УДК 539.374

ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

А. С. Семенов

(*Одесса*)

В последнее время широко исследуются задачи о динамическом поведении несовершенных сплошных сред от различного рода воздействий. Для описания физических процессов, касающихся неустановившихся явлений, весьма удобен метод преобразования Лапласа. В вязкоупругих средах добавляются две сложности: в представлении свойств среды, зависящих от времени, и в обращении полученных решений, содержащих это дополнительное усложнение. Некоторые приближенные методы обращения при анализе вязкоупругих напряжений изложены в [1]. В работах [2, 3] изложен эффективный метод построения решения нестационарных задач для конечных и бесконечных несовершенных сред с помощью вспомогательных функций и приводится решение для полупространства. С использованием идей обращения трансформант, изложенных в [4], в работе [5] получено решение и приведена полная картина динамики изменения поля напряжений в вязкоупругом полупространстве.

В данной работе рассматривается действие внезапно приложенной к свободной поверхности вязкоупругого слоя нормальной подвижной нагрузки. Методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье получено решение в виде равномерно сходящегося ряда по отраженным в слое продольным и поперечным волнам. Путем обращения трансформант методом, изложенным в [4, 5], получено точное решение для поля напряжений в исследуемой среде. Рассмотрен частный случай вязкоупругой среды больцмановского типа, для которой получена численная реализация решения на ЭЦВМ.

Задается слой толщины h вязкоупругого материала больцмановского типа, покрывающий полупространство $z > h$. Слой жестко скреплен с полупространством. В момент времени $t=0$ к поверхности слоя $z=0$ прикладывается нагрузка P_0, распределенная вдоль оси y и движущаяся вдоль оси x с постоянной скоростью c_0. Задача нахождения поля напряжений в вязкоупругом слое сводится к интегрированию уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases}$$

где u, w — компоненты смещений вдоль осей x и z соответственно,

$$(2)\qquad \sigma_{xx} = \int_0^t \left\{ [\lambda\delta(t-\tau) - Q_1(t-\tau)] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right.$$
$$\left. + 2[\mu\delta(t-\tau) - Q_2(t-\tau)] \frac{\partial u}{\partial x} \right\} d\tau;$$

$$\sigma_{zz} = \int_0^t \left\{ [\lambda\delta(t-\tau) - Q_1(t-\tau)] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2[\mu\delta(t-\tau) - \right.$$
$$\left. - Q_2(t-\tau)] \frac{\partial w}{\partial z} \right\} d\tau;$$

$$\tau_{xz} = \int_0^t [\mu\delta(t-\tau) - Q_2(t-\tau)] \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\tau,$$

где $Q_1(t)$ — ядро объемной релаксации; $Q_2(t)$ — ядро сдвиговой релаксации; λ, μ — постоянные Ляме; ρ — плотность среды; $\delta(t)$ — дельта-функция. Уравнения (1) решаются при граничных условиях

$$\left.\begin{cases}\sigma_{zz} = -P_0\delta(tc_0 - x),\\ \tau_{xz} = 0,\end{cases}\right| z=0, \tag{3}$$

где $z=h$ — жесткое сцепление сред. Начальные условия однородны.

Вводятся в рассмотрение потенциал φ продольных и потенциал поперечных волн ψ. Решение поставленной задачи находится методом интегрального преобразования Лапласа по времени t и двустороннего комплексного преобразования Фурье по переменной x:

$$\Phi(\alpha, s; z) = Ae^{-\gamma_1 z} + Be^{\gamma_1 z};$$
$$\Psi(\alpha, s; z) = Ce^{-\gamma_2 z} + De^{\gamma_2 z}$$

(обозначения см. в [5]). В целях изучения последовательного отражения волн от границ слоя потенциалы продольных и поперечных волн представляются в виде [6]

$$\Phi(\alpha, s; z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}^{+} e^{-f_1^{+}(\alpha, s; z)} + \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}^{-} e^{-f_1^{-}(\alpha, s; z)};$$
$$\Psi(\alpha, s; z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}^{+} e^{-f_2^{+}(\alpha, s; z)} + \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}^{-} e^{-f_2^{-}(\alpha, s; z)}, \tag{4}$$

где

$$f_1^{+} = mh\gamma_1 + nh\gamma_2 - \gamma_1 z - i\alpha x;$$
$$f_1^{-} = (m-1)h\gamma_1 + nh\gamma_2 + \gamma_1 z - i\alpha x;$$
$$f_2^{+} = mh\gamma_1 + nh\gamma_2 - \gamma_2 z - i\alpha x;$$
$$f_2^{-} = mh\gamma_1 + (n-1)h\gamma_2 + \gamma_2 z - i\alpha x.$$

Для коэффициентов $a_{mn}^{\pm}$, $b_{mn}^{\pm}$ можно получить рекурентные соотношения, используя граничные условия (3), формулы (2) и представление потенциалов в виде (4).

Для удобства исследований найденное в пространстве трансформант поле напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$ разбивается на части $\bar{\sigma}_{kl}^{-}$ и $\bar{\sigma}_{kl}^{+}$ ($k=x, z$; $l=x, z$), обусловленные волнами, распространяющимися от свободной границы слоя к границе раздела сред и от границы раздела сред к свободной поверхности слоя соответственно:

$$\bar{\sigma}_{kl}^{+} = \frac{P_0 v_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{2}\frac{\bar{P}_{kl}^{(+j)} e^{-f_j^{+}(\alpha, s; z)}}{(i\alpha - v_0 s)}d\alpha,$$

где

$$\bar{P}_{kl}^{(\pm j)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \bar{P}_{klmn}^{(\pm j)}, \quad (m+n \neq 0).$$

Для слагаемых $\bar{P}_{klmn}^{(+j)}$ получены рекурентные соотношения, начальные $\overline{P}_{kl}^{(-j)}$ приводятся в [5]. Интегралы вдоль действительной α оси комплексной плоскости заменяются подходящими контурными интегралами. Производится замена переменной так, чтобы, интегрируя по соответствующей переменной, получать напряжения за счет потенциалов продольных и поперечных волн:

$$\alpha=\alpha_j=s\bar{v}_j a_j p_j, \quad (j=1,\,2),$$

причем

$$a_1=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad a_2=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрирование ведется в предположении [3]

$$\frac{\bar{v}_1(s)}{\bar{v}_2(s)}=\frac{a_2}{a_1}=\mathrm{const}.$$

Следуя [4], вводится новая переменная τ, имеющая размерность времени и позволяющая вести интегрирование только с момента прихода в рассматриваемую точку фронта соответствующей волны

$$f_j^{\pm}(\alpha, s; z)=\tau, \quad (j=1,2). \tag{5}$$

Скорость подвижной нагрузки принимается досейсмической, и контур интегрирования деформируется так, чтобы он не содержал внутри себя полюсы и точки ветвления, что позволяет исключить вычеты из решения.

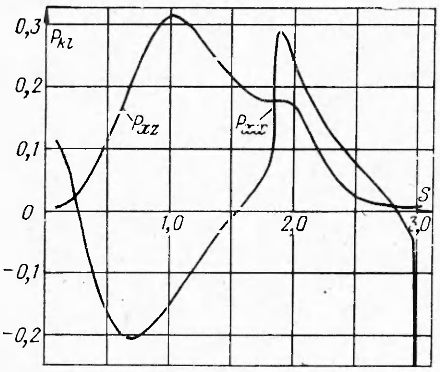
После перехода в контурных интегралах к переменной τ и использования общей формулы обращения трансформант Лапласа поле напряжений представляется в виде

$$\sigma_{kl}^{\pm}(r,\theta;t)=\frac{P_0 v_0}{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty H\left(\tau-\tau_j^{\pm}\right)\frac{P_{kl}^{(\pm j)}}{R_j}\frac{\partial p_j^{\pm}}{\partial\tau}F_j(p_j,\tau,t)\Bigg|_{p_j^-}^{p_j^+}d\tau+\right.$$
$$+H(\cos\theta-\nu)\int_0^\infty H\left(\tau_2^{\pm}-\tau\right)H\left(\tau-\tau^{\pm}\right)\frac{P_{kl}^{(\pm2)}}{R_2}\frac{\partial p^{\pm}}{\partial\tau}F(p,\tau,t)\Bigg|_{p_-^{+}}^{p_+^{+}}d\tau+$$
$$+H(-\cos\theta-\nu)\int_0^\infty H\left(\tau_2^{\pm}-\tau\right)H\left(\tau-\tau^{\pm}\right)\frac{P_{kl}^{(\pm2)}}{R_2}\frac{\partial p^{\pm}}{\partial\tau}\times$$
$$\left.\times F(p,\tau,t)\Bigg|_{p_-^{-}}^{p_+^{-}}d\tau\right\},$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, $\nu=\frac{a_2}{a_1}$, $\operatorname{tg}\theta=\frac{z}{x}$ и

$$F_j(p_j,\tau,t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-s\bar{v}_j a_j\tau}}{ip_j+\frac{v_0}{a_j\bar{v}_j}}\right\}; \quad F(p,\tau,t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-s\bar{v}_2 a_2\tau}}{ip+\frac{v_0}{a_2\bar{v}_2}}\right\}.$$

Производные $\frac{\partial r_j^{\pm}}{\partial \tau}$, $\frac{\partial p^{\pm}}{\partial \tau}$, пределы $\tau_j^{\pm}$, $\tau^{\mp}$ изменения τ для контуров интегрирования определяются после решения уравнения (5) относительно новой переменной p_j.



Определяя функции F в зависимости от конкретных ядер релаксации, поле напряжений в слое находится суммированием

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{-} + \sigma_{kl}^{+}.$$

Для численной реализации полученного решения выбирались следующие функции релаксации:

$$Q_2(t) = Ae^{-\frac{\beta t}{\tau_0}} \frac{1}{T^{1-\alpha}};$$

$$Q_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} Q_2(t).$$

Вычисления велись в безразмерных параметрах

$$H = \frac{h}{a_2\tau_0};\; P_{kl}^{\pm} = \frac{a_2\tau_0}{P_0}\sigma_{kl}^{\pm};\; T = \frac{t}{\tau_0};\; \eta_0 = \frac{\mu_0}{\mu};\; \varkappa_0 = \frac{a_2}{c_0};\; \varkappa = \frac{a_2}{a_1}$$

с учетом трехкратного прохождения слоя продольных и поперечных волн.

На графике представлены напряжения P_{xx} и P_{xz} для $\eta_0=0{,}5$;

$$\varkappa_0 = 2;\; \varkappa = \frac{2}{3};\; T = 2;\; H = 3;\; \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Поступила 27 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кост М.* Приближенное обращение преобразований Лапласа при анализе вязкоупругих напряжений.— «Ракет. техника и космонавтика», 1964, т. 2, № 12.
2. *Шемякин Е. И.* Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой среде.— «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, № 1.
3. *Шемякин Е. И.* Об одном методе интегрирования граничных нестационарных линейных задач о распространении возмущений в неидеально упругих средах.— ПММ, 1958, т. 22, № 3.
4. *Cagniard L.* Reflection and refraction of progressive seismic wave. Transl. by E. A. Flinn, C. N. Dix. N. Y., McGraw-Hill, 1962.
5. *Chwalczyk F.*, *Rafa J.*, *Wlodarczyk E.* Propagation of two-dimensional non-stationary stress waves in a semi-infinite viscoelastic body, produced by a normal load moving over the surface with subseismic velocity.—«Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci». 1972, vol. 13, N 3, p. 241—257.
6. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоистоизотропных средах, разделенных параллельными плоскостями.— «Учен. зап. ЛГУ», 1952, вып. 25, № 162.