имеет вид

$$W_{31}' = V - a_2 \Delta^{-1} \sec \theta_{21} [(\rho_2 - \rho_3)(Z_1 \cos \gamma_{21} d - iZ_2 \sin \gamma_{21} d) W_{32}' - (\rho_1 - \rho_2) Z_1 W_{12}]$$

$$W_{11} = W - a_2 \Delta^{-1} \sec \theta_{21} [(\rho_2 - \rho_3) Z_3 W_{32}' - (\rho_1 - \rho_2)(Z_3 \cos \gamma_{21} d - iZ_2 \sin \gamma_{21} d) W_{12}]$$

$$W_{32}' = \delta^{-1} \rho_3^{-1} \Phi_2 [(\rho_2 - \rho_3)(\cos \gamma_{22} d - im \sin \gamma_{22} d)(1 + V) \operatorname{tg} \theta_{31} + (\rho_1 - \rho_2) W \operatorname{tg} \theta_{11}]$$

$$W_{12} = -\delta^{-1} \rho_1^{-1} \Phi_2 [(\rho_2 - \rho_3)(1 + V) \operatorname{tg} \theta_{31} + (\rho_1 - \rho_2)(\cos \gamma_{22} d - im \sin \gamma_{22} d) W \operatorname{tg} \theta_{11}]$$

$$V = \Delta^{-1} [Z_2(Z_1 - Z_3) \cos \gamma_{21} d - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin \gamma_{21} d], \quad W = 2\Delta^{-1} Z_2 Z_3$$

$$\Delta = Z_2(Z_1 + Z_3) \cos \gamma_{21} d - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin \gamma_{21} d$$

$$\delta = (m + n) \cos \gamma_{22} d - i(1 + mn) \sin \gamma_{22} d$$

$$m = \frac{a_3}{a_2} \left(\frac{\psi_3 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_3}{\psi_2 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_2} \right)^{1/2}, \quad n = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{\psi_1 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_1}{\psi_2 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_2} \right)^{1/2}$$

$$\Phi_2 = \frac{\psi_2 \sin^2 \varphi \sin \theta_{21}}{\sqrt{\psi_2 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_2}}, \quad Z_{\mu} = \frac{\rho_{\mu} a_{\mu}}{\cos \theta_{\mu 1}}$$

Здесь V и W — коэффициенты отражения и прозрачности слоя в отсутствие магнитного поля [2].

Таким образом, при наклонном падении магнитозвуковой волны на слой коэффициенты отражения и прозрачности отличаются от обычных акустических коэффициентов членами порядка $\psi_2(\psi_2 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_2)^{-1/2}$.

В случае идеально проводящих сред коэффициент $\bar{W}_{12}$ обращается в нуль при условии

$$\operatorname{tg} \gamma_{21} d = m Z_1 \left(\frac{1 - M^2}{M^2 Z_2^2 - m^2 Z_1^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \gamma_{22} d = \frac{Z_2}{m Z_1} \operatorname{tg} \gamma_{21} d \quad (2.2)$$

$$M = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}, \quad m = \left(\frac{\rho_2}{\rho_3} \right)^{1/2}, \quad n = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2}, \quad \gamma_{21} = \frac{\omega}{a_2} \cos \theta_{21}, \quad \gamma_{22} = \frac{\omega}{a_2 \sqrt{\psi_2 \sin^2 \varphi}}$$

Равенства (2.2) определяют толщину слоя и напряженность магнитного поля, при которых в среде 1 не возбуждаются медленные магнитозвуковые волны. В частности, при $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$ действительные значения d для такого слоя получаются при выполнении неравенств

$$mZ_1/Z_2 < M < 1$$

Коэффициент W_{32}' равен нулю, если

$$\operatorname{tg}^2 \gamma_{21} d = \frac{1 + \zeta(1 - 2n^2 M^2) + \sqrt{\zeta(\zeta - 1)^2 + 4\zeta(n^2 - 1)(\zeta n^2 - 1)M^2}}{2\zeta(\zeta n^4 M^2 - 1)} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{22} d = -\frac{Z_2}{nZ_1} \operatorname{tg} \gamma_{21} d, \quad \zeta = \left(\frac{Z_2}{nZ_1}\right)^2$$

Таким образом, в случае $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$ действительные значения толщины слоя, не отражающего медленные волны в среду 3, получаются при условии

$$\frac{Z_1}{nZ_2} < M < \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{1 + \zeta}{2}\right)^{1/2} \quad (\zeta > 1)$$

Если среды 3 и 1 одинаковы и имеют место равенства $\gamma_{21} d = \pi$, $\gamma_{22} d = (2N + 1)\pi$, из которых следует

$$\sqrt{\psi_2} \sin \varphi \cos \theta_{21} = \frac{1}{2N + 1} \quad (2.4)$$

где N — достаточно большое целое число, будем иметь абсолютно прозрачный слой

$$W_{31}' = W_{32}' = W_{12} = 0, \quad W_{11} = -1$$

Полагая $d = 0$ в (2.1), получим коэффициенты отражения и прозрачности границы раздела двух сред 3 и 1

$$\begin{aligned} W_{31}' &= V_0 - \frac{\psi_3}{2\Omega} a_3 Y^2 \cos \theta_{31}, & W_{32}' &= \frac{\psi_3}{\Omega} a_3 Y \sin \varphi \sin \theta_{31} \\ W_{11} &= W_0 - \frac{\psi_1}{2\Omega} a_1 Y^2 \cos \theta_{11}, & W_{12} &= -\frac{\psi_1}{\Omega} a_1 Y \sin \varphi \sin \theta_{11} \\ V_0 &= \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 + Z_3}, & W_0 &= \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3}, & Y &= \frac{2Z_3(\rho_1 - \rho_3)}{(Z_1 + Z_3)\rho_3} \sin \varphi \operatorname{tg} \theta_{11} \\ \Omega &= a_1 \sqrt{\psi_1 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_1} + a_3 \sqrt{\psi_3 \sin^2 \varphi - i\omega\eta_3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При нормальном падении магнитное поле в рассмотренном приближении на амплитудные коэффициенты не влияет. Вычисление в более высоком приближении с точностью до членов порядка ψ дает для этого случая

$$\begin{aligned} W_{31}' &= V + \frac{\psi_2 \cos^2 \varphi}{2\Delta} \left[Z_2 \left(\frac{a_2}{a_1} Z_2 - Z_1 \right) W - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a_2}{a_3} Z_2 - Z_3 \right) (Z_2 \cos k_{21} d - iZ_1 \sin k_{21} d) (1 + V) \right] \\ W_{11} &= W + \frac{\psi_2 \cos^2 \varphi}{2\Delta} \left[Z_2 \left(\frac{a_2}{a_3} Z_2 - Z_3 \right) (1 + V) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a_2}{a_1} Z_2 - Z_1 \right) (Z_2 \cos k_{21} d - iZ_3 \sin k_{21} d) W \right] \\ W_{32}' &= W_{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следовательно, при нормальном падении и слабом магнитном поле отраженная и преломленная волны того же типа, что и падающая.

Для границы раздела двух сред из (2.6) находим

$$\begin{aligned} W_{31}' &= V_0 + \psi_3 X, \quad W_{11} = W_0 - \psi_3 X \\ X &= Z_3 \left(\frac{a_2}{a_1} Z_3 - Z_1 \right) (Z_1 + Z_3)^{-2} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Решение системы (1.8) при сильном магнитном поле с точностью до членов порядка $1/\sqrt{\psi}$ имеет вид

$$W_{31}' = \frac{1}{\Delta} [n_2(n_1 - n_3) \cos \gamma_{21} d - i(n_2^2 - n_1 n_3) \sin \gamma_{21} d], \quad W_{11} = \frac{2}{\Delta} n_2 n_3$$

$$W_{12} = \frac{2n_2n_3 \operatorname{tg} \varphi}{a_1 \sqrt{\psi_1 \Delta}} \left\{ q (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_3 \sin \gamma_{22}d) - rm_2 \cos \gamma_{21}d \right\} \cos (\theta_{11} - \varphi) + \\ + i \frac{rm_2}{\cos \theta_{21}} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \cos \varphi + \sin \theta_{21} \cos (\theta_{11} + \varphi) \right] \sin \gamma_{21}d \quad (3.1)$$

$$W_{32}' = -\frac{1}{m_2} \left[W_{12} (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_1 \sin \gamma_{22}d) + iW_{11} \frac{q}{a_1 \sqrt{\psi_1}} \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi) \sin \gamma_{22}d \right]$$

$$\Delta = n_2(n_1 + n_3) \cos \gamma_{21}d - i (n_2^2 + n_1n_3) \sin \gamma_{21}d, \quad q = m_2a_2 = m_1a_1$$

$$\delta = m_2 (m_1 + m_3) \cos \gamma_{22}d - i (m_2^2 + m_1m_3) \sin \gamma_{22}d, \quad r = m_2a_2 - m_3a_3$$

$$n_\mu = \sqrt{\rho_\mu} \cos \theta_{\mu 1}, \quad m_\mu = \rho_\mu a_\mu, \quad \gamma_{21} = \frac{\omega \cos \theta_{21}}{a_2 \sqrt{\psi_2}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\omega}{a_2 \sin \varphi}$$

Если толщина слоя значительно меньше длины быстрой магнитозвуковой волны $\gamma_{21}d \ll 1$, формулы (3.1) существенно упрощаются (3.2)

$$W_{31}' = \frac{n_1' - n_3}{n_1 + n_3} - 2i \frac{n_2^2 - n_1^2}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31}d, \quad W_{11} = \frac{2n_3}{n_1 + n_3} + 2i \frac{n_2^2 + n_1n_3}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31}d \\ W_{32}' = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [r (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_1 \sin \gamma_{22}d) - qm_2], \quad \beta = \frac{2n_3 \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi)}{a_1 (n_1 + n_3)} \\ W_{12} = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [q (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_3 \sin \gamma_{22}d) - rm_2], \quad \gamma_{31} = \frac{\omega \cos \theta_{31}}{a_3 \sqrt{\psi_3}}$$

Теперь медленные волны будут возникать и в случае нормального падения. Согласно (3.2), они отсутствуют лишь при условии

$$\gamma_{22}d = (2N + 1) \pi, \quad 2\rho_2a_2^2 = \rho_1a_1^2 + \rho_3a_3^2 \quad (3.3)$$

т. е. когда толщина слоя составляет нечетное число полуволн второго типа, а модуль упругости среды 2 равен среднему арифметическому модулей сред 3 и 1.

Поступила 14 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн на границе раздела двух сред с конечной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 19, вып. 2.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.

О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА В СЛУЧАЙНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Г. М. Заславский (Новосибирск)

Рассмотрено поведение осциллятора во внешнем случайном поле в приближении, когда длительность столкновения много больше периода осциллятора. Получено кинетическое уравнение, описывающее изменение со временем функции распределения координат и скоростей. Рассмотренная задача аналогична движению заряженной частицы во внешнем магнитном поле при наличии столкновений.

Известной ситуацией при изучении взаимодействия частиц плазмы с полем волн, развитых вследствие неустойчивостей, является возможность рассмотрения движения отдельной частицы в заданном случайном поле. Если к тому же имеется внешнее магнитное поле, то движение частицы аналогично движению осциллятора в поле случайных сил. Случайные силы, действующие на осциллятор, можно представить себе как последовательность импульсов с известным случайным законом распределения величины импульсов и промежутков времени между импульсами. В зависимости от времени длительности импульса τ (времени «столкновения») и частоты осциллятора ω возможны два предельных случая: 1) $\omega\tau \ll 1$; 2) $\omega\tau \gg 1$. Первый случай достаточно хорошо изучен. Ниже рассматривается второй случай в приближении, когда средний интервал между импульсами много больше τ (редкие «столкновения»).