ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ, СОЗДАВАЕМОЕ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. К. Бодулинский, Ю. А. Медведев

(Москва)

Рассматривается электромагнитное возмущение, возникающее при линейном расширении идеально проводящей сферы во внешнем однородном магнитном поле при скоростях, сравнимых со скоростью света. Рассмотрен переход полей в статический режим после остановки сферы.

1. Задача об электромагнитных полях, возникающих при быстром расширении идеально проводящей сферы в однородном магнитном поле, рассматривалась в работе [1], где получен ошибочный результат (решение не удовлетворяет исходным уравнениям Максвелла). В равной мере это относится и к приводимым в [1] результатам для пульсирующей сферы.

Пусть идеально проводящая сфера, центр которой совпадает с центром сферической системы координат, расширяется по линейному закону $a = vt$ (a — радиус сферы) во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, направленном вдоль оси z.

Электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.1}$$

В силу симметрии задачи поле не зависит от угла φ, причем магнитное поле имеет отличные от нуля компоненты $H_r\ (r, \vartheta, t)$ и $H_\vartheta(r, \vartheta, t)$, а электрическое поле лишь $E_\varphi\,(r, \vartheta, t)$.

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Из постановки задачи ясно, что в начальный момент

$$H_r\,(r, \vartheta, 0) = H_0 \cos\vartheta, \qquad H_\vartheta(r, \vartheta, 0) = -H_0 \sin\vartheta, \qquad E_\varphi\,(r, \vartheta, 0) = 0 \tag{1.2}$$

Граничное условие на поверхности сферы в соответствии с [2] должно иметь вид

$$(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{H}])_{r=a} = 0 \tag{1.3}$$

или в компонентах

$$E_\varphi\,(a, \vartheta, t) + a^{\cdot} c^{-1} H_\vartheta(a, \vartheta, t) = 0 \tag{1.4}$$

Угловая зависимость в (1.1), (1.2) и (1.4) отделяется, если положить

$$H_r(r, \vartheta, t) = \cos\vartheta\, H_r\,(r, t), \quad H_\vartheta\,(r, \vartheta, t) = -\sin\vartheta\, H_\vartheta\,(r, t), \quad E_\varphi\,(r, \vartheta, t) = \sin\vartheta E_\varphi\,(r, t) \tag{1.5}$$

после чего приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rH_\vartheta)}{\partial r} - \frac{H_r}{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}, \quad \frac{2E_\varphi}{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad H_\vartheta = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 H_r) \tag{1.6}$$

$$H_r\,(r, 0) = H_\vartheta\,(r, 0) = H_0, \quad E_\varphi\,(r, 0) = 0, \quad E_\varphi\,(a, t) - a^{\cdot} c^{-1} H_\vartheta\,(a, t) = 0 \tag{1.7}$$

2. Рассмотрим решение системы (1.6), (1.7) в области

$$D = \{a\,(t) \leqslant r < \infty, \quad t \geqslant 0\}$$

Из уравнений (1.6) имеем

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_r}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

Будем искать решение уравнения (2.1), регулярное на бесконечности и удовлетворяющее принципу излучения, методом выделения автомодельного параметра, использованного в [3].

Решение уравнения (2.1) должно иметь вид расходящейся волны, поэтому перейдем к новым переменным

$$\rho = r, \qquad \tau = t - r / c \tag{2.2}$$

После чего уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial \rho^2} - \frac{2}{c}\frac{\partial^2 H_r}{\partial \rho\,\partial \tau} + \frac{4}{\rho}\frac{\partial H_r}{\partial \rho} - \frac{4}{c\rho}\frac{\partial H_r}{\partial \tau} = 0 \tag{2.3}$$

В данной задаче имеется три независимых критерия подобия: H_r / H_0, $\beta = v / c$, $x = c\tau / \rho$, поэтому на основании π-теоремы [4] решение уравнения (2.3) можно представить в виде

$$H_r / H_0 = f(\beta, x) \tag{2.4}$$

или, так как $\beta = \mathrm{const}$, то

$$H_r(\rho, \tau) = H_0 \Psi(x)$$

Для $\Psi(x)$ получаем из (2.3) уравнение

$$(x^2 + 2x)\frac{d^2\Psi}{dx^2} - 2(x+1)\frac{d\Psi}{dx} = 0 \tag{2.5}$$

имеющее решение

$$\Psi(x) = A(x^3 + 3x^2) + B \tag{2.6}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Возвращаясь в (2.6) к исходным переменным, получаем

$$H_r(r, t) = H_0\left\{A\left[\left(\frac{ct-r}{r}\right)^3 + 3\left(\frac{ct-r}{r}\right)^2\right] + B\right\} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (1.6), получаем

$$E_\varphi(r, t) = -1.5H_0A\left[\left(\frac{ct-r}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{ct-r}{r}\right)\right] \tag{2.8}$$

$$H_\vartheta(r, t) = H_0\left\{\frac{A}{2}\left[\left(\frac{ct-r}{r}\right)^3 + 3\left(\frac{ct-r}{r}\right)^2 + 6\left(\frac{ct-r}{r}\right)\right] - B\right\} \tag{2.9}$$

Постоянные A и B определяются из условий (1.7)

$$A = -2\beta^3(1-\beta)^{-2}(1+2\beta)^{-1}, \qquad B = 1 \tag{2.10}$$

Приведем решение задачи

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_0\cos\vartheta\left\{1 - 2F(\beta)\,\eta(ct-r)\left[\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)^3 + 3\beta\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)^2\right]\right\}$$

$$H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -H_0\sin\vartheta\left\{1 + F(\beta)\,\eta(ct-r)\left[\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)^3 + 3\beta\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)^2 + 6\beta^2\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)\right]\right\} \tag{2.11}$$

$$E_\varphi(r, \vartheta, t) = 3H_0\sin\vartheta\,\beta F(\beta)\left[\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{vt-\beta r}{r}\right)\right]\eta(ct-r)$$

$$F(\beta) = 2^{-1}(1-\beta)^{-2}(1+2\beta)^{-1}$$

Здесь $\eta(ct-r)$ — единичная функция.

Можно непосредственной проверкой убедиться, что выражения для полей (2.11) удовлетворяют уравнениям Максвелла, граничным и начальным условиям.

3. Полученные результаты могут представить интерес в задачах о быстром развитии проводящей области во внешних полях, например, при рассмотрении электродинамических эффектов, сопровождающих расширение ударной волны световой искры в луче лазера в магнитном поле [5,6].

В начальные моменты фронт сильной ударной волны обладает большой проводимостью, внешнее поле не проникает внутрь и граничное условие (1.4) выполняется на самой поверхности ударной волны. Со временем температура фронта падает и поверхность, на которой выполняется условие (1.4), отстает от фронта и быстро замедляется.

В связи с этим рассмотрим следующую модельную задачу: идеально проводящая сфера расширяется во внешнем магнитном поле линейно до момента t_0, а при $t > t_0$ останавливается. При этом распределение полей, даваемых формулами (2.11), при $t = t_0$ можно принять за начальные. Рассмотрим релаксационный процесс выхода полей на статические значения.

Вместо функций H_r, H_ϑ и E_φ введем функцию $u(r, t)$ по формулам

$$H_r(r, t) = \frac{2u}{r}, \qquad H_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}, \qquad E_\varphi = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

граничному условию

$$u(a_0, t) = 0 \tag{3.3}$$

и начальному условию

$$u(r, t_0) = \frac{rH_0}{2}\left\{1 - 2F(\beta)\left[\left(\frac{a_0 - \beta r}{r}\right)^3 + 3\beta\left(\frac{a_0 - \beta r}{r}\right)^2\right]\right\} \tag{3.4}$$

При $t \to \infty$ в уравнении (3.2) можно положить $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$, и в этом предельном случае получаем

$$u(r, \infty) = {}^1/_2 rH_0 (1 - a_0^3 / r^3) \tag{3.5}$$

Перейдем в уравнении (3.2) от переменных r, t к переменным ρ, τ по формулам

$$\rho = r / a_0, \qquad \tau = a_0^{-1}[c(t - t_0) - (r - a_0)]$$

Тогда уравнение, граничные и начальные условия примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \tau} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{2u}{\rho^2} = 0 \tag{3.6}$$

$$u(1, \tau) = 0, \qquad u(\rho, 0) = \frac{\rho a_0 H_0}{2}\left[1 - 2F(\beta)\left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{3\beta}{\rho^2}\right)\right]$$

$$u(\rho, \infty) = {}^1/_2 \rho a_0 H_0 (1 - \rho^{-3}) \tag{3.7}$$

Данная задача решается методом преобразования Лапласа по переменной τ. Опуская громоздкие вычисления, приведем решение

$$u(\rho, \tau) = \frac{\rho a_0 H_0}{2}\left\{1 - \frac{1}{\rho^3}[2F(\beta)e^{-\tau} + 1 - e^{-\tau}] + \frac{6\beta F(\beta)}{\rho^2}e^{-\tau}\right\} \tag{3.8}$$

Возвращаясь в (3.8) к r и t, получаем

$$u(r, t) = \frac{rH_0}{2}\left\{1 - \left[2F(\beta)\exp\frac{-c(t - t_0) + (r - a_0)}{a_0} + 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp\frac{-c(t - t_0) + (r - a_0)}{a_0}\right]\frac{a_0^3}{r^3} + 6\beta F(\beta)\frac{a_0^2}{r^2}\exp\frac{-c(t - t_0) + (r - a_0)}{a_0}\right\} \tag{3.9}$$

Это соотношение совместно с (3.1) дает решение задачи о процессе релаксации полей при остановке сферы. Из (3.9) и (3.1) видно, что поля выходят на статический режим (электрическое поле — на нулевое значение) по экспоненциальному закону, без осцилляций. Можно видеть из простых физических соображений, что это следствие однородности внешнего поля, когда при расширении сферы на ее поверхности наводятся поверхностные токи, распределенные симметрично относительно диаметральной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и вследствие этой симметрии невозможна перекачка энергии от одного полюса к другому. В неоднородном поле симметрия распределения токов нарушается и в момент остановки на одной из полусфер течет эффективный кольцевой ток, который индуцирует на другой полусфере эффективный ток, который в свою очередь индуцирует ток на первой и т. д., в результате чего возникают осцилляции.

Авторы благодарны Г. В. Федоровичу за полезное обсуждение.

Поступила 10 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. Н. Излучение электромагнитных волн идеально проводящей сферой, пульсирующей в однородном поле. Сб. «Проблемы дифракции и распространения волн». Изд-во ЛГУ, 1965, вып. 4.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
3. Бодулинский В. К., Медведев Ю. А. Расширяющийся идеально проводящий цилиндр в однородном магнитном поле. ПМТФ, 1969, № 4.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
5. Аскарьян Г. А., Рабинович М. С., Савченко М. М., Смирнова А. Д. Световая искра в магнитном поле. Письма в редакцию ЖЭТФ, 1965, т. 1, вып. 1.
6. Райзер Ю. П. Пробой и нагревание газов под действием лазерного луча. Усп. физ. н., 1965, т. 87, вып. 1
7. Ватсон Дж. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.