

О ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ

Л. Э. Бар

(Пермь)

Получены интегральные формулы, выражающие теоремы о количестве движения и кинетической энергии для случая наложения вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе. Эти формулы позволяют рассчитать распределение скоростей в сечении трубы при ламинарном, турбулентном и промежуточном режимах течения при наличии в жидкости произвольно распределенных по сечению внутренних источников тепла, а также без них. Выведены интегральные формулы для определения коэффициента сопротивления и теплообмена, также справедливые для всех режимов течения. Общие формулы применяются для расчета конкретных случаев. Рассматривается турбулентная вязкость при наложении вынужденной и свободной конвекции.

Обозначения

$v^{(0)}$ — скорость вынужденной конвекции; r_0 — радиус трубы;
 $v^{(1)}$ — скорость свободной конвекции; $\bar{\nu}_t$ — турбулентная вязкость;
 $\langle v \rangle$ — средняя скорость по сечению трубы; χ_t — турбулентная температуропроводность;
 $T^{(0)}$ — температура при вынужденной конвекции; A — постоянный осевой температурный градиент на стенке трубы;
 $T^{(1)}$ — температура при свободной конвекции; p_0 — осредненное давление, соответствующее постоянной температуре жидкости;
 T_w — температура стенки трубы; z — координата вдоль оси трубы, направленная вверх;
 y — расстояние от стенки трубы;
 y_* — безразмерное расстояние от стенки;
 r — расстояние от оси;
 Q — количество тепла, выделяемое внутренними источниками в единице объема жидкости в единицу времени; R^* — число Рэлея;

$$u^{(0)} \equiv \frac{v^{(0)}}{v_*}, \quad u^{(1)} \equiv \frac{v^{(1)}}{v_*}, \quad v^{(0,1)} = v^{(0)} + v^{(1)}$$

$$u^{(0,1)} \equiv u^{(0)} + u^{(1)}$$

$$w^{(0)} \equiv \frac{v^{(0)}}{\langle v \rangle}, \quad w^{(1)} \equiv \frac{v^{(1)}}{\langle v \rangle}, \quad w^{(0,1)} \equiv w^{(0)} + w^{(1)}$$

$$T^{(0,1)} = T^{(0)} + T^{(1)}$$

$$\theta \equiv \frac{T}{Ar_0}, \quad \xi \equiv \frac{r}{r_0}, \quad \psi \equiv 1 + \frac{\nu_t}{\nu}, \quad \psi_1 \equiv 1 + \frac{\chi_t}{\chi}$$

$$G \equiv \frac{g\beta Ar_0^4}{\nu^2}, \quad P \equiv \frac{\nu}{\chi}, \quad P_t \equiv \frac{\nu_t}{\chi_t}, \quad P_1 \equiv \frac{P}{P_t}$$

$$R^* \equiv GP, \quad R_* \equiv \frac{v_* r_0}{\nu}, \quad R = \frac{\langle v \rangle 2r_0}{\nu}, \quad Q_* = \frac{Q}{\rho_0 C_p A v_*}$$

$$y_* = \frac{v_* y}{\nu} = R_* (1 - \xi), \quad \langle T \rangle - T_w \equiv \left[\int_0^1 (T - T_w) v \xi d\xi \right] \left(\int_0^1 v \xi d\xi \right)^{-1}$$

$$J_1(\xi) \equiv \int_1^\xi u^{(0)} \xi d\xi, \quad J_2(\xi) \equiv \int_0^\xi u^{(0,1)} \xi d\xi, \quad J_3(\xi) \equiv \int_0^\xi (u^{(0,1)} - Q_*) \xi d\xi,$$

$$J_4(\xi, 1) \equiv \int_1^\xi \frac{J_3(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi}, \quad J_5(\xi, 0) \equiv \int_0^\xi \frac{J_3(\xi)}{1 + \chi_t/\chi} \xi d\xi, \quad J_6(\xi) \equiv \int_0^\xi w^{(0,1)} \xi d\xi$$

$$J_7(\xi) \equiv \int_0^\xi (w^{(0,1)} - 1) \xi d\xi, \quad J_8(\xi) \equiv \int_0^\xi u^{(1)} \xi d\xi$$

Средний температурный напор $\langle T \rangle - T_w$. Динамическая скорость v_* определяется из равенства $2\rho_0 v_*^2 / r_0 = -\rho_0 g - \partial p_0 / \partial z$.

1. Уравнения задачи. Турбулентная вязкость. Рассмотрим установившееся турбулентное движение жидкости в вертикальной круглой трубе, температура стенок которой изменяется вдоль длины трубы по линейному закону. Пусть также имеется постоянный вертикальный градиент давления, и в жидкости произвольно по сечению, но осесимметрично, распределены внутренние источники тепла. Жидкость предполагается механически несжимаемой, но термически деформируемой, так что на вынужденное течение накладывается свободная конвекция. Течение предполагается осесимметричным, осредненная скорость — вертикальной.

В принятых предположениях уравнения задачи будут [1,2]

$$\begin{aligned} \nabla(\psi \nabla u) &= -2R_* - (G/R_*)\theta \\ \nabla(\psi_1 \nabla \theta) &= -PR_* Q_* + PR_* u \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнения (1.1) входят четыре неизвестные функции: u , θ , v_t , χ_t . Для их определения двух уравнений (1.1) недостаточно. Поэтому найдем v_t и χ_t путем обработки опытных материалов и из некоторых физических соображений. Граничное условие

$$u = 0 \text{ при } \xi = 1 \quad (1.2)$$

Температура при смешанной конвекции должна отсчитываться от взятой определенным образом средней калориметрической температуры жидкости.

Если функции v_t и χ_t известны, то при помощи уравнений (1.1) могут быть найдены все динамические и тепловые характеристики турбулентной конвекции в вертикальной трубе.

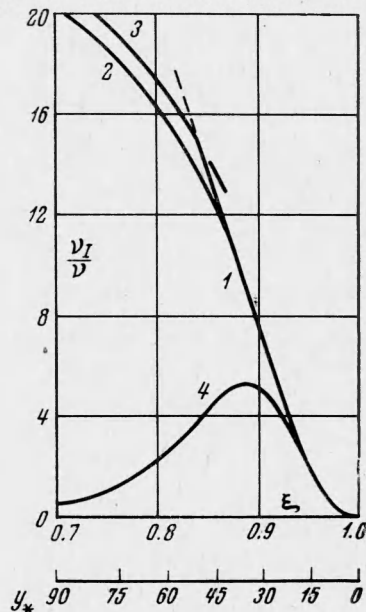
При чисто вынужденной конвекции турбулентная вязкость вблизи стенки трубы хорошо выражается функцией [3]

$$v_t / v = 4.4 \left(\frac{1}{11} y_* - \text{th} \frac{1}{11} y_* \right) \quad (1.3)$$

в ядре потока — функцией

$$v_t / v = \frac{1}{15} R_* (1 - \xi^2) (1 + 2\xi^2) - 1 \quad (1.4)$$

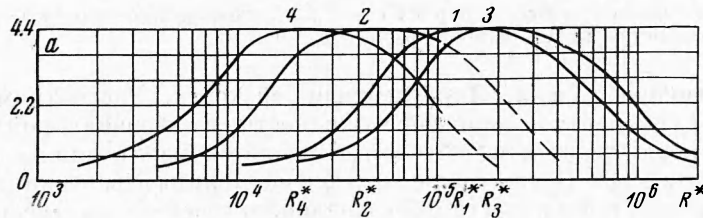
Вблизи стенки (1.4) теряет силу. Заметим, что формулы (1.3), (1.4) отличаются от соответствующих формул, полученных в [3], тем, что для более короткого письма в них подставлено значение κ ($\kappa = 0.4$), и в (1.3) коэффициент 11 вынесен за скобки.



Фиг. 1

В пристеночном слое будем брать ν_t / ν согласно (1.3) до точки сопряжения с (1.4), в ядре потока — согласно (1.4). На фиг. 1 кривые 1, 2, 3 выражают соответственно (1.3) (1.4) и $\nu_t / \nu \neq 1$ при $R_* = 314.25$. Значению параметра $R_* = 314.25$ при чисто вынужденной конвекции соответствует число Рейнольдса, равное $R = 10^4$. Отношение $\nu_t / \chi_t \equiv P_t$ будем считать постоянным.

Сложнее обстоит дело при наложении вынужденной и свободной турбулентной конвекции. Форма профиля скорости оказывает существенное влияние на развитие турбулентных пульсаций, а значит, и турбулентных напряжений в потоке.



Фиг. 2

Как было указано в [1] и как видно из экспериментальных данных [4,5], в случае, когда в пристеночном слое потоки вынужденной и свободной конвекции находятся в противопотоке (случай $R^* < 0$), возникает дополнительное возмущение пристеночного слоя и увеличение турбулентной вязкости в этом слое. Это ведет к возрастанию сопротивления течению и усилению теплопередачи. Напротив, когда потоки в пристеночном слое совпадают (случай $R^* > 0$), турбулентные пульсации, а значит, и турбулентная вязкость в этом слое значительно убывают. Некоторое изменение турбулентной вязкости в ядре течения весьма незначительно влияет на сопротивление и теплопередачу.

Это явление можно назвать эффектом возмущения или стабилизации вязкого пристеночного слоя. Попробуем учесть этот эффект, исходя из следующих соображений. Вблизи стенки добавочная турбулентная вязкость ε / ν должна зависеть от безразмерного расстояния от стенки y_* в четвертой степени [6], вне пристеночного слоя ε / ν должна обращаться в нуль. Этим требованием удовлетворяет функция

$$\varepsilon / \nu = a (1/11 y_*)^4 \exp(-1/11 b y_*) \quad (1.5)$$

Постоянные a и b определяются из экспериментов.

Изучая экспериментальные данные работы [5], можно заметить, что в случае совпадения потоков вынужденной и свободной конвекции у стенки теплопередача постепенно убывает по мере увеличения свободной конвекции, причем наибольшее уменьшение составляет 25—30% и наступает, когда вынужденная и свободная конвекция — величины одного порядка. Этот факт может послужить для определения a и b в (1.5). Если положить $a = -4.4$, $b = 1.4$ и рассчитать теплопередачу, то вычисленное число Нуссельта будет на 25% меньше, чем при $a = 0$.

Когда скорость свободной конвекции на оси трубы одной величины с вынужденной, можно, основываясь на вышеуказанных фактах, с удовлетворительной точностью положить $a = -4.4$, $b = 1.4$, если потоки у стенки совпадают; $a = 4.4$, $b = 1.4$, если потоки у стенки не совпадают. График функции (1.5) при $a = 4.4$, $b = 1.4$ представлен на фиг. 1 кривой 4.

Переменные ξ и y_* связаны зависимостью $y_* = R_* (1 - \xi)$. На фиг. 1, кроме масштаба для ξ , дан дополнительный масштаб для y_* при $R_* = 314.25$.

Как показано ниже (см. п. 3), при $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$, $Q_* = 0$ свободная конвекция на оси трубы одной величины с вынужденной, т. е.

$$|u^{(1)}(0)| = |u^{(0)}(0)|$$

при $R_1^* = 1.1 \cdot 10^5$ и $R_2^* = -4.2 \cdot 10^4$. Если же $Q_* = 0.1 R_*$, то это равенство выполняется при $R_3^* = 1.7 \cdot 10^5$; если $Q_* = -0.1 R_*$, то при $R_4^* = -1.90 \cdot 10^4$. На фиг. 2 построена зависимость коэффициента a от R^* для этих четырех случаев. При этом каждый раз ставилось требование, чтобы $a = 4.4$ для указанных значений R^* и убывало в десять раз, если R^* возрастает или убывает в десять раз. Восходящая ветвь кривой задавалась функцией

$$a = 4.4 \exp[-c_i (R^* - R_i^*)^4] \quad (1.6)$$

и нисходящая ветвь — функцией

$$a = 4.4 \exp[-c_i' (R^* - R_i^*)^2] \quad (1.7)$$

Коэффициенты c_i и c_i' были определены так, чтобы (1.6) и (1.7) удовлетворяли указанным выше требованиям. Выражения (1.6), (1.7) и коэффициенты a и b в (1.5) должны рассматриваться как предварительные, и для их обоснования и уточнения нужны физические эксперименты.

На фиг. 2 кривые построены для значений параметров 1 ($R^* > 0$, $Q_* = 0$) 2 ($R^* < 0$, $Q_* = 0$), 3 ($R^* > 0$, $Q_* = 0.1 R_*$), 4 ($R^* < 0$, $Q_* = -0.1 R_*$).

Во всех случаях $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$.

После того как $u(0)^{(1)}$ и $u(0)^{(0)}$ вычислены с учетом поправки к турбулентной вязкости, следует найти значения R_i^* , а затем определить положение кривых на фиг. 2. Зная R_i^* , будем определять поправку к турбулентной вязкости при помощи (1.5) и выражений (1.6), (1.7). Причем при $R^* > 0$, $Q_* = 0$ коэффициент $a < 0$; при $R^* < 0$, $Q_* = 0$ коэффициент $a > 0$. При $Q_* \neq 0$ следует пользоваться более общим правилом: если потоки вынужденной и свободной конвекции у стенки совпадают, то $a < 0$; если потоки у стенки находятся в противотоке, то $a > 0$.

Уравнения (1.1) относятся к типу слабонелинейных. Нелинейность вносится коэффициентами турбулентного переноса. Принцип суперпозиции решений однородного и неоднородного уравнений, или свободной и вынужденной конвекции, применим к ним только с некоторой оговоркой. Ниже этот принцип использован при решении поставленной задачи. Тем самым в решение вносится некоторая малая погрешность.

2. Теоремы о количестве движения и кинетической энергии. Выведем интегральные зависимости, выражающие теоремы о количестве движения и кинетической энергии при наложении турбулентной вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе.

Интегрируя первое из уравнений (1.1) от нуля до ξ и имея в виду, что температура в (1.1) должна отсчитываться от средней температуры, найдем распределение касательных напряжений на расстоянии ξ от оси

$$\frac{\tau}{\rho_0} = - \left(g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \frac{r_0}{2} \xi + \frac{G v^2}{r_0^2 \xi} \int_0^\xi (\theta^{(0,1)} - \langle \theta \rangle) \xi d\xi \quad (2.1)$$

При помощи второго из уравнений (1.1) найдем температуру жидкости, отсчитанную от температуры стенки на расстоянии ξ от оси

$$\theta^{(0,1)} - \theta_w = P R_* J_4(\xi, 1) \quad (2.2)$$

С учетом (2.2) можно (2.1) привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho_0} = & - \left(g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \frac{r_0}{2} \xi - \frac{G v^2}{2 r_0^2} (\langle \theta \rangle - \theta_w) \xi + \\ & + \frac{G P v v_* \xi}{2 r_0} J_4(\xi, 1) - \frac{G P v v_*}{2 r_0 \xi} J_5(\xi, 0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в соотношение

$$\frac{\tau}{\rho_0} = - \frac{v}{r_0} \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{dv}{d\xi} \quad (2.4)$$

и выполняя ряд преобразований, в том числе интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0) = & - \left[\left(g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \frac{r_0^2}{2 v v_*} + \frac{G P \chi (\langle \theta \rangle - \theta_w)}{2 r_0 v_*} \right] \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{1 + v_t/v} - \\ & - \frac{G P}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi \frac{\xi d\xi}{1 + v_t/v} - \int_1^\xi \frac{d\xi}{(1 + v_t/v) \xi} \right] \frac{J_3(\xi) \xi d\xi}{(1 + \chi_t/\chi)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полагая в (2.5) $G = 0$, найдем значение скорости при вынужденной конвекции на оси трубы

$$u^{(0)}(0) = R_* \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{1 + v_t/v} \quad (2.6)$$

Здесь учтено равенство

$$-\left(g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) = \frac{2v_*^2}{r_0} \quad (2.7)$$

Анализ показал, что при принятых допущениях свободная конвекция не будет создавать расхода жидкости через сечение трубы, если температура отсчитывается от средней температуры, определяемой равенством

$$\langle \theta^{(0,1)} \rangle - \theta_w = \left[\int_0^1 (\theta^{(0,1)} - \theta_w) v^{(0)} \xi d\xi \right] \left(\int_0^1 v^{(0)} \xi d\xi \right)^{-1} \quad (2.8)$$

Вычитая (2.6) из (2.5) и подставляя значение $\langle \theta \rangle - \theta_w$ согласно (2.8), предварительно подвергнув (2.8) ряду преобразований с использованием второго из уравнений (1.1), будем иметь

$$u^{(1)}(0) = GP \sqrt{\frac{f}{8}} \int_0^1 \frac{J_1(\xi) J_3(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{1 + v_t/v} - \\ - \frac{GP}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi \frac{\xi d\xi}{1 + v_t/v} - \int_1^\xi \frac{d\xi}{(1 + v_t/v) \xi} \right] \frac{J_3(\xi) \xi d\xi}{(1 + \chi_t/\chi)} \quad (2.9)$$

Интегральная зависимость (2.5) выражает теорему о количестве движения. Уравнение (2.9), так же как и (2.5), справедливо для ламинарного, турбулентного и промежуточного режимов течения при наличии в жидкости внутренних источников тепла и без них, т. е. для всех режимов течения, при которых верны уравнения (1.1).

Умножим первое из уравнений (1.1) на $v^{(0,1)} \xi d\xi$ и проинтегрируем его по ξ от нуля до единицы, тогда с учетом соотношений

$$\int_0^1 v^{(1)} \xi d\xi = 0, \quad \langle v \rangle = 2 \int_0^1 v^{(0)} \xi d\xi, \quad \int_0^1 v^{(0)} (\theta^{(0,1)} - \langle \theta \rangle) \xi d\xi = 0 \quad (2.10)$$

и (2.7) будем иметь

$$\frac{1}{2} R_* R + G \int_0^1 (\theta^{(0,1)} - \langle \theta \rangle) u^{(1)} \xi d\xi - R_* \int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \left(\frac{du^{(0,1)}}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi = 0 \quad (2.11)$$

Последнее из соотношений (2.10) легко получить из (2.8).

Подстановка (2.2) в (2.11) и выполнение ряда преобразований дает

$$\frac{R}{2} - GP \int_0^1 \frac{J_3(\xi) J_3(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} - \int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \left(\frac{du^{(0,1)}}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi = 0 \quad (2.12)$$

Интегральная зависимость (2.12), так же как и (2.5), справедлива при всех режимах течения, при которых верны уравнения (1.1). Члены уравнения (2.12) с точностью до постоянного множителя выражают работу сил внешнего давления, архимедовой подъемной силы и сил вязкости соответственно.

При чисто вынужденной конвекции (2.12) принимает вид

$$\frac{R}{2} - \int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \left(\frac{du^{(0)}}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi = 0 \quad (2.13)$$

Вычитая (2.13) из (2.12) и учитывая, что

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \frac{du^{(0)}}{d\xi} \frac{du^{(1)}}{d\xi} \xi d\xi = 0$$

найдем

$$-GP \int_0^1 \frac{J_8(\xi) J_3(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} - \int_0^1 \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \left(\frac{du^{(1)}}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi = 0 \quad (2.14)$$

3. Распределение скоростей. Применим выведенные выше интегральные зависимости для определения скорости при наложении вынужденной и свободной конвекций. Предварительно найдем скорость при вынужденной конвекции.

Если на вынужденное движение накладывается свободное, то турбулентная вязкость изменяется, поэтому изменяется и величина скорости. Например, $u^0(0) = 20$ при $R_* = 314.25$ ($R = 10^4$). Если же в (1.5) положить $a = -4.4$, $b = 1.4$ и выполнить соответствующие вычисления, то получим $u^{(0)}(0) = 35.0$, каковое значение на 75% больше прежнего. Если же взять $a = 4.4$, $b = 1.4$, то получим $u^{(0)}(0) = 16.0$, т. е. на 20% меньше.

Логарифмические формулы, а также закон одной седьмой, хорошо представляющие распределение скорости в ядре турбулентного потока в трубе, теряют силу вблизи стенки. Формула, определенная в [3], верная во всем сечении трубы, громоздка и потому не совсем удобна в обращении. Ниже получена простая и удобная формула, хорошо представляющая распределение скоростей во всем сечении трубы, включая непосредственное соседство со стенкой, и удовлетворяющая граничному условию на стенке.

Будем искать профиль скорости в трубе при турбулентном режиме течения в виде

$$u^{(0)} = a_1 \left[(1 - \xi^n) + \frac{1}{3} (1 - \xi^2) \right] \quad (3.1)$$

где n и a_1 — неопределенные коэффициенты. Для определения n вычислим среднюю по сечению скорость $\langle v \rangle$ и касательное напряжение на стенке τ_w с использованием (3.1) и подставим в выражение для коэффициента сопротивления $f \equiv 8\tau_w / \rho \langle v \rangle^2$. С другой стороны, значение коэффициента сопротивления может быть найдено согласно эмпирической формуле Блазиуса

$$f = 0.316 R^{-1/4} \quad (2.3 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^5) \quad (3.2)$$

или пригодной для широкого интервала чисел Рейнольдса формуле Филоненко [7]

$$f = (1.82 \lg R - 1.64)^{-2} \quad (3.3)$$

Приравнявая эти значения для коэффициента сопротивления, найдем

$$n = 1/6 [(7k - 8) \pm \sqrt{(7k - 4)^2 - 32k}] \quad (3.4)$$

Здесь

$$k = 0.00988 R^{3/4}, \quad \text{или} \quad k = 1/32 R (1.82 \lg R - 1.64)^{-2} \quad (3.5)$$

соответственно для f — согласно (3.2) и для f — согласно (3.3).

Заметим, что если турбулентная вязкость в трубе известна, то нет необходимости пользоваться эмпирическими данными для f . Коэффициент сопротивления может быть определен по выведенной ниже формуле (см. п. 4).

Для определения a_1 может послужить зависимость (2.6); $u_{\max}^{(0)}$ определим из (2.6), a_1 найдем согласно равенству

$$4/3 a_1 = u_{\max}^{(0)} \quad (3.6)$$

Как показывают расчеты по теплообмену, (3.1) почти не уступает по точности формуле из [3].

Из (3.4) следует, что если $R = 10^4$, то $n = 20.6$; если $R = 2.5 \cdot 10^4$, то $n = 43$; если $R = 10^5$, то $n = 128$.

Найдем распределение скорости при наложении ламинарной вынужденной и свободной конвекций. Функции, в виде которых ищем решение, должны удовлетворять граничному условию прилипания жидкости на стенке и условию замкнутости потока свободной конвекции. Возьмем в качестве аппроксимирующей функции

$$u^{(1)} = A_1 (1 - \xi^2) (1 - 3\xi^2) + A_2 (1 - \xi^{10}) (1 - 7/3 \xi^2) \quad (3.7)$$

Здесь A_1 и A_2 — неизвестные коэффициенты. Функцию (3.7) и

$$u^{(0)} = 1/2 R_* (1 - \xi^2) \quad (3.8)$$

подставим в (2.9) и (2.14), положив в них $v_t/v = 0$, и из этих двух уравнений найдем A_1 и A_2 . В результате таких вычислений было установлено, что коэффициент A_1 должен быть найден из квадратного уравнения относительно A_1 , в которое входят параметры GP , Q_* , R_* . После этого A_2 определяется из линейного уравнения. Так как уравнение для определения A_1 — квадратное, то для заданных параметров GP и Q_* получим два значения A_1 , а затем найдем два значения A_2 . При этом одна пара коэффициентов A_1 и A_2 (будем ее называть основной) дает практически полное согласие с точным решением [8, 9]. Вторая пара (побочная) дает плохое согласие с решением [8, 9]. Из двух коэффициентов A_1 в качестве основного следует брать наименьший по модулю. Сравнение с точным решением при значениях параметров $-100 \leq R_* \leq 10^4$,

$$Q_* = 0, \quad Q_* = 1/4 R_*, \quad Q_* = 1/40 R_*, \quad Q_* = 5/2 R_*$$

показывает, что наибольшее отклонение от точного не превышает 0.5%. В большинстве же случаев отклонение гораздо меньше.

Убедившись в эффективности метода решения, найдем скорость при наложении турбулентной вынужденной и свободной конвекций. Приближающая функция для турбулентной свободной конвекции должна удовлетворять граничному условию, условию замкнутости потока свободной конвекции, а также отражать факт наличия большого градиента скорости у стенки. Положим

$$u^{(1)} = A_1 (1 - \xi^{30}) (1 - 17/8 \xi^2) \quad (3.9)$$

В качестве $u^{(0)}$ использована формула (3.1). Коэффициент сопротивления f был определен по выведенной ниже формуле (см. п. 4). Входящие в (2.9) и (2.14) интегралы были вычислены путем численного интегрирования с учетом (1.3) и (1.4). Результаты вычислений следующие.

При $R_* = 314.25$, $P_t = 1$, $P = 1$ было вычислено $u^{(1)}(0) = A_1$ при помощи (2.9) и (2.14). Формулы оказались однотипными, коэффициенты в них отличаются не более 5%. Взято среднее арифметическое значение этих коэффициентов. Таким путем было найдено

$$A_1 = \frac{(-3.20 \cdot 10^{-4} + 1.80 \cdot 10^{-5} Q_*) GP}{0.7 \cdot 10^{-5} GP + 1} \quad (3.10)$$

До сих пор не учитывался эффект возмущения или стабилизации пристеночного слоя. Учтем его теперь. Коэффициент A_1 вычислен с использованием (2.9), (2.14), (1.3), (1.4), (1.5) при $R_* = 314.25$, $P_t = 1$, $P = 1$, $a = 4.4$, $b = 1.4$

$$A_1 = \frac{(-2.10 \cdot 10^{-4} + 1.35 \cdot 10^{-5} Q_*) GP}{0.6 \cdot 10^{-5} GP + 1} \quad (3.11)$$

При $R_* = 314.25$, $P_t = 1$, $P = 1$, $a = -4.4$, $b = 1.4$ имеем

$$A_1 = \frac{(-6.20 \cdot 10^{-4} + 2.60 \cdot 10^{-5} Q_*) GP}{0.8 \cdot 10^{-5} GP + 1} \quad (3.12)$$

Формулы (3.11), (3.12) верны лишь для определенных значений числа R_* , так как каждому R_* соответствует определенное a (фиг. 2). Для других a были выполнены аналогичные вычисления и получены подобные формулы, тоже верные для определенных R_* . Таким путем находим ряд значений A_1 в зависимости от R_* . На фиг. 3 приведена зависимость $A_1 = A_1(R_*)$ для разных комбинаций значений параметров

$$\begin{array}{lll} 1 \ (R_* > 0, Q_* = 0, a = 0), & 2 \ (R_* < 0, Q_* = 0, a = 0) \\ 3 \ (R_* > 0, Q_* = 0, a < 0), & 4 \ (R_* < 0, Q_* = 0, a > 0) \\ 5 \ (R_* > 0, Q_* = 0.1 R_*, a = 0), & 6 \ (R_* < 0, Q_* = -0.1 R_*, a = 0) \\ 7 \ (R_* > 0, Q_* = 0.1 R_*, a > 0), & 8 \ (R_* < 0, Q_* = -0.1 R_*, a > 0) \end{array}$$

Учитывалась зависимость a от R_* согласно фиг. 2. Во всех случаях $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$. При выводе (3.10) — (3.12) было принято $Q_* = \text{const}$.

4. Закон сопротивления. Определим закон сопротивления при наложении вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе. Средняя по сечению трубы скорость будет

$$\langle v \rangle = 2 \int_0^1 v^{(0,1)} \xi d\xi \quad (4.1)$$

Выполняя ряд преобразований с учетом равенств (2.4), (2.7), а также первого из равенств (2.10), найдем

$$\langle v \rangle = -\frac{r_0^2}{2\nu\rho_0} \left(\rho_0 g + \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \int_0^1 \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \nu_t/\nu} \quad (4.2)$$

Согласно определению коэффициента сопротивления, имеем

$$f \equiv -\frac{2r_0}{1/2\rho_0 \langle v \rangle^2} \left(\rho_0 g + \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \quad (4.3)$$

Исключая из (4.2) и (4.3) множитель в круглых скобках, получим

$$\frac{1}{f} = \frac{R}{16} \int_0^1 \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \nu_t/\nu} \quad (4.4)$$

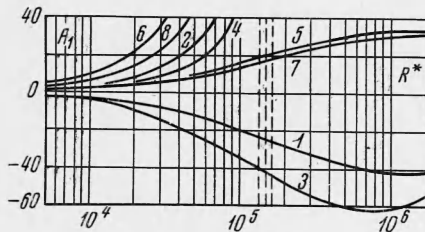
Из (4.3) и (2.7) следует

$$R_* = R \sqrt{1/32f} \quad (4.5)$$

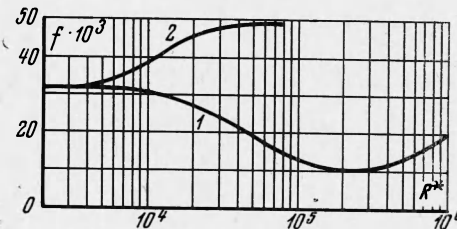
Если из (4.4) и (4.5) исключить число Рейнольдса R , то найдем

$$f = 8 / J^2 R_*^2 \quad (4.6)$$

где через J обозначен входящий в (4.4) интеграл. Если параметр R_* или $(\rho_0 g + \partial p_0 / \partial z)$ задан, то следует путем численного интегрирования найти интеграл J , а затем, согласно (4.6), отыскать f . После того как J и f найдены, можно определить R согласно (4.4) или (4.5).



Фиг. 3



Фиг. 4

Равенство (4.4) справедливо при ламинарном, турбулентном и промежуточном режимах течения. При ламинарном течении из (4.4) вытекает формула Пуазейля

$$1/f = 1/64 R \quad (4.7)$$

Были вычислены f и R при $R_* = 314.25$ с использованием (1.3) и (1.4) и найдено, что $f = 0.0316$, $R = 10^4$. Если же учесть эффект возмущения или стабилизации пристеночного слоя согласно (1.5), то при $R_* = 314.25$, $a = 4.4$, $b = 1.4$ будем иметь $f = 0.0495$, $R = 8000$, т. е. в этом случае R на 20% меньше, чем при $a = 0$. При том же R_* и $a = -4.4$, $b = 1.4$ вычисления дают: $f = 0.0102$, $R = 17600$, т. е. R увеличилось на 76%.

Таким образом, свободная конвекция влияет на сопротивление через эффект возмущения или стабилизации пристеночного слоя, и это влияние довольно значительно. При турбулентном течении в вертикальной трубе, нагревая или охлаждая стенки, можно регулировать сопротивление.

На фиг. 4 приведена зависимость f от R_* при $R_* = 314.25$, $Q_* = 0$ с учетом (1.3), (1.4), (1.5) и фиг. 2. Кривая 1 — для $R_* > 0$, кривая 2 — для $R_* < 0$.

5. Теплообмен в случае отсутствия внутренних источников тепла. Рассчитаем теплообмен при наложении турбулентной вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе в случае отсутствия в жидкости внутренних источников тепла.

По определению, число Нуссельта равно

$$N \equiv \frac{2r_0 q_w}{\lambda (\langle T \rangle - T_w)} \quad (5.1)$$

При помощи второго из уравнений (1.1) найдем плотность теплового потока на стенке q_w при $Q_* = 0$

$$q_w = -\frac{1}{2} \rho C_p A r_0 \langle v \rangle \quad (5.2)$$

Подставляя в (5.1) равенство (5.2) и выражение для средней по тепло-содержанию температуры

$$\langle T \rangle - T_w = 2 \int_0^1 (T - T_w) w^{(0,1)} \xi d\xi \quad (5.3)$$

а также учитывая зависимость

$$v_* = \langle v \rangle \sqrt{f/8} \quad (5.4)$$

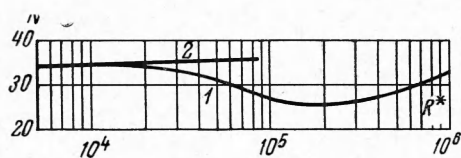
получим

$$\frac{1}{N} = 2 \int_0^1 \frac{J_8^2(\xi) d\xi}{(1 + P_1 v_t / v) \xi}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{N} = \frac{f}{4} \int_0^1 \frac{J_8^2(\xi) d\xi}{(1 + P_1 v_t / v) \xi} \quad (5.5)$$

Равенство (5.5) справедливо при всех режимах течения, при которых верны уравнения (1.1) в случае $Q_* = 0$.

При помощи (5.5) можно установить, как влияет на теплопередачу свободное движение, накладывающееся на вынужденное. Рассмотрим сначала наложение ламинарной вынужденной и свободной конвекций.

Если потоки вынужденной и свободной конвекций у стенки находятся в противотоке ($R^* < 0$), то средняя температура жидкости увеличивается (в формуле (5.5) в этом случае $J_8(\xi) > 0$), что, как видно из (5.1), ведет к уменьшению числа N . Если потоки у стенки совпадают ($R^* > 0$), то средняя температура жидкости уменьшается (в (5.5) $J_8(\xi) < 0$), что ведет к увеличению числа N . В то же время свободная конвекция, накладывающаяся на вынужденную, при принятых допущениях (осредненная скорость параллельна оси трубы, на стенках поддерживается постоянный вертикальный градиент температуры) не влияет на



Фиг. 5

плотность теплового потока на стенке. Это видно хотя бы из (5.2) (см. также [8], гл. 3, § 5).

Вычислена согласно (5.5) зависимость числа Нуссельта N от числа Релея R^* при $R^* > 0$ и $R^* < 0$. При этом использована формула $f = 64 R^{-1}$ или следующее из нее и (5.4) соотношение $2R = R_*^2$, справедливое при ламинарном вынужденном течении, а также наложении ламинарного вынужденного и свободного течения (п. 4). Вычисленная таким образом зависимость N от R^* практически полностью совпадает с таковой, определенной в работах [9, 10]. Кривые, представляющие эту зависимость при $R^* > 0$ и $R^* < 0$, находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными, приведенными в [9, 10].

При турбулентном движении, как видно из (5.5), свободная конвекция влияет на теплопередачу двояко.

Если потоки вынужденной и свободной конвекции у стенки находятся в противотоке ($R^* < 0$), то турбулентная вязкость у стенки возрастает, что усиливает теплопередачу. С другой стороны, в этом случае средняя температура жидкости увеличивается, что ведет к уменьшению числа N . Который из этих факторов преобладает, должен показать расчет или эксперимент.

Если потоки у стенки совпадают ($R^* > 0$), то турбулентная вязкость у стенки уменьшается, N тоже убывает. Но в этом случае средняя температура жидкости уменьшается, что ведет к увеличению N .

Вычислено число Нуссельта при $R_* = 314.25$, $P_t = 1$, $P = 1$, $b = 1.4$, $a = 4.4$ (потоки у стенки в противотоке). Результат следующий: $N = 34.9$, т. е. на 1% больше, чем при $a = 0$. При $R_* = 314.25$, $P_t = 1$, $P = 1$, $b = 1.4$, $a = -4.4$ (потоки у стенки совпадают) число $N = 25.9$, т. е. на 25% меньше, чем при $a = 0$.

На фиг. 5 представлен график зависимости N от R^* ; кривая 1 — для случая $R^* > 0$ и кривая 2 для $R^* < 0$. Расчеты выполнены с учетом (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) и (1.7).

Сравнивая теплообмен при ламинарном и турбулентном режимах течения, легко увидеть, что в случае $R^* > 0$ при ламинарном движении свободная конвекция усиливает теплопередачу, а при турбулентном — уменьшает ее. В случае $R^* < 0$ при ламинарном движении свободная конвекция уменьшает теплопередачу, а при турбулентном — наоборот. Это объясняется тем, что при ламинарном движении со стороны свободной конвекции на теплопередачу влияет один фактор, а при турбулентном — прибавляется второй (эффект возмущения или стабилизации пристеночного слоя), причем второй преобладает.

При значениях параметра R_* , больших 314.25, свободная конвекция будет сравнимой с вынужденной при значениях числа Рэлея, больших, чем в случае $R_* = 314.25$. Поэтому при R_* , больших 314.25, кривые $N = N(R^*)$ на фиг. 5, аналогичные изображенной, будут смещены вверх и вправо.

6. Теплообмен при наличии внутренних источников тепла. В работе [11] интегральное соотношение Лайона, позволяющее рассчитать теплообмен при отсутствии в жидкости внутренних источников тепла, обобщено на случай наличия в жидкости таких источников. При этом течение жидкости в трубе предполагалось чисто вынужденным. Обобщим названные интегральные соотношения для наложения вынужденной и свободной конвекций в вертикальной трубе.

Интегрируя уравнение энергии — второе из уравнений (1.4) — в случае равномерно распределенных в жидкости внутренних источников тепла мощности Q и постоянной плотности теплового потока на стенке q_w , найдем

$$T - T_w = -\frac{2q_w r_0}{\lambda} \int_1^{\xi} \frac{J_6(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} + \frac{Q r_0^2}{\lambda} \int_1^{\xi} \frac{J_7(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad (6.1)$$

Подставляя (6.1) в выражение для средней по теплосодержанию температуры (5.3) и выполняя ряд преобразований, получим

$$\langle T \rangle - T_w = \frac{4q_w r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{J_6^2(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} - \frac{2Q r_0^2}{\lambda} \int_0^1 \frac{J_6(\xi) J_7(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad (6.2)$$

Положим в (6.2) $q_w = 0$, тогда будем иметь

$$\langle T \rangle - T_{aw} = -\frac{2Q r_0^2}{\lambda} \int_0^1 \frac{J_6(\xi) J_7(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad (6.3)$$

где через T_{aw} обозначена адиабатическая температура стенки.

Если считать плотность внутренних источников тепла произвольной по сечению трубы, то аналогичные вычисления дают

$$\langle T \rangle - T_{aw} = -\frac{2r_0^2}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} J_6^2(\xi) \left[2J_6(\xi) \int_0^1 Q \xi d\xi - \int_0^1 Q \xi d\xi \right] d\xi \quad (6.4)$$

Вычтем теперь (6.2) из (6.3)

$$T_w - T_{aw} = -\frac{4q_w r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{J_6^2(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad (6.5)$$

Из (6.5) видно, что при наличии в жидкости внутренних источников тепла плотность потока тепла на стенке q_w пропорциональна разности температур $(T_{aw} - T_w)$, а не разности $\langle T \rangle - T_w$, как это бывает в случае отсутствия источников. Из (6.5) имеем

$$\frac{1}{N^*} = 2 \int_0^1 \frac{J_6^2(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi}, \quad N^* \equiv \frac{q_w^2 r_0}{(T_{aw} - T_w) \lambda} \quad (6.6)$$

Здесь N^* — число Нуссельта.

Если коэффициент теплообмена α отнести, как обычно, к разности температур $(\langle T \rangle - T_w)$, то число Нуссельта будет

$$\frac{1}{N} = 2 \int_0^1 \frac{J_6^2(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} - 2z_1 \int_0^1 \frac{J_6(\xi) J_7(\xi) d\xi}{(1 + \chi_t/\chi) \xi} \quad \left(z_1 = \frac{Qr_0}{2q_w} \right) \quad (6.7)$$

Здесь z_1 — относительная плотность внутренних источников тепла.

При некотором значении z_1 число Нуссельта, определяемое из (6.7), обращается в бесконечность. Поэтому в случае наличия в жидкости внутренних источников тепла теплообмен характеризуется не числом N , а отношением [11]

$$-\frac{(T_{aw} - \langle T \rangle)}{(T_{aw} - T_w)} = z_1 N_0 \Delta T_a, \quad \Delta T_a = \frac{\lambda}{Qr_0^2} (\langle T \rangle - T_{aw}) \quad (6.8)$$

Здесь ΔT_a — безразмерная разность между средней калориметрической температурой жидкости и адиабатической температурой стенки; N_0 — число Нуссельта для течения без внутренних источников. В работе [11] рассчитана зависимость этой величины от чисел Рейнольдса и Прандтля при чисто вынужденном турбулентном движении. Ниже приведены результаты вычислений зависимости этой величины от числа Рэлея при наложении вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе.

На фиг. 6 представлена зависимость

$$C \equiv -\frac{(T_{aw} - \langle T \rangle)}{(T_{aw} - T_w) Z_1} \quad (6.9)$$

от R^* при наложении ламинарной вынужденной и свободной конвекции в вертикальной трубе при $Q_* = \pm 1/4 R_*$; кривая 1 ($R^* > 0$, $Q_* = 1/4 R_*$) и кривая 2 ($R^* < 0$, $Q_* = -1/4 R_*$). Заметим, что $Q_* < 0$ при $R^* < 0$, хотя источники тепла положительные ($Q > 0$). При $R^* \rightarrow 0$ величина C стремится к своему предельному значению $C = 3/11$, соответствующему чисто вынужденному ламинарному течению. Поскольку Q_* уже задано, то z_1 должно быть определено из зависимости

$$z_1 / (z_1 - 1) = Q_* \sqrt{1/8 f} \quad (6.10)$$

При выводе (6.10) использовано (6.11). Зависимость (6.10) применима как к ламинарному, так и турбулентному движениям.

При наложении вынужденной и свободной конвекции, в отличие от чисто вынужденной конвекции, плотность источников Q_* должна быть задана заранее, чтобы было возможно найти коэффициенты в выражении для свободной конвекции.

Величина C равна отношению интегралов, входящих в выражение (6.7). При наложении турбулентной вынужденной и свободной конвекции на величину C влияют те же два фактора, которые влияют на величину N в случае отсутствия внутренних источников. Если плотность источников тепла положительна и достаточно велика (например, $Q_* = 0.1 R_*$), то в средней части трубы жидкость будет теплее, чем у стенки, и потому при $\beta > 0$ свободная конвекция направлена в средней части трубы вверх, а у стенки — книзу независимо от знака числа Рэлея. Если при этом вынужденное течение жидкости направлено вверх ($\langle v \rangle > 0$), то у стенки потоки будут в противотоке. Это легко увидеть из выражения (3.10), а также фиг. 3.

С учетом поправки к турбулентной вязкости, в соответствии с (1.5) — (1.7), были вычислены f , R , a_1 , n и A_1 согласно соответствующим формулам, а затем величина C согласно (6.9) для значений параметров $P = 1$, $P_t = 1$, $R_* = 314.25$, $Q_* = \pm 0.1 R_*$. На фиг. 7 изображена вычисленная зависимость C от R^* . Кривая 1 — при $R^* > 0$ и $Q_* = 0.1 R_*$; кривая 2 — при $R^* < 0$, $Q_* = -0.1 R_*$. В обоих случаях потоки у стенки находятся в противотоке, поэтому в обоих случаях $a > 0$ в выражении (1.5).

Найдем плотность внутренних источников тепла в потоке, при которой жидкость течет через трубу без теплопередачи — стенки теплоизолированы. В этом случае количество тепла, генерируемое внутренними источниками тепла в единице объема жидкости, равно количеству тепла, уносимому потоком от единицы объема.

Интегрирование уравнения энергии при $Q = \text{const}$ дает

$$\frac{1}{2} \rho c_p A r_0 \langle v \rangle = -q_w + \frac{1}{2} Q r_0 \quad (6.11)$$

Полагая $q_w = 0$ и учитывая (5.4), найдем

$$Q_* = \sqrt{8/f} \quad (6.12)$$

Коэффициент сопротивления f должен быть найден по формуле (4.6).

При ламинарном течении — вынужденной конвекции или наложении вынужденной и свободной конвекции — справедливо (4.7). Тогда (6.12) дает

$$Q_* = \sqrt{1/8} \bar{R} = 1/4 R_* \quad (6.13)$$

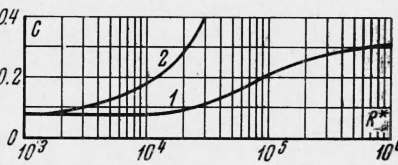
При турбулентном вынужденном течении для $R_* = 314.25$, согласно (4.6), имеем $f = 0.0316$, и при помощи (6.12) находим: $Q_* = 15.9$, т. е. примерно $R_*/19.75$.

Таким образом, последовательность действий при решении поставленной задачи следующая. По заданному значению dp_0/dz находим $\bar{R}_*$ согласно выражению (2.7). При помощи параметра R_* находим f и R согласно формулам (4.4) — (4.6) и $u^{(0)}(0)$ — по формуле (2.6). По найденному значению числа Рейнольдса R определяем показатель n согласно (3.4). Зная $u^{(0)}(0)$, вычисляем a_1 из (3.6).

По заданным параметрам P , P_t и R_* находим при помощи интегральных зависимостей (2.9) или (2.14) коэффициент A_1 , т. е. выражение вида (3.10). Находим поправку к турбулентной вязкости, связанную с эффектом возмущения или стабилизации вязкого пристенного слоя, при помощи (1.5) при каком-либо a , например $a = 4.4$. При помощи этой поправки снова находим f , R , a_1 , n согласно указанным выше формулам и вычисляем выражения вида (3.11), каждое из которых верно только для определенного значения R^* , так как каждому R^* соответствует определенное a . При помощи выражения вида (3.11) при заданном Q_* определяем значение числа Рэлея R_i^* , при котором свободная конвекция — одной величины с вынужденной, т. е. $|u^{(1)}(0)| = |u^{(0)}(0)|$; определяем положение кривых на фиг. 2. Таким путем находим ряд значений A_1 в зависимости от R^* .

Для определения теплообмена в случае отсутствия внутренних источников тепла вычисляем интеграл (5.5) с учетом поправки к турбулентной вязкости. В случае наличия внутренних источников необходимо также предварительно найти по заданным P , P_t , R_* и Q_* поправку к турбулентной вязкости, как и в случае $Q_* = 0$; затем величину C , характеризующую теплообмен в случае $Q_* \neq 0$, находим согласно (6.9).

Автор благодарит Г. А. Остроумова, Е. М. Жуховицкого и Б. С. Петухова за обсуждение работы.



Фиг. 7

Поступила 1 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Бэр Л. Э. Решение задачи о суперпозиции турбулентной вынужденной и свободной тепловой конвекции в вертикальной трубе при наличии в жидкости внутренних источников тепла. Изв. АН СССР. ОН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
- Бэр Л. Э. О решении уравнений смешанной турбулентной конвекции в вертикальной трубе. Изв. АН СССР. ОН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
- Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. Z. angew. Math. und Mech., 1951, v. 31, S. 208.
- Петухов Б. С. и Нольде Л. Д. Теплообмен при вязкостногравитационном течении жидкости в трубах. Теплоэнергетика, 1959, № 1.
- Eckert F. R. G., Diaguila A. I. Convective heat transfer for mixed, free and forced flow through tubes. Trans. ASME, 1954, vol. 76, No. 4.
- Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
- Филоненко Г. К. Гидравлическое сопротивление трубопроводов. Теплоэнергетика, 1954, № 4.
- Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Гостехиздат, 1952.
- Hallman T. M. Combined forced and freelaminar heat transfer in vertical tubes with uniform internal heat generation. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 8.
- Brown W. G. Die Überlagerung von erzwungener und natürlicher Konvektion in senkrechten Röhren... «VDJ — Forschungsheft», 1960, No. 480.
- Петухов Б. С., Генин Л. Г., Мальтер В. Л. Теплообмен в трубах при наличии в потоке жидкости внутренних источников тепла. Инж.-физ. ж., 1960, т. 3, № 9.