

- и уточнении интерполяционных формул максвелловской вязкости. — ПМТФ, 1975, № 5.
3. Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И. Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций. — ПМТФ, 1974, № 2.
 4. Годунов С. К., Козин Н. С. Структура ударных волн с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества. — ПМТФ, 1974, № 5.
 5. Дерибас А. А., Захаров В. С., Соболенко Т. М., Тесленко Т. С. О переносе поверхностного рельефа в металлах ударными волнами. — ФГВ, 1974, № 6.

УДК 539.373

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТОЧЕЧНЫМИ МАКСВЕЛЛОВСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

С. К. Годунов, Н. Н. Сергеев-Альбов

(Новосибирск)

1. Общее решение. Соотношения на характеристике. Изучаемая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho_0 U \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \\
 & \rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \\
 & U \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
 & U \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
 & U \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\
 & U \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \rho_0 b_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

где σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} — компоненты тензора напряжений; $u + U$ — горизонтальная компонента вектора скорости перемещения точек среды ($U < b_0 < c_0$, $u \ll U$); v — вертикальная компонента вектора скорости перемещения точек среды; ρ_0 — плотность среды; c_0 — продольная скорость звука; b_0 — поперечная скорость звука.

Систему (1.1) можно преобразовать таким образом, что для четырех функций $\sigma_{11}(x, y)$, $\sigma_{22}(x, y)$, $\sigma_{33}(x, y)$, $\sigma_{12}(x, y)$ получается система

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = \rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = \frac{\rho_0 (c_0^2 U^2 - 4b_0^2 c_0^2 + 4b_0^4)}{c_0^2 U} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\rho_0 b_0^2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} - \frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial x},
 \end{aligned}$$

которую надо дополнить соотношениями на двукратных характеристиках $y = \text{const}$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{11} - \frac{4\rho_0 b_0^2}{U} \left(\frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2} \right) u - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) \sigma_{22} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{33} - \frac{2\rho_0 b_0^2}{U} \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) u - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) \sigma_{22} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Система (1.2) эллиптического вида, ее общее решение представляется через две аналитические функции $F(z_1)$ и $P(z_2)$ аргументов z_1 и z_2 , где $z_1 = x + i\omega_1 y$; $z_2 = x + i\omega_2 y$;

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \frac{U^2}{c_0^2}}; \quad \omega_2 = \sqrt{1 - \frac{U^2}{b_0^2}}.$$

Вещественная и мнимая части функций

$$F(z_1) = f(x, y) + ig(x, y), \quad P(z_2) = p(x, y) + iq(x, y)$$

связаны соотношениями типа Коши — Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\omega_1 \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\omega_2 \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Решение (1.2) имеет вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{22}(x, y) &= -\text{Im} \left\{ \frac{1 + \omega_2^2}{2\omega_1} F(z_1) + \frac{2\omega_2}{1 + \omega_2^2} P(z_2) \right\}, \\ \sigma_{12}(x, y) &= \text{Re} \{ F(z_1) + P(z_2) \}, \\ u(x, y) &= \frac{U}{2\rho_0 b_0^2} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\omega_1} F(z_1) + \frac{2\omega_2}{1 + \omega_2^2} P(z_2) \right\}, \\ v(x, y) &= \frac{U}{2\rho_0 b_0^2} \text{Re} \left\{ F(z_1) + \frac{2}{1 + \omega_2^2} P(z_2) \right\}. \end{aligned}$$

Представление решения через две аналитические функции аналогично представлению, данному в работе [1], с тем отличием, что в [1] искомыми являются не скорости перемещения точек среды, а сами перемещения.

Соотношения (1.3) дают возможность определить $\sigma_{11}(x, y)$, $\sigma_{33}(x, y)$ по $\sigma_{22}(x, y)$ и $u(x, y)$.

2. Истолкование правых частей. Пусть в начале координат плоскости (x, y) , движущейся с дозвуковой скоростью, сосредоточен источник, описываемый дельтообразными правыми частями изучаемой системы уравнений. Требуется определить напряжения и скорости перемещения точек среды.

Система уравнений в этом случае имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \rho_0 U \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= R \delta(x) \delta(y), \\ \rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= G \delta(x) \delta(y), \\ U \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial v}{\partial y} &= \varphi_1 \delta(x) \delta(y), \end{aligned}$$

$$U \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_2 \delta(x) \delta(y),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \varphi_3 \delta(x) \delta(y),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \rho_0 b_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varphi_4 \delta(x) \delta(y).$$

Наличие правых частей в системе уравнений (2.1) приводит к тому, что появляются правые части в соотношениях (1.3) и, следовательно, $\sigma_{11}(x, y)$ и $\sigma_{33}(x, y)$ определяются по $u(x, y)$ и $\sigma_{22}(x, y)$ следующим образом:

$$(2.2) \quad \sigma_{11}(x, y) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1 - \omega_2^2 + 2\omega_1^2}{2\omega_1} F(z_1) + \frac{2\omega_2}{1 + \omega_2^2} P(z_2) \right\} + N \theta(x) \delta(y),$$

$$\sigma_{33}(x, y) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\omega_1^2 - \omega_2^2 - 1}{2\omega_1} F(z_1) \right\} + M \theta(x) \delta(y),$$

$$\text{где } N = \frac{1}{U} \left(\varphi_1 - \frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \varphi_2 \right);$$

$$M = \frac{1}{U} \left(\varphi_3 - \frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \varphi_1 \right);$$

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi.$$

Всюду, кроме окрестности начала координат, σ_{22} , σ_{12} , u , v в решении системы (2.1) могут быть определены по формулам (1.4), а сосредоточенным правым частям (при $x = 0$, $y = 0$) можно удовлетворить, выбирая $F(z_1)$, $P(z_2)$ в виде $F(z_1) = (A + iB)/z_1$, $P(z_2) = (C + iD)/z_2$,

$$\text{где } A = \frac{\omega_1}{1 - \omega_2^2} \left[\frac{2\varphi_4}{\pi U} + \frac{G}{\pi} \right]; \quad B = \frac{1}{1 - \omega_2^2} \left[-\frac{R + N}{\pi} + \frac{(1 + \omega_2^2) \varphi_2 b_0^2}{\pi U c_0^2} \right];$$

$$C = -\frac{1 - \omega_2^2}{1 + \omega_2^2} \left[\frac{\varphi_4}{2\omega_1 \pi U} + \frac{1}{2\omega_2} \frac{G}{\pi} \right]; \quad D = \frac{1 + \omega_2^2}{1 - \omega_2^2} \left[\frac{R + N}{2\pi} - \frac{\varphi_2}{\pi U} \frac{b_0^2}{c_0^2} \right].$$

Если поведение среды описывается максвелловской релаксационной моделью, то система уравнений имеет вид

$$\rho_0 U \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = R \delta(x) \delta(y),$$

$$\rho_0 U \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = G \delta(x) \delta(y),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x} - \rho_0 (c_0^2 - 2b_0^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\tau} \left(\sigma_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right),$$

$$U \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \rho_0 b_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\sigma_{12}}{\tau},$$

где τ — время релаксации касательных напряжений, являющееся, как правило, резко меняющейся функцией напряженного состояния.

Предположим, что приложенные силы или какие-либо другие причины вызывают пластические деформации, описываемые максвелловской моделью лишь в небольшой окрестности начала координат $x = 0, y = 0$. Это предположение можно смоделировать, полагая $1/\tau$ равной нулю вне круга $\{x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\} = K$ и равной в круге эффективному среднему значению $1/\tau_s$, где τ_s — характерное время релаксации в пластической зоне.

Будем считать, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — «мощности» релаксации, «суммарные» по всей зоне пластичности, величину которых смоделируем следующими интегралами:

$$(2.3) \quad \varphi_i = - \iint_K \left(\sigma_{ii} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) \frac{dx dy}{\tau_s} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\varphi_4 = - \iint_K \frac{\sigma_{12}}{\tau_s} dx dy.$$

При использовании развиваемой здесь схемы для прикидки численных величин возмущений, вносимых наличием зоны пластичности, можно интегралы (2.3) вычислять по решению упругой задачи, т. е. по решению задачи с $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Видно, что в рассматриваемой модели выполняется соотношение

$$(2.4) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Таким образом, если поведение среды описывать с помощью максвелловской модели с точечными источниками релаксации, то правые части системы (2.1) имеют следующий смысл: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — мощность источников релаксации нормальных напряжений; φ_4 — мощность источника релаксации касательного напряжения; (R, G) — компоненты вектора внешней силы, приложенной к среде, в окрестности начала координат.

Напряжения σ_{11} и σ_{33} даются формулами (2.2), из которых видно, что при отличных от нуля мощностях источников релаксации нормальных напряжений за особой точкой вдоль действительной оси остается напряженный след. Этот след характеризуется величиной N и M .

3. Оценка интенсивности напряженного слоя, возникающего под воздействием точечного штампа. Рассмотрим задачу об определении поля напряжений и скоростей в движущейся с дозвуковой скоростью U полуплоскости ($y < 0$), если известно, что граница полуплоскости свободна от напряжений $\sigma_{12}(x, 0) = \sigma_{22}(x, 0) = 0$, а в окрестности начала координат к ней приложена сила с компонентами (R, G) и имеется точечный источник релаксации напряжений, моделирующий пластические деформации вблизи точки приложения силы.

Напряженное состояние полуплоскости описывается системой (2.1). Граничным условиям и сосредоточенным в окрестности начала координат правым частям удовлетворим, если в формулах (1.4), (2.2) положим $F(z_1)$ и $P(z_2)$ равными

$$F(z_1) = \frac{1}{\pi A_0 z_1} \left[\frac{1 + \omega_2^2}{2\omega_1} G - 2i(R + N) \right],$$

$$P(z_2) = \frac{1}{\pi A_0 z_2} \left[-\frac{1 + \omega_2^2}{2\omega_2} G + 2i(R + N) \right],$$

где

$$A_0 = 1 - \frac{(1 + \omega_2^2)^2}{4\omega_1\omega_2}.$$

За точкой приложения силы вдоль границы полуплоскости (на положительной части действительной оси) возникает напряженный след. Появление этого напряженного следа обуславливается наличием точечного источника релаксации нормальных напряжений в окрестности точки приложения силы. Из полученного решения видно, что напряженный след оказывает такое же воздействие на упругое решение, т. е. на решение, в котором не учитывается релаксация напряжений, как и сила, приложенная в окрестности начала координат и имеющая компоненты $(N, 0)$.

Пусть квадрат скорости движения полуплоскости значительно меньше квадрата скорости поперечных звуковых волн, т. е. $U^2 \ll b_0^2$. В этом случае можно получить разложение решения по степеням отношения U^2/b_0^2 . Члены при нулевой степени параметра разложения имеют вид

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \sigma_{11}^0(x, y) &= -\frac{2G}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(R+N)}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} + N\theta(x)\delta(y), \\ \sigma_{22}^0(x, y) &= -\frac{2G}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(R+N)}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{33}^0(x, y) &= -\left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2}\right) \frac{G}{\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2}\right) \frac{(R+N)}{\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} + \\ &\quad + M\theta(x)\delta(y), \\ \sigma_{12}^0(x, y) &= -\frac{2G}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(R+N)}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ u^0(x, y) &= \frac{U}{2\rho_0 b_0^2} \left\{ \frac{R+N}{\pi} \left[-\frac{c_0^2}{(c_0^2 - b_0^2)} \frac{x}{(x^2 + y^2)} + \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{G}{\pi} \left[\frac{b_0^2}{(c_0^2 - b_0^2)} \frac{y}{(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right\}, \\ v^0(x, y) &= \frac{U}{2\rho_0 b_0^2} \left\{ \frac{R+N}{\pi} \left[\frac{b_0^2}{(c_0^2 - b_0^2)} \frac{y}{(x^2 + y^2)} - \frac{x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{G}{\pi} \left[\frac{c_0^2}{(c_0^2 - b_0^2)} \frac{x}{(x^2 + y^2)} + \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пусть сила, приложенная к полуплоскости, направлена вертикально вниз, т. е. $R=0, G<0$. В этом случае упругая часть решения (3.1) дает решение задачи о сосредоточенной силе, приложенной к упругой полуплоскости [2]:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \sigma_{11}^y(x, y) &= -\frac{2G}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{22}^y(x, y) = -\frac{2G}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{33}^y(x, y) &= -\left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2}\right) \frac{G}{\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)}, \quad \sigma_{12}^y(x, y) = -\frac{2G}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что приложенная к полуплоскости вертикальная сила вызывает пластические деформации, описываемые максвелловской мо-

делью, лишь в небольшой окрестности $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2, y < 0\}$ точки приложения. Тогда, согласно (2.3),

$$\Phi_i = - \iint_V \left(\sigma_{ii}^y - \frac{\sigma_{11}^y + \sigma_{22}^y + \sigma_{33}^y}{3} \right) \frac{dx dy}{\tau_s} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Воспользуемся формулами (3.2) и подсчитаем значения Φ_1, Φ_2, Φ_3

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{2G}{3\pi\tau_s} \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) h, \quad \Phi_2 = - \frac{2G}{3\pi\tau_s} \left(\frac{c_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) h, \\ \Phi_3 &= \frac{2G}{3\pi\tau_s} \left(\frac{2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) h. \end{aligned}$$

Предположим, что напряженный след, возникающий за точкой приложения силы, распределен по слою толщины h . Тогда величина интенсивности напряженного слоя определяется по формулам

$$(3.3) \quad N = \frac{4G}{3\pi\tau_s U} \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) h, \quad M = \frac{2G}{3\pi\tau_s U} \left(\frac{c_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) h.$$

По условию $G < 0$ для скоростей звука справедливо неравенство $c_0^2 > 2b_0^2$, следовательно,

$$(3.4) \quad N < 0, \quad M < 0.$$

Размеры пластической зоны можно, например, оценить так, как это делается в [2]. Для этого воспользуемся условием текучести Мизеса

$$\sqrt{(\sigma_{11}^y - \sigma_{22}^y)^2 + (\sigma_{22}^y - \sigma_{33}^y)^2 + (\sigma_{33}^y - \sigma_{11}^y)^2 + 6(\sigma_{12}^y)^2} = 2\sigma_s,$$

где σ_s — предел текучести материала, и по упругому решению (3.2) получим, что пластическая зона в этом случае есть круг $\left\{ x^2 + \left(y - \frac{d_s}{2} \right)^2 \leq d_s^2 \right\}$, диаметр которого дается формулой

$$(3.5) \quad d_s = - \sqrt{\frac{W}{2}} \frac{G}{\pi\sigma_s} \quad (G < 0),$$

где

$$W = 8 - 4 \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right) + 2 \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right)^2.$$

Так как в действительности нагрузка распределена по площадке хотя и малой, но конечной ширины, то при оценке интенсивности напряженного слоя предполагалось, что пластическая зона сосредоточена в области V , глубина проникновения которой меньше глубины пластической зоны, даваемой формулой (3.5), т. е. $h \leq d_s$.

Таким образом, при воздействии точечного штампа на движущуюся с дозвуковой скоростью полуплоскость вдоль границы полуплоскости возникает напряженный слой, интенсивность которого определяется формулами (3.3), а в силу (3.4) напряжения в этом слое сжимающие.

4. Напряженный след в задаче о соударяющихся пластинках в режиме сварки взрывом. Пусть две пластинки одинаковой толщины H соударяются друг с другом в режиме сварки взрывом [3]. Приближенно считаем, что пластины в плоскости (x, y) , связанной с точкой контакта, изображаются полосами $\{-H < y < 0\}$, $\{0 < y < H\}$. Напряженное состояние таких пластин описывается уравнениями (2.1) в системе координат, движущейся вместе с точкой контакта. Берега разреза направлены вдоль отрицательной части действительной оси и свободны от напряжений

$$(4.1) \quad \sigma_{12}(x, 0)|_{x < 0} = 0, \quad \sigma_{22}(x, 0)|_{x < 0} = 0.$$

Граничным условиям (4.1) и сосредоточенным в окрестности точки контакта правым частям удовлетворим, если положим $F(z_1)$ и $P(z_2)$ в формулах (1.4), (2.2) равными

$$F(z_1) = a_0 \frac{p - iq}{V_{z_1}}, \quad P(z_2) = -\frac{a_0}{V_{z_2}} \left[p - iq \left(\frac{(1 + \omega_2^2)^2}{4\omega_1\omega_2} \right) \right],$$

где

$$p = \frac{\omega_1}{1 - \omega_2^2} \left[\left(1 - \frac{1 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \right) \frac{G}{\pi} + \left(1 - \frac{(1 + \omega_2^2)^2}{4\omega_1\omega_2} \right) \frac{2\varphi_4}{\pi U} \right];$$

$$q = \frac{1 + \omega_2^2}{1 - \omega_2^2} \left[\left(1 - \frac{1 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \right) \frac{(R + N)}{\pi} - \left(1 - \frac{(1 + \omega_2^2)^2}{4\omega_1\omega_2} \right) \frac{\varphi_2}{\pi U} \frac{b_0^2}{c_0^2} \right];$$

$$a_0 = 2 / \left(1 - \frac{(1 + \omega_2^2)^2}{4\omega_1\omega_2} \right).$$

Приведенное здесь решение с особенностью при $x = y = 0$ описывает характер напряженного состояния вблизи этой точки. Этот характер не должен измениться, если добиться выполнения граничных условий при $y = \pm H$, которые здесь не учитываются.

Деформация среды происходит без изменения массы, т. е. выполнено уравнение

$$(4.2) \quad U \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

где ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} — компоненты тензора деформации.

Если предположить, что в окрестности точки контакта имеется отток массы, то уравнение (4.2) надо заменить на

$$(4.3) \quad U \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{Q}{c_0^2 \rho_0} \delta(x) \delta(y),$$

где Q/c_0^2 — мощность оттока массы, $Q > 0$.

Этот отток можно рассматривать как моделирующий кумулятивную струю, которая возникает в пластической области при достаточно больших скоростях деформации.

Компоненты тензора деформации и тензора напряжений связаны между собой законом Гука. Тогда

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\rho_0 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

и уравнение (4.3) принимает вид

$$U \frac{\partial (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{\partial x} - 3 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 3 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \times \\ \times \frac{Q}{c_0^2} \delta(x) \delta(y).$$

Если есть отток массы, то условие (2.4) надо заменить на

$$(4.4) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 3 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \frac{Q}{c_0^2}.$$

Пусть релаксация происходит так, что мощности источников релаксации напряжений удовлетворяют соотношениям

$$(4.5) \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \varphi_2 > 0.$$

Если $\varphi_i (i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям (4.4), (4.5), то

$$(4.6) \quad \varphi_1 = 3 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \frac{Q}{2c_0^2} - \frac{\varphi_2}{2}.$$

За точкой контакта вдоль положительной части действительной оси остается напряженный след.

Напряжения в этом следе определяются величинами N и M . В случае (4.5) $N = M$. Используя выражение (4.6), получим

$$(4.7) \quad N = 3 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \frac{(Q - \varphi_2)}{2c_0^2}.$$

Исследуем полученную формулу. Если мощность оттока массы равна нулю, то

$$N = - \frac{3}{2c_0^2} \left(c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2 \right) \varphi_2,$$

и так как в силу (4.5) $\varphi_2 > 0$, то $N < 0$. Это означает, что если в задаче о соударении двух пластин в окрестности точки контакта нет оттока массы, то на линии соединения пластин образуется напряженный след, подверженный сжимающим напряжениям.

Пусть в окрестности точки контакта имеется отток массы, причем его мощность Q равняется мощности φ_2 источника релаксации нормального напряжения. Тогда $N = 0$ и, следовательно, за точкой контакта напряженного следа не образуется, т. е. наличие оттока массы, по мощности равного мощности φ_2 релаксации нормального напряжения, в окрестности точки контакта снимает напряженный слой.

Заметим, что в [4] экспериментально установлено, что явления волнообразования и кумулятивного струеобразования, как правило, взаимноисключают друг друга. В зоне параметров, отвечающих устойчивому образованию кумулятивных струй, сварочные волны обычно не наблюдаются, и наоборот, в режимах волнообразования ярко выраженные признаки струи отсутствуют.

Видимо, этот факт связан с тем, что, согласно (4.7), отток массы снимает напряжения в следе за точкой контакта. В этом случае естественно ожидать, что наличие напряженного следа — причина волнообразования.

Задача о соударяющихся пластинках в упругой постановке исследовалась в работе [5], где не учитывались пластические деформации

в окрестности точки контакта и поэтому не было отмечено образования напряженного следа за точкой контакта.

5. Численная прикидка величин U и γ , необходимых для потери устойчивости напряженного слоя. Пусть напряженный след, возникающий за точкой контакта, распределен по слою толщины $2h$. Тогда интенсивность этого напряженного слоя можно приближенно оценить так. Предположим, что воздействие одной пластинки на другую есть воздействие точечного штампа на движущуюся полуплоскость, скорость которой совпадает со скоростью точки контакта. Сила, с которой штамп воздействует на полуплоскость, определяется из закона сохранения вертикального импульса. Она определяется по формуле

$$(5.4) \quad G = \rho_0 U^2 H \sin(\gamma/2),$$

где H — ширина пластинки; γ — угол соударения. В дальнейшем будем предполагать, что сила сосредоточена в окрестности точки контакта.

При таком предположении оценка интенсивности напряженного слоя в задаче о соударении пластин в режиме сварки взрывом сводится к сделанной выше оценке интенсивности напряженного слоя, возникающего в результате воздействия точечного штампа на движущуюся полуплоскость.

Следуя идее, предложенной в [6], рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть напряженный слой, возникающий на линии контакта при сварке взрывом двух пластин, есть двухслойный стержень, каждый из двух стержней подвергнут сжатию интенсивности N . На линии, разделяющей стержни, на достаточном удалении от точки контакта напряжения σ_{12} и σ_{22} равны нулю в силу симметрии задачи. Будем считать, что волнообразование при сварке взрывом есть потеря устойчивости стержня, сжимаемого продольной нагрузкой $2N$ и прикрепленного к упругой полуплоскости. По существу, эта гипотеза состоит в том, что волнообразование при сварке взрывом имеет причину, полностью аналогичную причине звездообразной деформации трубок вблизи взрывающихся зарядов ВВ, описанной в работе [7].

Для подтверждения этой гипотезы нужно выяснить, существуют ли такие U и γ , при которых напряженный слой сжат нагрузкой, равной или превосходящей критическую, и насколько близки эти U и γ к экспериментальным.

Дифференциальное уравнение для поперечного изгиба стержня высоты h , сжатого продольной нагрузкой $T_0 h$ и прикрепленного к упругому основанию, имеет вид

$$(5.2) \quad \frac{E_0 h^3}{12(1 - \sigma_0^2)} \frac{d^4 \xi}{dx^4} + T_0 h \frac{d^2 \xi}{dx^2} + R = 0,$$

где E_0 — модуль Юнга сжимаемого стержня; σ_0 — его коэффициент Пуассона; R — реакция упругого основания.

Пусть после потери устойчивости стержень имеет изгиб

$$\xi(x) = A e^{i\alpha x} \quad (A - \text{const}).$$

Для такого изгиба величина реакции упругой полуплоскости дается формулой

$$(5.3) \quad R = - \frac{E\alpha}{2(1 - \sigma^2)} \xi(x),$$

где E — модуль Юнга упругого основания; σ — его коэффициент Пуассона.

Подставим значение R , даваемое формулой (5.3), в уравнение (5.2), после преобразования получим

$$(5.4) \quad \left(\frac{h}{\lambda}\right)^3 + p \left(\frac{h}{\lambda}\right) + q = 0,$$

где $\lambda = 2\pi/\alpha$ — длина волны, по которой изогнется стержень;

$$p = -\frac{3(1-\sigma_0^2)}{\pi^2 E} T_0; \quad q = -\frac{3}{4\pi^3} \frac{E(1-\sigma_0^2)}{E_0(1-\sigma^2)}.$$

Введем обозначения

$$D_0 = \frac{E(1-\sigma_0^2)}{E_0(1-\sigma^2)}, \quad P_0 = \frac{T_0}{\rho_0 c_0^2}.$$

В этих обозначениях коэффициенты p и q кубического уравнения (5.4) записываются в виде

$$p = -\frac{3P_0 \rho_0 c_0^2}{\pi^2} \left(\frac{1-\sigma^2}{E}\right) D_0, \quad q = -\frac{3}{4\pi^3} D_0.$$

Таким образом, задача о потере устойчивости стержня, прикрепленного к упругому основанию и сжимаемого продольной нагрузкой $T_0 h$, свелась к отысканию при фиксированном параметре D_0 того значения параметра P_0 , при котором уравнение (5.4) имеет двукратный действительный корень.

Решая полученную задачу, найдем выражение для P_0 в зависимости от D_0

$$(5.5) \quad P_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{D_0} \frac{E}{4\rho_0 c_0^2 (1-\sigma^2)}}.$$

Так как на линии контакта пластин материал деформируется пластически, то модуль Юнга сжимаемого стержня принимает некое эффективное значение, по величине не превосходящее модуля упругости материала, т. е. $E_0 < E$, и, следовательно, $D_0 > 1$.

Критические значения P_0 , определяемые (5.5), и соответствующие им длины волн, по которым изогнется стержень, для меди и железа приведены в табл. 1. Значения ρ_0 , c_0 , b_0 даны в табл. 2.

В случае задачи о соударении двух пластин в режиме сварки взрывом величина P_0 (в силу сделанных выше предположений) задается формулой

$$(5.6) \quad P_0 = \frac{4G}{3\pi\tau_s \rho_0 c_0^2 U} \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right),$$

где G определяется соотношением (5.1).

Весь напряженный слой сжат нагрузкой $2N$ и имеет высоту $2h$, а так как на достаточном удалении от точки контакта граница стержней свободна от напряжений, то, говоря о критической нагрузке и длине волны, по которой слой (стержень) изогнется после потери устойчивости, достаточно рассматривать напряженный слой как один стержень высоты h , прикрепленный к упругой полуплоскости и сжимаемый продольной нагрузкой N .

На плоскости (U, γ) построим кривую, отделяющую область тех значений U и γ , при которых возможно волнообразование. Пусть P_0 — кри-

Т а б л и ц а 1

D_0	Cu			Fe		
	P_0	λ/h	γ_*^0	P_0	λ/h	γ_*^0
10	0,161	2,0	13	0,183	2,0	17
30	0,112	1,4	9	0,127	1,4	12
60	0,09	1,1	8	0,1	1,1	10
90	0,08	1	7	0,088	1	9

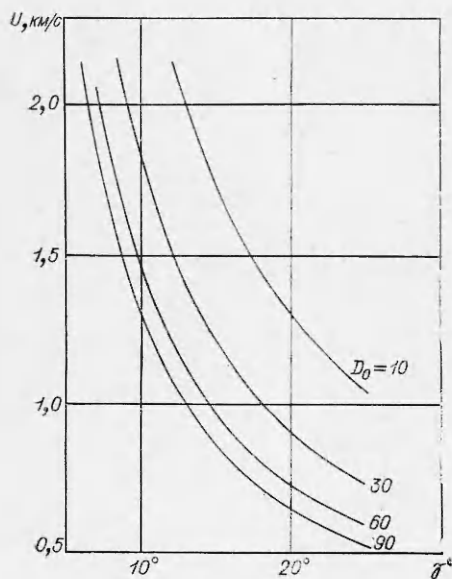
Т а б л и ц а 2

Материал	ρ_0 , г/см ³	c_0 , км/с	b_0 , км/с
Cu	8,900	4,651	2,1409
Fe	7,840	5,694	2,8659

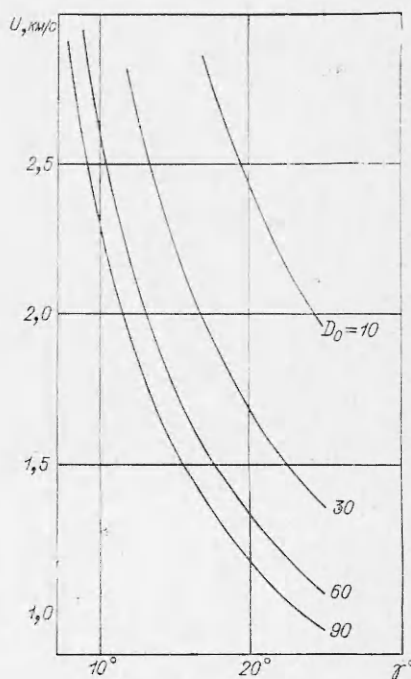
тическое значение, при котором напряженный слой теряет свою устойчивость. Тогда формула (5.6) дает следующую связь между U и γ :

$$(5.7) \quad U = \frac{3\pi\tau_0 P_0 c_0^2}{4H} \left(\frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2 - 2b_0^2} \right) \frac{1}{\sin(\gamma/2)}.$$

Точки плоскости (U, γ) , лежащие выше кривой (5.7), соответствуют тем значениям скорости точки и угла соударения, при которых возможно волнообразование. На U и γ накладываются следующие ограничения. Так как рассматривается дозвуковое соударение пластин ($U^2 < b_0^2$), то, для того чтобы напряженный слой был сжат нагрузкой, равной или превосходящей критическую, необходимо, чтобы угол соударения был больше некоторого угла γ_* . С другой стороны, при больших скоростях точки контакта и углах соударения металл на поверхности соударяющихся пластин можно считать жидкостью. В работах [8, 9] в рамках теории вязкой жидкости получено неравенство на U и γ , при котором возможно



Ф и г. 1



Ф и г. 2

струеобразование

$$(5.8) \quad \frac{HU}{\nu} \frac{\sin^2(\gamma/2)}{[1 - \sin(\gamma/2)]} > 2,$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, $\nu = b_0^2 \tau$, τ — время релаксации касательных напряжений.

В случае, если металл на поверхности пластин ведет себя как жидкость, $\tau < \tau_s$.

Воспользовавшись (5.7), (5.8), получим

$$(5.9) \quad \sin(\gamma/2) = \left[1 + \frac{3\pi P_0 c_0^2 \tau_s}{8b_0^2 \tau} \left(\frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2 - 2b_0^2} \right) \right]^{-1}.$$

Из (5.9) определяется критический угол γ_{**} такой, что при $\gamma > \gamma_{**}$ возможно струеобразование («отток массы»), а это значит, что на линии контакта пластин снимается напряженный слой. Так как считаем, что напряженный слой — причина волнообразования, то естественно, что в случае $\gamma > \gamma_{**}$ волнообразования происходить не будет.

Т а б л и ц а 3

$\frac{\tau_s}{\tau}$ D_0	Cu					Fe				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
10	53	33	24	19	16	52	32	24	19	15
30	65	43	32	26	21	64	42	31	25	21
60	72	49	38	31	26	72	49	37	30	26
90	76	53	41	33	28	76	53	41	33	28

На фиг. 1, 2 приведены графики кривой (5.7) для меди и железа соответственно при различных D_0 ($\tau_s = 0,1$ мкс). Угол γ_* и отношение длины волны, по которой изогнется слой, к толщине слоя $k = \lambda/h$ даны в табл. 1. Значения угла γ_{**} при различных значениях параметров D_0 и τ_s/τ даны в табл. 3. Высоту напряженного слоя зададим по формуле

$$h = \beta d_s,$$

где β — числовой параметр, не превосходящий единицу; d_s дается формулой (3.5).

Тогда для длины волны получим соотношение

$$(5.10) \quad \lambda = \beta k d_s.$$

Будем считать, что β меняется в пределах от 0,1 до 0,5, k меняется от 1 до 2 и, следовательно, коэффициент βk при d_s в формуле (5.10) меняется от 0,1 до 1.

В [3] для длин волн, получающихся при сварке взрывом, дается экспериментальная формула

$$(5.11) \quad \lambda = 26H \sin^2(\gamma/2).$$

Выражение (5.10) можно записать в виде (5.11)

$$\lambda = LH \sin^2(\gamma/2),$$

где

$$L = \beta k \frac{\rho_0 U^2}{\pi \sigma_s} \sqrt{\frac{W}{2}} \frac{1}{\sin(\gamma/2)}.$$

Таблица 4

$\frac{U}{\text{км/с}}$ γ°	Fe						Cu					
	1,56	1,66	1,77	1,9	2,04	2,21	0,85	0,9	0,96	1,03	1,11	1,2
17	20	22	26	29	34	40	19	21	25	28	32	37
16		24	27	31	36	42		22	25	30	34	39
15			29	33	39	45			27	32	36	42
14				36	41	48				34	38	45
13					44	52					41	49
12						57						53

Величина L зависит от плотности материала, предела текучести, скорости точки контакта, угла соударения. Положим $\beta k = 0,2$ и найдем значения L при различных U и γ для меди ($\sigma_s = 6,5$ кбар (1 кбар = 10^8 Н/м²)) и железа ($\sigma_s = 20$ кбар). Эти значения приведены в табл. 4.

Поступила 19 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости. — «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 3.
2. Смирнов В. С. Теория обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1973.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. Симонов В. А. О течениях, возникающих при падении ударной волны на клиновидную плоскость. — ФГВ, 1971, т. 7, № 2.
5. Ефремов В. В. Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке. — ПМТФ, 1975, № 1.
6. Эрлих Л. Б., Кособлудский В. А., Вершинин Л. И. Волнообразование на обкатываемых поверхностях. М., «Наука», 1973.
7. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. — «Докл. АН СССР», 1949, т. 65, № 6.
8. Годунов С. К., Дерибас А. А. К вопросу о струеобразовании при соударении металлов. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 5.
9. Годунов С. К., Дерибас А. А., Мали В. И. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин. — ФГВ, 1975, № 1.

УДК 539.374:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Мамадалиев, В. П. Молев

(Москва)

Рассматривается двумерная стационарная задача о распространении ударной волны в неупругой идеальной среде, заполняющей полупространство, при воздействии на его границу подвижной нагрузки. Решени-