

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

И. О. Богульский^{*,**}, Ю. М. Волчков^{***,****}

* Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия

** Красноярский государственный аграрный университет, 660049 Красноярск, Россия

*** Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия

**** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

E-mails: bogul.io@ya.ru, volk@hydro.nsc.ru

С использованием явных алгоритмов численного решения, основанных на нескольких локальных аппроксимациях каждой из искомых функций линейными полиномами, исследуются три способа аппроксимации младших недифференциальных членов в уравнениях динамических задач механики деформируемых тел. При построении алгоритма формулируются дополнительные уравнения, основанные на законе сохранения энергии. Изучены свойства предлагаемых схем: диссипативность, монотонность и устойчивость. Приводятся результаты численного решения задачи о деформировании упругой пластины с постоянными по ее толщине деформациями сдвига (модель Тимошенко). Результаты численного решения задачи о деформировании упругого диска при импульсном нагружении сравниваются с аналитическим решением этой задачи.

Ключевые слова: численные методы, константы диссипации, импульсное нагружение, упругие деформируемые тела.

DOI: 10.15372/PMTF20200415

Введение. В работе [1] предложен метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Численные схемы, построенные на основе этого метода, и примеры решения многомерных задач газовой динамики приведены в [2].

В настоящее время существуют схемы численного расчета разрывных решений двух типов: схемы с выделением разрыва и схемы сквозного счета. При использовании схем сквозного счета более предпочтительными являются схемы с порядком точности выше первого, позволяющие более точно описывать картину течения и уменьшать время решения задач. Известно, что решения, полученные с использованием линейных разностных схем второго порядка аппроксимации и выше немонотонны: возникающие при расчете разрывных решений нефизические осцилляции существенно искажают картину течения. Немонотонности решения можно избежать, используя нелинейные разностные операторы, так называемые переключатели [3, 4].

С помощью нескольких локальных аппроксимаций каждой из искоемых функций [5] в работах [6–8] созданы монотонные численные схемы решения динамических задач механики деформируемых твердых тел.

При построении схем численного решения динамических задач основное внимание уделяется аппроксимации дифференциального оператора — главного члена системы дифференциальных уравнений. Однако способ аппроксимации младших недифференциальных членов уравнений при переходе с одного шага по времени на другой также оказывает существенное влияние на качество численной схемы. Неудачная аппроксимация этих членов может приводить к появлению нефизических эффектов, искажающих решение задачи.

В данной работе рассматриваются три способа аппроксимации младших недифференциальных членов гиперболической системы уравнений и исследуются свойства численных схем, соответствующих этим аппроксимациям.

1. Локальная аппроксимация искоемых функций линейными полиномами по времени и пространству. Рассмотрим симметричную одномерную гиперболическую систему уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами [2]

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \|u_i\|$, $i = 1, \dots, n$; матрицы A и B симметричны, причем матрица A положительно определена.

Известно, что с использованием невырожденного ортогонального преобразования система (1) может быть приведена к канонической форме

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + F \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{V} = \|V_i\|$, $i = 1, \dots, n$; матрица Λ имеет диагональный вид $\Lambda = \lambda_j \delta_{kj}$; δ_{kj} — символ Кронекера.

Далее при построении алгоритмов численного решения будем использовать каноническую форму уравнений (2). Все полученные результаты можно обобщить на случай представления уравнений в форме (1).

Разобьем область определения вектор-функции $\mathbf{V}$ прямыми $x = x_j$, $t = t_k$ ($j = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, M$), параллельными осям координат Ox и Ot , на элементарные прямоугольники $\Omega = \{t_k \leq t \leq t_{k+1}, x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$. Пусть разбиение расчетной области является равномерным: $x_{j+1} - x_j = h$, $t_{k+1} - t_k = \tau$.

В элементарном прямоугольнике $\Omega = \{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$ введем локальную систему координат ξ и η :

$$\xi = \frac{2}{h} \left(x - \frac{1}{2} (x_j + x_{j+1}) \right), \quad \eta = \frac{2}{\tau} \left(t - \frac{1}{2} (t_k + t_{k+1}) \right).$$

При построении численного решения краевой задачи для системы уравнений (2) искомая вектор-функция $\mathbf{v}$ в каждом элементе Ω аппроксимируется линейными полиномами по времени $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \eta$ и пространству $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1 \xi$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + F \mathbf{v}'' = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}''$ — независимая аппроксимация в элементе Ω недифференциальных членов системы (2).

Систему (3) можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{j+1/2}(t + \tau) = \mathbf{v}_{j+1/2}(t) - (\tau/h)\Lambda(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j) - \tau F \mathbf{v}_{j+1/2}'', \quad (4)$$

где $\mathbf{v}_{j+1/2}(t + \tau)$, $\mathbf{v}_{j+1/2}(t)$ — значения искомого решения на верхнем ($\eta = 1$) и нижнем ($\eta = -1$) слоях по времени соответственно; $\mathbf{v}_j$ — значение полинома $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\eta$ в общем для двух соседних элементов узле; $\mathbf{v}_{j+1/2}''$ — значение независимой аппроксимации в элементе Ω недифференциальных членов системы (2).

Уравнений (3) с краевыми условиями, которым должны удовлетворять полиномы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\eta$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1\xi$, недостаточно для определения коэффициентов этих полиномов и величин $\mathbf{v}''$. Для замыкания системы необходимо выбрать способ вычисления величин $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_{j+1/2}''$ по известным значениям $\mathbf{v}_{j+1/2}(t)$.

Заметим, что для любых полиномов $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\eta$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1\xi$ и величин $\mathbf{v}''$, удовлетворяющих уравнению (3), имеет место энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{v}_0 + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} \mathbf{v}' + F \mathbf{v}'' \mathbf{v}'' \right) d\Omega + Q = 0,$$

где

$$Q = \int_{\Omega} \left(\Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0) + F \mathbf{v}'' (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'') \right) d\Omega. \quad (5)$$

В качестве дополнительных уравнений для определения значений $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_{j+1/2}''$ примем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j+1/2}(t) - \frac{\tau}{2} \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} - \frac{\tau}{2} F \mathbf{v}_{j+1/2}'' - \mathbf{v}'_0 &= \frac{1}{2} \Gamma_1 \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + \frac{1}{2} W_1 F \mathbf{v}'' \mathbf{v}'', \\ \mathbf{v}_{j+1/2}(t) - \frac{\tau}{2} \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} - \frac{\tau}{2} F \mathbf{v}_{j+1/2}'' - \mathbf{v}_{j+1/2}'' &= \frac{1}{2} \Gamma_2 \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + \frac{1}{2} W_2 F \mathbf{v}'' \mathbf{v}'', \end{aligned} \quad (6)$$

где Γ_k , W_k ($k = 1, 2$) — некоторые матрицы, элементы которых определены ниже.

Выражение для величины Q в (5) можно записать в виде

$$Q = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\Gamma_1 \mathbf{a} \mathbf{a} + (W_1^* + \Gamma_2) \mathbf{a} \mathbf{b} + W_2 \mathbf{b} \mathbf{b}] d\Omega, \quad (7)$$

где $\mathbf{a} = \Lambda(\partial \mathbf{v}' / \partial x)$; $\mathbf{b} = F \mathbf{v}''$.

В случае $\Gamma_k = 0$, $W_k = 0$ решение системы (4), (6) обладает свойством консервативности ($Q = 0$), при этом дополнительные уравнения (6) принимают вид $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_{j+1/2}'' = \mathbf{v}_0$. Однако построение консервативного решения сопряжено с необходимостью решать систему жестко связанных между собой уравнений относительно величин $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_{j+1/2}''$ во всей расчетной области. Поэтому ниже рассматриваются варианты матриц Γ_k , W_k , для которых за счет введения искусственной диссипации $Q \geq 0$ система дополнительных уравнений (6) расщепляется на независимые подсистемы относительно величин $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_{j+1/2}''$. В случае $Q \geq 0$ матрицы Γ_k , W_k будем называть матрицами констант диссипации.

2. Варианты выбора матриц констант диссипации. Ниже рассматриваются схемы численных алгоритмов, получаемые при различном выборе матриц констант диссипации.

Схема I. Положим

$$W_1 = -\tau I, \quad \Gamma_2 = \tau(2\gamma - 1)I, \quad W_2 = \tau(2\gamma - 1)I, \quad (8)$$

где I — единичная матрица; $0 \leq \gamma \leq 1$ — весовой коэффициент. В этом случае уравнения (6) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j+1} + \mathbf{v}_j + h^{-1}(\tau I + \Gamma_1)\Lambda(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j) &= 2\mathbf{v}_{j+1/2}(t), \\ \mathbf{v}_{j+1/2}'' &= \gamma\mathbf{v}_{j+1/2}(t + \tau) + (1 - \gamma)\mathbf{v}_{j+1/2}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

При выполнении условий

$$(\tau I + \Gamma_1)|\Lambda| = hI, \quad \Gamma_1 = \gamma_{kj}\delta_{kj}, \quad \gamma_{kk} = h/|\lambda_{kk}| - \tau \quad (10)$$

значения $\mathbf{v}_j$ в первом уравнении (9) не зависят от значений $\mathbf{v}_{j+1}$ и вычисляются по явным формулам

$$\mathbf{v}_j = 0,5(I + \text{sign } \Lambda)\mathbf{v}_{j-1/2}(t) + 0,5(I - \text{sign } \Lambda)\mathbf{v}_{j+1/2}(t), \quad (11)$$

где $\text{sign } \Lambda = \text{sign } (\lambda_{kj})\delta_{kj}$.

Уравнения (11) совпадают с уравнениями для определения “больших” величин в схеме Годунова, аппроксимирующей систему (2) при $F = 0$.

Схема II. Можно уменьшить число констант диссипации и тем самым упростить анализ неотрицательности диссипации, потребовав выполнения условия кососимметричности матрицы констант диссипации [9, 10]

$$W_1 + \Gamma_2 = 0. \quad (12)$$

Это условие будет выполнено, если положить

$$\Gamma_1 = \gamma_{kj}\delta_{kj}, \quad W_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad W_2 = 0. \quad (13)$$

В схеме II, в отличие от схемы I, вычисление узловых значений вектор-функции $\mathbf{v}_j$ в первом уравнении (6) (шаг предиктор) зависит от аппроксимации младших членов, которые на шаге корректор (уравнения (4)) принимаются равными значениям на среднем слое по времени.

Схема III. В схеме III матрицы констант диссипации выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли условию (12), но для определения величин $\mathbf{v}_j$ используются уравнения, совпадающие с уравнениями (11) в схеме Годунова. Константы диссипации принимаются в следующем виде:

$$\Gamma_1 = \gamma_{kj}\delta_{kj}, \quad W_1 = -\tau I, \quad \Gamma_2 = \tau I, \quad W_2 = 0. \quad (14)$$

Из (6), (14) следует, что в схеме III величину $\mathbf{v}_{j+1/2}''$ нельзя интерпретировать как аппроксимацию искомой вектор-функции на некотором слое по времени в промежутке $[t, t + \tau]$. Поэтому схему III будем называть схемой с независимой аппроксимацией младших членов. Величины $\mathbf{v}_{j+1/2}(t + \tau)$ в схеме III вычисляются по формулам

$$\mathbf{v}_{j+1/2}(t + \tau) = (I - \tau F/2)(I + \tau F/2)^{-1}[T_0\mathbf{v}_{j+3/2}(t) + T_1\mathbf{v}_{j+1/2}(t) + T_2\mathbf{v}_{j-1/2}(t)].$$

3. Исследование свойств схем аппроксимации недифференциальных членов динамических уравнений. В основе численных методов решения динамических задач механики сплошных сред лежит какая-либо схема численного решения задачи Коши для одномерного уравнения переноса, на которые расщепляются системы уравнений гиперболического типа:

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u &= 0, & \alpha &= \text{const}, & \alpha &\geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & -\infty &< x < \infty, & t &\geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Свойства построенных выше схем исследуются на примере решения задачи (15) [11].

Общее решение задачи (15) имеет вид

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} \varphi(x - t). \quad (16)$$

Решение (16) описывает перенос частиц по характеристикам при наличии поглощения ($\alpha > 0$). Приведем некоторые свойства построенных выше численных схем.

Рассмотрим достаточные условия диссипативности (а следовательно, и устойчивости в энергетической норме) и монотонности [12] предложенных схем.

Схема I диссипативна при $\tau \leq (2\gamma - 1)/h$ и $1/2 < \gamma \leq 1$ и монотонна при $\tau \leq h/(1 + \Delta_h)$, где $\Delta_h \sim (1 - \gamma)h$.

Схема II диссипативна при $\tau \leq h/(1 - ha/2)$ и монотонна при $\tau/h \leq 1 - \tau^2 a^2/4$.

Схема III диссипативна и монотонна при $\tau \leq h$ и $a\tau \leq 2$.

Следует отметить, что для схемы с независимой аппроксимацией младших членов (схема III) условие ее устойчивости в энергетической норме совпадает с условием монотонности. Аналогичным свойством обладает схема I при $\gamma = 1$, что соответствует аппроксимации младшего члена с верхнего слоя по времени. При $\gamma < 1$ и $\tau = h$ схема становится немонотонной. При этом максимальная величина отношения $R = \tau/h$, допускаемая условиями диссипативности и монотонности, совпадает с максимальным значением $R = 1$ в условии Куранта для схемы, аппроксимирующей задачу (15) в случае отсутствия ($\alpha = 0$) недифференциальных членов. Аналогичным свойством обладает схема I при $\gamma = 1$, что соответствует аппроксимации младшего члена с верхнего слоя по времени. При $\gamma < 1$ и $\tau = h$ схема I становится немонотонной.

Таким образом, для получения монотонных численных решений задачи (15) с максимально возможным шагом по времени τ более предпочтительным является использование схемы III и схемы I при $\gamma = 1$. Однако при $\tau = h$ схема III обладает меньшей аппроксимационной вязкостью, чем схема I. Действительно, как следует из условий (7), (10), (13) для уравнения (15), решение, получаемое по схеме III, в случае $\tau = h$ является консервативным ($Q = 0$), в то время как решение по схеме I ($\gamma = 1$) характеризуется наличием искусственной диссипации, величина которой может быть найдена из (7), (8), (10), и имеет вид

$$Q = \int_{\Omega} \frac{\tau}{2} \alpha^2 u_{i+1/2}^2(t + \tau) d\Omega > 0.$$

Можно показать, что схемы I, II и III не только устойчивы, но и хорошо обусловлены: ошибки начальных данных убывают при $\tau \rightarrow \infty$.

Для задачи (15) стационарное решение имеет вид

$$u(x, t) = A e^{-\alpha x}, \quad A = \text{const}. \quad (17)$$

Приведем выражения для собственных чисел ρ^k операторов перехода с одного временного слоя на другой для предложенных схем в случае, когда в качестве начального условия задано стационарное решение (17):

$$\begin{aligned} \rho^1 &= \Delta_1 [1 - \tau(1 - \gamma) - R(1 - e^{ah})], \\ \rho^2 &= \Delta_2 [1 - \tau^2 a^2/4 - R(1 - e^{ah})], \quad \rho^3 = \Delta_3 [1 - R(1 - e^{ah})]. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_1 = (1 + \tau\gamma a)^{-1}$; $\Delta_2 = (1 + \tau a/2)^{-1}$; $\Delta_3 = (1 - \tau a/2)(1 + \tau a/2)^{-1}$.

При любом шаге по времени $\tau \leq h$ и любых значениях $\gamma \in [0, 1]$ (для схемы I) выполняются неравенства $\rho^1 > 1$ и $\rho^2 > 1$. Следовательно, при фиксированном шаге сетки численные решения, полученные с использованием схем I и II, могут существенно отличаться от точного решения.

Таким образом, схема III обладает рядом преимуществ при численном решении простейших уравнений переноса, на которые расщепляются системы дифференциальных уравнений гиперболического типа.

4. Нестационарное деформирование пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига (уравнения Тимошенко). Изложенные выше схемы можно использовать при решении одномерных смешанных задач для систем гиперболических уравнений нестационарного деформирования пластины с постоянными по толщине деформациями сдвига (модель Тимошенко). Система дифференциальных уравнений этой задачи записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \omega \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \varepsilon^{-1} Q, & \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial \omega}{\partial x},\end{aligned}$$

где W — прогиб срединной поверхности; ω — угол поворота поперечного сечения; Q — перерезывающая сила; M — момент; k — константа упругого материала; $\varepsilon = H^2/(12L^2)$; H , L — толщина и характерная длина пластины.

Сложность построения алгоритмов численного решения задач для уравнений типа уравнений Тимошенко обусловлена тем, что при достаточно больших временах распределение искомых функций по пространственной координате имеет колебательный характер. Для описания этих колебаний необходимо соответствующее измельчение разностной сетки. Если шаг сетки h не мал (по сравнению с толщиной пластины H), то при использовании устойчивых схем I, II возможно быстрое накопление ошибок аппроксимации и округления.

В качестве приближенного решения в элементарном прямоугольнике примем линейные функции

$$\begin{aligned}W &= W_0 + W_1 \eta, & Q &= Q_0 + Q_1 \eta, & \dots, \\ W' &= W'_0 + W'_1 \xi, & Q' &= Q'_0 + Q'_1 \xi, & \dots, \\ \omega'' &, & Q'' &,\end{aligned}\tag{18}$$

где $W_0, \dots, W'_0, \dots, \omega'', Q''$ — постоянные, удовлетворяющие в прямоугольнике Ω уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial Q'}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial W'}{\partial x} + \omega'' \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial M'}{\partial x} - \varepsilon^{-1} Q'', & \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial \omega'}{\partial x},\end{aligned}\tag{19}$$

начальным условиям

$$W|_{\eta=-1} = W_{j+1/2}, \quad Q|_{\eta=-1} = Q_{j+1/2}, \quad M|_{\eta=-1} = M_{j+1/2}, \quad \omega|_{\eta=-1} = \omega_{j+1/2},$$

граничным условиям на левой границе первой ячейки

$$(\alpha_1 W + \beta_1 Q)|_{\xi=-1} = f_1, \quad (\alpha_2 \omega + \beta_2 M)|_{\xi=-1} = f_2$$

и граничным условиям на правой границе последней ячейки

$$(\alpha_3 W + \beta_3 Q)|_{\xi=1} = f_3, \quad (\alpha_4 \omega + \beta_4 M)|_{\xi=1} = f_4.$$

На границах между ячейками выполнены условия сопряжения полиномов (18). Для значений этих функций на границах ячеек принимаются обозначения

$$W'|_{\xi=-1} = W_j, \quad W'|_{\xi=1} = W_{j+1}, \quad \dots\tag{20}$$

С использованием (18)–(20) получаем формулы для вычисления значений многочленов (18) $W^{j+1/2}$, $Q^{j+1/2}$, ... на верхнем слое по времени:

$$\begin{aligned} W^{j+1/2} &= W_{j+1/2} + (\tau/h)(Q_{j+1} - Q_j), \\ Q^{j+1/2} &= Q_{j+1/2} + (\tau k/h)(W_{j+1} - W_j) + \tau k \omega'', \\ \omega^{j+1/2} &= \omega_{j+1/2} + (\tau/h)(M_{j+1} - M_j) - (\tau/\varepsilon)Q'', \\ M^{j+1/2} &= M_{j+1/2} + (\tau/h)(\omega_{j+1} - \omega_j). \end{aligned}$$

В этом случае приближенный аналог энергетического тождества можно записать в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[W \frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + \varepsilon M \frac{\partial \omega'}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial W'}{\partial x} + \omega'' \right) \right] d\Omega + \iint_{\Omega} D d\Omega = \\ = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (W' Q' + \varepsilon M' \omega'), \end{aligned}$$

где D — мощность искусственной диссипации:

$$\begin{aligned} D = (Q'_0 - Q_0) \frac{\partial W'}{\partial x} + (W'_0 - W_0) \frac{\partial Q'}{\partial x} + \varepsilon (M'_0 - M_0) \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \\ + \varepsilon (\omega'_0 - \omega_0) \frac{\partial M'}{\partial x} + (\omega_0 - \omega'') Q'' + (Q'' - Q_0) \omega''. \end{aligned}$$

Схема I получается, если выбрать константы диссипации таким образом, чтобы уравнения совпадали с уравнениями, аппроксимирующими исходную систему при отсутствии младших членов.

Схеме II соответствует аппроксимация младших членов значениями искомого решения на среднем слое по времени.

Схема III строится таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- шаг предиктор совпадает с шагом предиктор в схеме I Годунова;
- матрица констант диссипации γ_{ij} является кососимметричной.

Все три схемы устойчивы при $\tau \leq h$. Можно показать, что при выполнении условия Куранта энергетическая норма оператора перехода в схеме III не возрастает и схема обладает свойством сильной устойчивости [13].

На рис. 1 приведена зависимость прогиба пластины от времени при ее деформировании под действием импульсной нагрузки. Граничные условия в безразмерных переменных имеют следующий вид: $W = 0$, $\omega = 0$ при $x = 0$; $Q = Q^*$, $\omega = 0$ при $x = 1$. Значение перерезывающей силы Q^* выбиралось таким образом, чтобы прогиб W в точке $x = 1$, соответствующий прогибу в точном решении статической задачи, был равен единице. По осям абсцисс и ординат отложены число шагов по времени t/τ и прогиб W в точке $x = 1$ соответственно. При проведении расчетов полагалось $\tau = h = 0,02$, $\varepsilon = 0,208 \cdot 10^{-3}$, $k = 0,3$.

Диссипация в схемах I, II построена таким образом, что с течением времени напряжения (усилия и моменты) стремятся к постоянным значениям, близким к значениям в статическом решении, а скорости стремятся к постоянным, но не равным нулю значениям, в результате чего происходит неограниченное увеличение прогиба пластины. Вследствие наличия в схеме III искусственной диссипации прогиб пластины, вычисленный с использованием этой схемы, при $t \rightarrow \infty$ стремится к прогибу, соответствующему статическому решению.

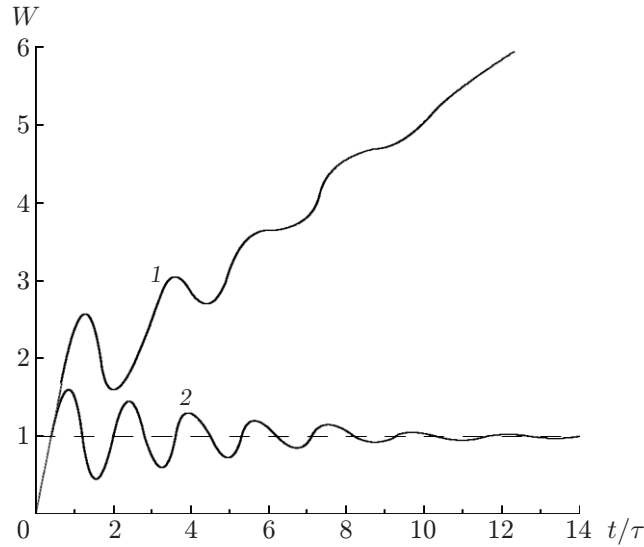


Рис. 1. Зависимость прогиба пластины от времени при ее деформировании под действием импульсной нагрузки ($\tau = h = 0,02$):

1 — решение, полученное с использованием схемы I при $\gamma = 1$, 2 — решение, полученное с использованием схемы III; штриховая линия — стационарное решение

5. Одномерное осесимметричное деформирование упругого цилиндра. В цилиндрической системе координат уравнения одномерного осесимметричного деформирования упругого цилиндра записываются в виде [14]

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (r \sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\varphi, \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} + b \frac{u}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \quad (21)$$

где σ_r , σ_φ — компоненты тензора напряжений; u — компонента скорости в радиальном направлении. Система уравнений (21) записана в безразмерном виде: величины σ_r и σ_φ отнесены к $\lambda + 2\mu$ (λ , μ — параметры Ламе); u — к скорости продольных упругих волн $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$; координата r — к характерному линейному размеру l (например, радиусу); время t — к величине l/c_p ; $b = \lambda/(\lambda + 2\mu)$.

Сформулируем следующую задачу: определить ограниченное решение системы (21), удовлетворяющее начальным условиям ($t = 0$)

$$u(0, r) = u^*(r), \quad \sigma_r(0, r) = \sigma_r^*(r), \quad \sigma_\varphi(0, r) = \sigma_\varphi^*(r) \quad (22)$$

и граничному условию при $r = 1$

$$[\alpha u + \beta(r \sigma_r)]|_{r=1} = f(t). \quad (23)$$

Из условия ограниченности решения при $r = 0$ получаем второе граничное условие

$$u|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=0} = \sigma_\varphi|_{r=0}. \quad (24)$$

Сформулированная задача отличается от плоской одномерной задачи тем, что система уравнений (21) содержит младшие, недифференциальные члены, коэффициенты при которых являются переменными и имеют особенность при $r = 0$.

При численном решении задачи (21) с краевыми условиями (23), (24) разобьем область (r, t) на прямоугольники Ω , в каждом из которых введем локальную систему коор-

динат (ξ, η) . Будем считать начальные данные (22) постоянными в Ω . В качестве приближенного решения в элементе Ω выберем следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r^1 \eta, & \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^1 \eta, & u &= u^0 + u^1 \eta, \\ T' &= T'_0 + T'_1 \xi, & u' &= u'_0 + u'_1 \xi, & u'' &, & \sigma_\varphi'' &,\end{aligned}\quad (25)$$

где $\sigma_r^0, \dots, u'', \sigma_\varphi''$ — постоянные, удовлетворяющие в Ω уравнениям

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial r} - \sigma_\varphi'', \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial r} + b \frac{u''}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} = b \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u''}{r}, \quad (26)$$

условию на правой границе наиболее удаленной от центра ячейки Ω

$$(\alpha u + \beta T')|_{\xi=1} = \hat{f} \quad (27)$$

($\hat{f}$ — среднее значение $f(t)$ на интервале времени длительности τ), условию на левой границе первой ячейки

$$u'|_{\xi=-1} = 0$$

и начальным условиям

$$u|_{\eta=-1} = u^*, \quad \sigma_r|_{\eta=-1} = \sigma_r^*, \quad \sigma_\varphi|_{\eta=-1} = \sigma_\varphi^*.$$

Если расчетная область представляет собой полый цилиндр, то в ближайшей к центру ячейке вместо условия (23) выполнено соотношение (27).

Из (25), (26) следуют выражения для неизвестных функций на среднем слое по времени ($\eta = 0$):

$$\begin{aligned}u^0 &= u^* + \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'', \\ \sigma_r^0 &= \sigma_r^* + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{b\tau}{2r} u'', & \sigma_\varphi^0 &= \sigma_\varphi^* + \frac{b\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\tau}{2r} u''\end{aligned}\quad (28)$$

и формулы для вычисления решения $\bar{u}$, $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ на верхнем слое по времени ($\eta = 1$):

$$\bar{u} = 2u^0 - u^*, \quad \bar{\sigma}_r = 2\sigma_r^0 - \sigma_r^*, \quad \bar{\sigma}_\varphi = 2\sigma_\varphi^0 - \sigma_\varphi^*.$$

Для определения констант $\partial T'/\partial r$, $\partial u'/\partial r$, u'' , σ_φ'' необходимо сформулировать дополнительные уравнения. Для этого запишем справедливое для функций (25), удовлетворяющих уравнениям (26), энергетическое тождество

$$\int_{\Omega} \left(u^0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_r^0 \frac{\partial u'}{\partial r} + \sigma_\varphi^0 \frac{u''}{r} \right) r d\Omega + \int_{\Omega} D d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial (T' u')}{\partial r} d\Omega,$$

где

$$D = (u'_0 - u^0) \frac{\partial T'}{\partial r} + (T'_0 - r\sigma_r^0) \frac{\partial u'}{\partial r} + (u^0 - u'')\sigma_\varphi'' + (\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^0)u''. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (29) и приравнявая выражения в скобках в (29) ко всем возможным комбинациям $\partial T'/\partial r$, $\partial u'/\partial r$, u'' , σ_φ'' , получаем четыре уравнения, необходимые для замыкания системы:

$$u'_0 - u^* - \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} + \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'' = \gamma_{11} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{12} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{13} \sigma_\varphi'' + \gamma_{14} u'',$$

$$\begin{aligned}
T'_0 - r\sigma_r^* - \frac{r\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{b\tau}{2} u'' &= \gamma_{21} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{22} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{23} \sigma_\varphi'' + \gamma_{24} u'', \\
u^* + \frac{\tau}{2r} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi'' - u'' &= \gamma_{31} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{32} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{33} \sigma_\varphi'' + \gamma_{34} u'', \\
\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi^* - \frac{b\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{\tau}{2r} u'' &= \gamma_{41} \frac{\partial T'}{\partial r} + \gamma_{42} \frac{\partial u'}{\partial r} + \gamma_{43} \sigma_\varphi'' + \gamma_{44} u''.
\end{aligned} \tag{30}$$

Младшие члены u'' , σ_φ'' можно принять равными значениям u^0 , σ_φ^0 на среднем слое по времени, как это сделано в [9].

Если в соотношениях (30) выполнены равенства

$$\begin{aligned}
u^* &= 0, & \sigma_r^* &= \sigma_\varphi^* = 1, & \frac{\partial u'}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial T'}{\partial r} &= 1, \\
u'' &= 0, & \sigma_\varphi'' &= 1, & u'_0 &= 0, & T'_0 &= r,
\end{aligned} \tag{31}$$

то статическое решение сохраняется при переходе с одного временного слоя на следующий. Для того чтобы были выполнены условия (31), можно соответствующим образом выбрать константы диссипации. Ограничимся случаем кососимметричных матриц ($\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, $i \neq j$). В этом случае мощность диссипации D определяется значением только диагональных элементов γ_{ii} :

$$D = \gamma_{11} \left(\frac{\partial T'}{\partial r} \right)^2 + \gamma_{22} \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \right)^2 + \gamma_{33} (\sigma_\varphi'')^2 + \gamma_{44} (u'')^2$$

и неотрицательна, если

$$\gamma_{ii} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (30), с учетом (32) получаем

$$\gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{33} = 0, \quad \gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{34} = -\gamma_{14} = 0, \quad \gamma_{23} = \gamma_{12}.$$

Выражая σ_φ'' , u'' из двух последних уравнений (30) и подставляя в два первых, имеем

$$u'_0 - \hat{u} = A_1 \frac{\partial T'}{\partial r} + A_2 \frac{\partial u'}{\partial r}, \quad T'_0 - \hat{\sigma} = B_1 \frac{\partial u'}{\partial r} + B_2 \frac{\partial T'}{\partial r},$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= u^* - \frac{\tau}{2rA} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) u^* + \frac{\gamma_{14}(1 - \gamma_{14})}{A} u^* - \frac{\tau}{2rA} (1 - \gamma_{14}) \sigma_\varphi^* - \frac{\tau \gamma_{14}}{2rA} \sigma_\varphi^*, \\
\hat{\sigma} &= 2\sigma_r^* + \frac{(1 - \gamma_{14})(\gamma_{24} + \tau b/2)}{A} u^* + \frac{\gamma_{12}}{A} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) u^* - \\
&\quad - \frac{\tau}{2rA} \left(\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2} \right) \sigma_\varphi^* + \frac{\gamma_{12}(1 - \gamma_{14})}{A} \sigma_\varphi^*, \\
A_1 &= \frac{\tau}{2r} - \frac{\tau}{2rA} \left[\frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) - \gamma_{14}(1 - \gamma_{14}) \right] + \frac{\tau}{2rA} \gamma_{14}, \\
A_2 &= \gamma_{12} - \frac{\tau}{2rA} \left[\gamma_{12} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) + (1 - \gamma_{14}) \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\gamma_{14}}{A} \left[\gamma_{12}(1 - \gamma_{14}) - \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \gamma_{22} + \frac{2\tau}{2} + \frac{\gamma_{24} + \tau b/2}{A} \left[\gamma_{12}(1 - \gamma_{14}) - \frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\gamma_{12}}{A} \left[\gamma_{12} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) + (1 - \gamma_{14}) \left(\frac{\tau b}{2} - \gamma_{24} \right) \right], \\
B_2 &= -\gamma_{12} + \frac{\tau}{2rA} \left(\gamma_{24} + \frac{\tau b}{2} \right) + \frac{\gamma_{12}}{A} \left[\frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) - \gamma_{14}(1 - \gamma_{14}) \right], \\
A &= (1 - \gamma_{14})^2 + \frac{\tau}{2r} \left(\frac{\tau}{2r} + \gamma_{44} \right) > 0.
\end{aligned}$$

Остальные пять констант определяются из условия симметричности схемы, ее явности и минимальности искусственной диссипации. Окончательно соотношения для расчета величин с целочисленными индексами на границах между ячейками принимают вид

$$\begin{aligned}
C_{j+1/2}T_j + V_j &= C_{j+1/2}\hat{\sigma}_{j+1/2} + \hat{u}_{j+1/2}, \\
C_{j+1/2}T_{j+1} - V_{j+1} &= C_{j+1/2}\hat{\sigma}_{j+1/2} - \hat{u}_{j+1/2},
\end{aligned} \tag{33}$$

где

$$C = \frac{\tau}{rhA}, \quad \hat{u} = \frac{1}{A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right), \quad \hat{\sigma} = r\sigma_r^* + \frac{\tau b}{2} u^*, \quad A = 1 + \frac{\tau^2}{4r^2}.$$

Производные в каждой ячейке вычисляются по формулам

$$\frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{1}{h} (T_{j+1} - T_j), \quad \frac{\partial u'}{\partial r} = \frac{1}{h} (V_{j+1} - V_j).$$

На верхнем слое по времени неизвестные функции определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= -u^* + \frac{2}{A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \frac{\tau}{rA} \frac{\partial T'}{\partial r} - \frac{\tau^2 b}{2r} \frac{\partial u'}{\partial r}, \\
\bar{\sigma}_r &= \sigma_r^* + \frac{b\tau}{rA} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \tau \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{b\tau^2}{2rA} \frac{\partial T'}{\partial r}, \\
\bar{\sigma}_\varphi &= \sigma_\varphi^* + \frac{\tau}{2A} \left(u^* - \frac{\tau}{2r} \sigma_\varphi^* \right) + \tau b \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\tau^2}{2rA} \frac{\partial T'}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Схема обладает неотрицательной искусственной диссипацией и, следовательно, устойчива, если

$$\tau^2 \left(1 + \frac{\tau^2 b^2}{4r^2} \right) \leq h^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{4r^2} \right).$$

С использованием соотношений (33), (34) получено решение уравнений (21), удовлетворяющее условиям

$$u(0, r) = \sigma_r(0, r) = \sigma_\varphi(0, r) = 0, \quad \sigma_r|_{r=1} = 1.$$

На рис. 2 приведено распределение радиальных напряжений по радиальной координате.

С использованием преобразования Лапласа по времени от неизвестных функций можно получить аналитическое решение задачи в окрестности фронта движущейся волны

$$\sigma^*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{2}{\pi} K \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right), \tag{35}$$

где $K(x)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Аналогично получаем выражение для u^* :

$$u^*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{2}{\pi} \left[2E \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right) - K \left(\sqrt{\frac{t}{2r}} \right) \right] \tag{36}$$

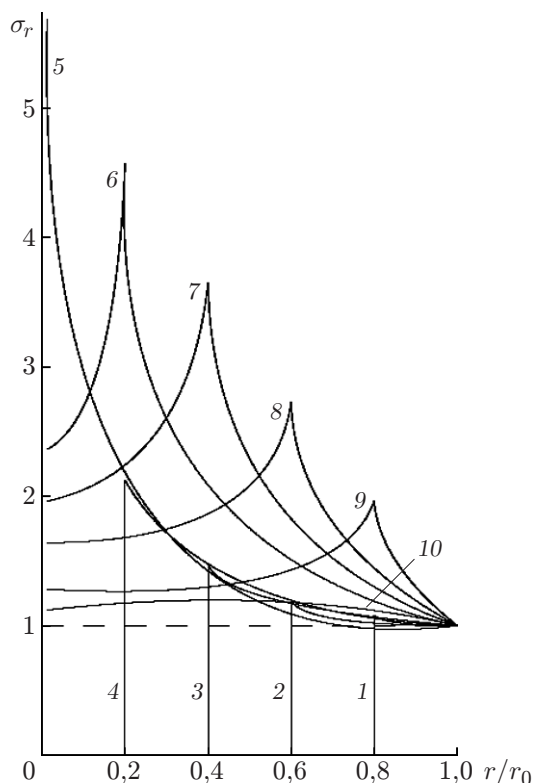


Рис. 2. Распределение радиальных напряжений по радиусу при осесимметричном деформировании цилиндра:

1–5 — профили упругой волны, движущейся к оси симметрии, 6–10 — профили волны, отраженной от оси симметрии; штриховая линия — стационарное решение

($E(x)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода). Из формул (35), (36) следует, что после отражения от оси симметрии волна движется с бесконечным значением амплитуды на фронте. Решение (35), (36) практически совпадает с полученным численным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271–306.
2. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, Н. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.
3. Колган В. П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 5. С. 1340–1345.
4. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. 4. A new approach to numerical convection // J. Comput. Phys. 1977. V. 23, N 3. P. 276–299.
5. Иванов Г. В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 49. С. 27–44.
6. Богульский И. О. Построение монотонной схемы решения задач для гиперболических уравнений. Красноярск, 1982. (Препр. / Вычисл. центр СО АН СССР; № 26).

7. **Богульский И. О.** Алгоритмы высокой точности решения многомерных задач динамики твердых тел // Тез. докл. междунар. конф. “Математические модели и численные методы механики сплошных сред”, Новосибирск, 27 мая — 2 июня 1996 г. Новосибирск: Изд-во СО РАН, С. 158–159.
8. **Иванов Г. В.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
9. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Алгоритм расщепления плоской задачи динамики упругого деформирования с учетом хрупкого разрушения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 61. С. 36–48.
10. **Анисимов С. А., Степаненко С. В.** Метод численного решения осесимметричных задач динамики многослойных тонких оболочек вращения // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; Ин-т теорет. и прикл. механики. 1990. Т. 4, № 4. С. 59–64.
11. **Анисимов С. А., Богульский И. О.** Алгоритм независимой аппроксимации нелинейных членов при численном решении краевых задач для систем гиперболических уравнений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1994. Вып. 109. С. 34–48.
12. **Иванов В. Л.** Метод аппроксимации систем гиперболических уравнений, содержащих большие параметры в нелинейных членах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 9. С. 1388–1394.
13. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. **Богульский И. О.** Асимптотическое поведение цилиндрических ударных волн вблизи оси симметрии. Красноярск, 1988. С. 16–20. (Препр. / Вычисл. центр СО АН СССР; № 2).

*Поступила в редакцию 2/III 2020 г.,
после доработки — 2/III 2020 г.
Принята к публикации 2/III 2020 г.*
