

УДК 519.676

Применение СДУ к оценке решения уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами*

С.А. Гусев

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
Email: sag@osmf.sccc.ru

Гусев С.А. Применение СДУ к оценке решения уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 147–161.

В работе предлагается использовать численное решение стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для нахождения оценок решений краевых задач для линейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами. В качестве приближения обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи берется решение краевой задачи со сглаженными коэффициентами. Приведены результаты расчетов для теплозащитного покрытия, содержащего композиционный материал с сотовым наполнителем.

DOI: 10.15372/SJNM20150204

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, разрывные коэффициенты, интегральное усреднение, диффузионный процесс, стохастические дифференциальные уравнения, метод Эйлера.

Gusev S.A. Application of SDE's to estimating the solution of heat equations with discontinuous coefficients // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 147–161.

This paper proposes the use of the numerical solution to stochastic differential equations (SDE's) to find estimates of the solutions to boundary value problems for linear parabolic equations with discontinuous coefficients. The solution of the problem with smoothed coefficients is taken as an approximation of the generalized solution to the considered boundary value problem. The results of calculations for a thermal barrier coating comprising a composite cellular material are presented.

Keywords: heat equation, discontinuous coefficients, integral averaging, diffusion process, stochastic differential equations, Euler method.

1. Введение

Необходимость решения уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами возникает при решении многих прикладных задач, связанных с переносом тепла в неоднородных средах. Например, при проектировании строительных сооружений требуется учитывать теплопроводность стен из бетона, кирпича и других строительных материалов. Задачи такого типа приходится также решать в технике при конструировании современных теплозащитных материалов, которые, как правило, имеют неоднородный состав. При этом часто требуется, чтобы такие материалы обладали не только хорошими теплозащитными свойствами, но и высокой прочностью. Такими являются композиционные материалы на основе сотовой конструкции, которые представляют собой твердый

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00340-а), научной программы «Ведущие научные школы» (НШ-5111.2014.1).

тонкий каркас в виде пчелиных сотов с наполнителем, обладающим очень низкой теплопроводностью.

Одним из направлений в численном моделировании процессов теплопередачи в неоднородных средах является использование методов, требующих построение сеток по пространственным переменным, которые учитывают все неоднородности [1–4]. При этом все особенности внутреннего строения тела, например сильно различные теплофизические свойства составляющих веществ и тонкие включения, должны учитываться при построении сеток. Все это плохо сказывается на трудоемкости решения таких задач.

Другим направлением в решении задач теплообмена в неоднородных средах является метод усреднения характеристик среды. Вопросам решения параболических уравнений для неоднородных сред на основе усреднения посвящено много теоретических работ и работ, содержащих решение практических задач, например [5–9]. Но и способ усреднения теплофизических свойств тоже не лишен недостатков, так как эти усредненные характеристики существенно могут зависеть от внутреннего строения тела и внешних факторов. Например, такая усредненная характеристика неоднородного тела как эффективная теплопроводность зависит от того, как направлен тепловой поток внутри тела относительно поверхностей раздела однородных составляющих [10].

Наиболее полное теоретическое исследование краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами стало возможным с появлением теории обобщенных функций и таких понятий как обобщенная производная, обобщенное решение дифференциального уравнения. Одними из первых работ по параболическим уравнениям в этом направлении являются работы О.А. Ладыженской, О.А. Олейник и их соавторов, см., например, [11–13]. Известно, что при некоторых условиях решения таких краевых задач устойчивы относительно вариаций коэффициентов и свободных членов. Используя это утверждение, можно аппроксимировать решение исходной задачи с разрывными коэффициентами решением краевой задачи, у которой коэффициенты в параболическом уравнении приближены гладкими функциями. В данной работе гладкая аппроксимация коэффициентов осуществляется на основе интегрального усреднения с бесконечно дифференцируемым финитным ядром. При этом в качестве оценки решения задачи с гладкими коэффициентами берется оценка его вероятностного представления, определяемая на основе численного решения СДУ. В качестве доводов в пользу применения СДУ следует отметить, что, в отличие от сеточных методов, отсутствует необходимость строить сетку по пространственным переменным. Также статистические методы распараллеливаются с очень высокой эффективностью, и для решения задач может применяться суперкомпьютерная техника.

2. Постановка задачи

Пусть задана связная ограниченная область $G \subset R^d$ границей ∂G . Обозначим $Q_T \equiv (0, T) \times G$ — цилиндр в \mathbb{R}^{d+1} , определенный для некоторого заданного интервала $(0, T)$. В данной работе мы рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{i,j}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T. \quad (1)$$

Предполагается, что область G представляет собой объединение конечного числа непересекающихся подобластей $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$, в каждой из которых коэффициенты b_{ij} , a_i

удовлетворяют условию Липшица равномерно по t , но при переходе из одной подобласти в другую эти коэффициенты могут терпеть разрыв первого рода. Для целей данной статьи достаточно рассмотреть тот случай, когда поверхности раздела подобластей G_i не зависят от переменной t и отстоят от границы ∂G на некотором положительном расстоянии. Также будем считать выполненным условие равномерной параболичности

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 \sum_{i=1}^d \xi_i^2, \quad (2)$$

где $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ — константы.

Пусть при $t = 0$ задано начальное условие

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (3)$$

а на ∂G — первое краевое условие

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (4)$$

Ниже приведены обозначения и определения функциональных пространств (см. [13, гл. 1]), которые используются в работе:

$\|f\|_{q,G} = \left(\int_G |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$ — норма пространства $L_q(G)$, $q \geq 1$;

$L_{q,r}(Q_T)$, $q \geq 1$, $r \geq 1$, — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Q_T функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_G |u|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}};$$

$W_2^{1,0}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left(uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx dt;$$

$W_2^{1,1}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left(uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx dt;$$

$V_2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{2,G} + \|u_x\|_{2,Q_T},$$

где $\|u_x\|_{2,Q_T} = \left(\int_{Q_T} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$;

$V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $V_2(Q_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(G)$, норма которых определяется равенством

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t, x)\|_{2,G} + \|u_x\|_{2,Q_T}.$$

При выводе некоторых оценок ниже будет использовано свойство произвольной функции u из $V_2(Q_T)$ (см. [13, с. 89]):

$$\|u\|_{q,r,Q_T} \leq \beta \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (5)$$

При этом параметры q и r удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{d}{2q} &= \frac{d}{4}, \\ r \in [2, \infty), \quad q \in \left[2, \frac{2d}{d-2}\right] &\text{ при } d > 2, \\ r \in [2, \infty), \quad q \in [2, \infty) &\text{ при } d = 2, \\ r \in [4, \infty), \quad q \in [2, \infty] &\text{ при } d = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Константа β в (5) зависит от d и q , ее значения для разных вариантов d , q даны в [13, гл. II].

Будем предполагать, что задача (1), (3), (4) имеет единственное решение в пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$. Достаточным для этого является выполнение данных в [13] условий, а именно: условие равномерной параболичности (2), $\varphi \in L_2(G)$ и условий конечности норм

$$\left\| \sum_{i=1}^d a_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q_T} \leq \mu_1, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{d}{2q_1} = 1, \quad (7)$$

где $q_1 \in (\frac{d}{2}, \infty)$, $r_1 \in [1, \infty)$ при $d \geq 2$; $q_1 \in [1, \infty)$, $r_1 \in [1, 2]$ при $d = 1$;

$$\|f\|_{q_2, r_2, Q_T} \leq \mu_2, \quad \frac{1}{r_2} + \frac{d}{2q_2} = 1 + \frac{d}{4}, \quad (8)$$

где $q_2 \in [\frac{2d}{d+2}, 2]$, $r_2 \in [1, 2]$ при $d \geq 3$; $q_2 \in (1, 2]$, $r_2 \in [1, 2)$ при $d = 2$; $q_2 \in [1, 2]$, $r_2 \in [1, 4/3]$ при $d = 1$.

Следуя определению, данному в [13], обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$ назовем функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, обращающуюся в ноль на боковой поверхности цилиндра Q_T , для которой при почти всех $t_1 \in [0, T]$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \int_G u(t_1, x) \eta(t_1, x) dx - \int_0^{t_1} \int_G u \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt + \int_0^{t_1} \int_G \left[\sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \left(\sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f \right) \eta \right] dx dt \\ &= \int_G \varphi(x) \eta(x, 0) dx \end{aligned}$$

при всех $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю на $[0, T] \times \partial G$, и при $t = 0$.

Как утверждается в [13, гл. III, теорема 4.5], обобщенное решение задачи (1), (3), (4) в норме пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ устойчиво относительно вариаций коэффициентов и свободных членов уравнения (1). Согласно этой теореме, если при $m \rightarrow \infty$ равномерно ограниченная последовательность $b_{ij}^{(m)}$ сходится почти всюду к b_{ij} , а функции $a_i^{(m)}$, $f^{(m)}$ сходятся к a_i , f соответственно в нормах (7), (8), тогда обобщенные решения задач с коэффициентами $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и правыми частями $f^{(m)}$ сходятся сильно в норме $V_2^{1,0}(Q_T)$ к обобщенному решению задачи (1), (3), (4).

Таким образом, при достаточно больших значениях m приближенное решение $u^{(m)}$ задачи (1), (3), (4) с разрывными коэффициентами и правой частью можно получить, если решать задачу, в которой в уравнении (1) эти функции заменены на их гладкие аппроксимации $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и $f^{(m)}$ соответственно. В данной работе предлагается в качестве такой замены этих функций использовать в окрестности поверхностей разрыва их интегральные усреднения с бесконечно дифференцируемым финитным ядром [14]:

$$g^{(m)}(x) = \int_{|x-y|<\rho_m} \omega_{\rho_m}(|x-y|)g(y) dy = \frac{1}{\rho_m^d} \int_{|x-y|<\rho_m} \omega_1\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right)g(y)dy. \quad (9)$$

При этом $\omega_1(|\xi|) = 0$ при $|\xi| \geq 1$; $\int_{|\xi|\leq 1} \omega_1(|\xi|) d\xi = 1$. Предполагается, что $\rho_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Известно [14, 15], что функции $g^{(m)}$ имеют все производные любого порядка; если функции $g \in L_q(G)$, то для любой подобласти $G' \subset G$, отстоящей от границы ∂G на расстоянии не меньшем ρ_m , усреднение $g^{(m)}$ сходится к g в $L_q(G')$:

$$\|g^{(m)} - g\|_{q,G'} \leq \sup_{|v|\leq\rho_m} \left(\int_{G'} |g(x-v) - g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Отметим, что одним из требований сходимости приближенного решения, указанных выше, является сходимость почти всюду коэффициентов $b_{ij}^{(m)}$ к b_{ij} при $m \rightarrow \infty$.

Так как при любом фиксированном $t \in [0, T]$ функции b_{ij} есть элементы $L_q(G)$, то аппроксимации $b_{ij}^{(m)}$ сходятся к b_{ij} в норме пространства $L_q(G)$. Известно также, что сходимость в $L_q(G)$ влечет сходимость по мере, а из сходящейся последовательности функций по мере можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду [16]. Причем в [16] дан конструктивный метод построения такой подпоследовательности. В связи со сказанным, далее будем считать, что такая подпоследовательность выбрана и это есть последовательность $\{b_{ij}^{(m)}\}$.

Далее в статье используется обозначение P_m для краевой задачи (1), (3), (4) со сглаженными в результате интегрального усреднения (9) функциями $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и $f^{(m)}$:

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{i,j}^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i} + f^{(m)} = 0, \quad (11)$$

$$u^{(m)}(0, x) = \varphi(x), \quad (12)$$

$$u^{(m)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (13)$$

Гладкость коэффициентов задачи P_m позволяет находить оценку ее решения на основе численного решения СДУ.

3. Сходимость приближенного решения краевой задачи и его статистическая оценка

В данном пункте рассматриваются вопросы точности аппроксимации краевой задачи (1), (3), (4) при интегральном усреднении ее коэффициентов и свободных членов. Обозначим $v^{(m)} \equiv u^{(m)} - u$ — погрешность приближенного решения. Взяв разность уравнений (11) и (1), после преобразований получим уравнение для функции $v^{(m)}$:

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i^{(m)}}{\partial x_i} = 0, \quad (14)$$

где $f_i^{(m)} \equiv \sum_{j=1}^d (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $f_0^{(m)} \equiv \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)} - a_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f^{(m)} - f$. Функция $v^{(m)}$ удовлетворяет нулевым начальному и граничному условиям:

$$v^{(m)}(0, x) = 0, \quad x \in G, \quad (15)$$

$$v^{(m)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (16)$$

Краевая задача (14)–(16) удовлетворяет всем условиям существования обобщенного решения, данным в [13].

При доказательстве нижеследующих утверждений в данном пункте используются методика и вспомогательные утверждения из книги [13, гл. II, III], которые применяются для нахождения $\max_{Q_T} |u|$.

Зададим функцию $v^{(m,k)} = \max\{0; v^{(m)} - k\}$ и определим множество $A_k(t) = \{x | v^{(m)}(t, x) > k\}$.

Лемма. Пусть выполнены условия (2), (7), (8), $\varphi \in L_2(G)$. Тогда имеет место сходимость $\|v^{(m,k)}\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Следующее равенство для произвольного отрезка $[t_{l-1}, t_l] \subseteq [0, T]$ получается на основе уравнения (14) аналогично равенству (7.6) из [13, гл. III, с. 215]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t, x)]^2 dx \Big|_{t=t_{l-1}}^{t=t_l} + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left[\sum_{i,j=1}^d b_{ij} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + \right. \\ \left. \left(\sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} \right) v^{(m,k)} \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом (2) получим из (17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_l, x)]^2 dx + \alpha_0 \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \\ \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left[\sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} \right) v^{(m,k)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим слагаемые в правой части (18). С помощью неравенства Коши:

$$ab \leq \frac{\kappa}{2} a^2 + \frac{1}{2\kappa} b^2, \quad \kappa \geq 0, \quad (19)$$

и неравенства Гельдера получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} dx dt \leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d |f_i^{(m)}| \cdot \left| \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right| dx dt \\ \leq \frac{1}{\alpha_0} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d (f_i^{(m)})^2 dx dt + \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \\ \leq \frac{1}{\alpha_0} \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{q} = \frac{q}{q-1}$; $\bar{r} = \frac{r}{r-1}$; $\mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) = \left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} (\text{mes} A_k(t))^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}$; $\text{mes} A$ — мера Лебега множества A .

Следующее неравенство для слагаемого, содержащего $f_0^{(m)}$, в правой части (18) получается с помощью неравенства (19) при некотором $\nu_1 > 0$:

$$\begin{aligned} - \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} f_0^{(m)} v^{(m,k)} dx dt &\leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} |f_0^{(m)} v^{(m,k)}| dx dt \\ &\leq \frac{\nu_1}{2} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} (f_0^{(m)})^2 dx dt + \frac{1}{2\nu_1} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_G (v^{(m,k)})^2 dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части (21) с помощью неравенства Гельдера:

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} (f_0^{(m)})^2 dx dt \leq \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \| (f_0^{(m)})^2 \|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T}. \quad (22)$$

Используя неравенство (3.7) из [13, с. 91], возведенное в квадрат, найдем оценку второго интеграла в правой части (21):

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_G (v^{(m,k)})^2 dx dt \leq \beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}} \| v^{(m,k)} \|_{V_{2(Q_{t_{l-1}, t_l})}^{1,0}}^2, \quad (23)$$

где Q_T^0 — множество точек $(t, x) \in Q_T$, в которых $|v^{(m,k)}| > 0$; $Q_{t_{l-1}t_l} \equiv [t_{l-1}, t_l] \times G$.

Выберем константу ν_1 в (21) из равенства

$$\frac{\beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}}}{2\nu_1} = \frac{1}{4} \min(1, \alpha_0),$$

в результате получим $\nu_1 = \frac{2\beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}}}{\min(1, \alpha_0)}$.

Следующее неравенство получается также с использованием неравенства Коши, неравенства Гельдера и неравенства (5):

$$\begin{aligned} - \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} v^{(m,k)} dx dt &\leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left| \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} v^{(m,k)} \right| dx dt \\ &\leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left(\frac{\alpha_0}{4} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 (v^{(m,k)})^2 \right) dx dt \\ &\leq \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt + \frac{1}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \left\| v^{(m,k)} \right\|_{2q_1, 2r_1, Q_{t_{l-1}t_l}}^2 \\ &\leq \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt + \frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \left\| v^{(m,k)} \right\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где $q_1 > 1$, $r_1 > 1$ такие, что $2q_1, 2r_1$ удовлетворяют условиям (6).

На основе неравенств (18)–(24) получаем следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \min\{1, \alpha_0\} \left\| v^{(m,k)} \right\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \left(\frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\nu_1}{2} \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right) + \\ & \quad \frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \left\| v^{(m,k)} \right\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}. \end{aligned} \quad (25)$$

Выберем длину отрезка $[t_{l-1}, t_l]$ так, чтобы $\frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}}$ было меньше $\frac{1}{4} \min\{1, \alpha_0\}$, например,

$$\frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \leq \frac{1}{8} \min\{1, \alpha_0\}. \quad (26)$$

Тогда из (25) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \min\{1, \alpha_0\} \left\| v^{(m,k)} \right\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \left(\frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\nu_1}{2} \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Зададим на отрезке $[0, T]$ сетку $S = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N\}$ такую, что $t_0 = 0$, $t_N = T$ и чтобы для любой пары соседних узлов выполнялось условие (26). Тогда с учетом того, что $v^{(m,k)}(0, x)|_{x \in G} = 0$, из вывода неравенств (27) следует следующее неравенство:

$$\left\| v^{(m,k)} \right\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}^2 \leq \mu_{q,r,k}(0, T) \left(C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right), \quad (28)$$

где $C_1 = \frac{8}{\alpha_0 \min\{1, \alpha_0\}}$, $C_2 = \frac{4\beta^2\nu_1}{\min\{1, \alpha_0\}}$.

Из сходимости $\|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \rightarrow 0$, $\|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ следует доказательство леммы. \square

Теорема. Пусть выполнены условия леммы. Тогда для заданного уровня погрешности приближенного решения ε существует такое значение параметра m_ε , что при всех $m \geq m_\varepsilon$:

$$\operatorname{vrai} \max_{Q_T} |v^{(m)}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть ε — заданный уровень погрешности. Зададим последовательность уровней $\varepsilon_l = \frac{\varepsilon}{2}(2 - 2^{-l})$ ($l = 0, 1, \dots$). Тогда для некоторых q, r , которые возьмем удовлетворяющими условиям (6), выполняется неравенство

$$(\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) \mu_{q,r,\varepsilon_{l+1}}(0, T) \leq \left\| v^{(m,\varepsilon_l)} \right\|_{q,r,Q_T}. \quad (29)$$

Будем предполагать, что при некоторых значениях m величина погрешности превышает порог $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $\mu_{q,r,\varepsilon_0}(0, T) \neq 0$. Для правой части (29) из неравенства (5) следует оценка

$$\|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{q,r,Q_T} \leq \beta \|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (30)$$

С другой стороны, из неравенства (28) следует, что для некоторых $q' > 1$, $r' > 1$:

$$\|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq \mu_{q',r',\varepsilon_l}^{\frac{1}{2}}(0, T) \left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

где $\bar{q}' = \frac{q'}{q'-1}$, $\bar{r}' = \frac{r'}{r'-1}$.

Выберем параметры q' , r' из условий: $\frac{r'}{q'} = \frac{r}{q}$, $\frac{1}{2r'} = \frac{1+\varrho}{r}$, где $\varrho > 0$. Получаем

$$q' = \frac{q}{2(1+\varrho)}, \quad r' = \frac{r}{2(1+\varrho)}. \quad (32)$$

Из (29)–(32) следует

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) \mu_{q,r,\varepsilon_{l+1}}(0, T) \\ & \leq (\mu_{q,r,\varepsilon_l}(0, T))^{1+\varrho} \left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для выражения $\sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T}$, которое присутствует в правой части (33), запишем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} &= \sum_{i=1}^d \left\| \left(\sum_{j=1}^d (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} \\ &= \sum_{i=1}^d \left\| \sum_{j=1}^d (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}',2\bar{r}',Q_T}^2 \leq \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \left\| (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}',2\bar{r}',Q_T} \right)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее применим неравенство Гельдера:

$$\left\| (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}',2\bar{r}',Q_T}^2 \leq \|b_{ij} - b_{ij}^{(m)}\|_{2\bar{q}'\lambda,2\bar{r}'\mu,Q_T}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}'\bar{\lambda},2\bar{r}'\bar{\mu},Q_T}^2, \quad (35)$$

где $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} = 1$, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\bar{\mu}} = 1$, $\lambda, \mu \geq 1$.

Функции $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$, $f^{(m)}$ сходятся при $m \rightarrow \infty$ соответственно к b_{ij} , a_i , f в пространствах $L_{2\bar{q}'\lambda,2\bar{r}'\mu,Q_T}$, L_{q',r',Q_T} . Поэтому для $\delta > 0$ существует целое число m_δ такое, что при $m \geq m_\delta$ выполняется неравенство

$$\left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}',\bar{r}',Q_T} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta. \quad (36)$$

Для краткости записи формул обозначим $\bar{\mu}_l = \mu_{q,r,\varepsilon_l}(0, T)$. Из (33), (36) получаем при $m \geq m_\delta$:

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq 2^{l+2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right) (\bar{\mu}_l)^{1+\varrho}. \quad (37)$$

На основании (37) имеем

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq 2^{\sum_{j=0}^l (l+2-j)(1+\varrho)^j} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\sum_{j=0}^l (1+\varrho)^j} (\bar{\mu}_0)^{(1+\varrho)^{l+1}}. \quad (38)$$

С использованием формулы суммы геометрической прогрессии находим показатели степеней 2 и $\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ в (38):

$$\sum_{j=0}^l (l+2-j)(1+\varrho)^j = \frac{(1+\varrho)^{l+1} - 1}{\varrho} \frac{2\varrho+1}{\varrho} - \frac{l+1}{\varrho}; \quad \sum_{j=0}^l (1+\varrho)^j = \frac{(1+\varrho)^{l+1} - 1}{\varrho}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq \left(2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varrho}} \bar{\mu}_0\right)^{(1+\varrho)^{l+1}} 2^{\left(-\frac{2\varrho+1}{\varrho^2} - \frac{l+1}{\varrho}\right)} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\varrho}}. \quad (39)$$

Из (39) следует, что $\bar{\mu}_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, если $2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varrho}} \bar{\mu}_0 \leq 1$. Отсюда находим условие для определения радиуса ядра усреднения: при заданном уровне погрешности ε величина ρ_m должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство (36) для δ , удовлетворяющего неравенству

$$\delta \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\bar{\mu}_0 2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}}}\right)^{\varrho}, \quad (40)$$

т. е.

$$\left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\bar{\mu}_0 2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}}}\right)^{\varrho}. \quad (41)$$

Аналогичные рассуждения можно проделать для функции $-v^{(m)}$, т. е. существует номер m_ε , соответствующий уровню погрешности ε такой, что при $m \geq m_\varepsilon$ $\forall \text{гаи} \max_{Q_T} \times |v^{(m)}| < \varepsilon$. \square

Для нахождения статистических оценок решения задачи P_m с использованием численного решения СДУ требуется привести эту задачу к задаче с обратным временем. Это делается с помощью замены переменной времени $s = T - t$. Определим функцию $\tilde{u}(s, x) \equiv u^{(m)}(T - s, x)$ и преобразуем задачу P_m к краевой задаче относительно \tilde{u} :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \sum_{i,j=1}^d b_{i,j}^{(m)}(T-s, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \tilde{a}_i^{(m)}(T-s, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + f^{(m)}(T-s, x) = 0, \quad (42)$$

$$\tilde{a}_i^{(m)}(T-s, x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial b_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}(T-s, x) + a_i^{(m)}(T-s, x).$$

$$\tilde{u}|_{s=T} = \varphi(x), \quad \tilde{u}|_{\partial G} = 0. \quad (43)$$

Уравнению (42) мы ставим в соответствие векторное СДУ:

$$X_r = x + \int_s^r \tilde{a}^{(m)}(T-v, X_v) dv + \int_s^r \sigma^{(m)}(T-v, X_v) dW_v, \quad (44)$$

где $\tilde{a}^{(m)}$ — вектор с компонентами $\tilde{a}_i^{(m)}$; $\sigma^{(m)}$ — матрица такая, что $2\sigma^{(m)}(\sigma^{(m)})^\top = B^{(m)}$, $B^{(m)} \equiv (b_{ij}^{(m)})$; W — винеровский процесс.

Нахождение оценок решения задачи (1), (3), (4) осуществляется на основе вероятностного представления решения задачи (42), (43) (см., например, [17, гл. VIII]):

$$\tilde{u}(T-s, x) = E_{s,x} \left[\varphi(X_T) \chi_{\tau > T} + \int_t^{T \wedge \tau} f^{(m)}(T-v, X_v) dv \right]. \quad (45)$$

В (45) использованы следующие обозначения: $E_{s,x}$ — математическое ожидание относительно вероятностной меры $P_{s,x}$, соответствующей случайному процессу, исходящему в момент времени s из точки x ; $\tau = \inf\{v | v > s, X_v \notin G\}$ — время первого выхода X из области; χ_A — индикаторная функция множества A .

В данном пункте для краткости написания формул упростим обозначения коэффициентов в СДУ (44) и будем считать, что уравнение (44) имеет вид

$$X_r = x + \int_s^r a(v, X_v) dv + \int_s^r \sigma(v, X_v) dW_v. \quad (46)$$

Численное решение СДУ (44) в работе осуществляется методом Эйлера. Для этой цели требуется задать узлы сетки на $[s, T]$: $s_i = s + hi$ ($i = 0, \dots, N$), $h = \frac{T-s}{N}$. Моделирование траекторий случайного процесса X в узлах этой сетки осуществляется по схеме

$$\bar{X}_{s_{i+1}} = \bar{X}_{s_i} + h\tilde{a}^{(m)}(T-s_i, \bar{X}_{s_i}) + \sqrt{h}\sigma^{(m)}(T-s_i, \bar{X}_{s_i})\xi^i, \quad (47)$$

где ξ^i есть d -мерный вектор, компонентами которого являются независимые стандартные нормальные случайные величины.

Обозначим $\tau^N = \inf\{s_i : \bar{X}_{s_i} \notin G\}$ и i^τ — соответствующий номер узла, т. е. $s_{i^\tau} = \tau^N$.

Для всех $(s, x) \in (0, T) \times G$ приближенные значения $\tilde{u}(T-s, x)$ будем определять по формуле

$$\tilde{u}^N(T-s, x) = E_{s,x} \left[\varphi(\bar{X}_{s_N}) \chi_{\tau^N > s_N} + \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > s_i} f^{(m)}(T-s_i, \bar{X}_{s_i})(s_{i+1} - s_i) \right]. \quad (48)$$

В работе [18] для диффузионных процессов в областях с поглощающими границами при вычислениях методом Эйлера установлено, что получаемая точность оценки математических ожиданий вида $E_{s,x}[\varphi(\bar{X}_{s_N}) \chi_{\tau^N > s_N}]$ есть величина порядка $O(\sqrt{h})$. В то же время известно, см., например, [19], что в отсутствие границ математические ожидания вида $E_{s,x}[\varphi(\bar{X}_{s_N})]$ сходятся с первым порядком. Утверждается, что потеря точности происходит из-за того, что в окрестности границы есть вероятность того, что численная аппроксимация на одном шаге может оставаться внутри области, а сам диффузионный процесс может выйти из области и снова в нее зайти. Это обстоятельство в процессе расчетов можно учесть путем моделирования случайного выхода диффузионного процесса из области, который может произойти в течение одного шага по времени, в случае если имеется достаточно точная оценка вероятности его выхода. В работе [20] получена такая оценка для полуплоскости

$$p_i = 1 - \exp\left(-2 \frac{(n, (\bar{X}_{s_i} - z))(n, (\bar{X}_{s_{i+1}} - z))}{h(n, ([\sigma^m(\sigma^m)^T(\bar{X}_{s_i})]n))}\right), \quad (49)$$

где n — единичная внутренняя нормаль к границе в точке ортогональной проекции \bar{X}_{s_i} , z — ортогональная проекция \bar{X}_{s_i} на границу.

В [21] был разработан алгоритм, в котором использовалась формула (49) для моделирования возможного выхода процесса X из области. При этом предполагалось, что граница области достаточно гладкая, и в качестве полуплоскости бралась полуплоскость, соответствующая касательной плоскости в точке z .

Согласно алгоритму [21], если \bar{X}_{s_i} , $\bar{X}_{s_{i+1}}$ находятся на значительном вне заданной окрестности границы, то вероятность выхода X из области мала, и проверка не производится.

Если точка $\bar{X}_{s_{i+1}}$ находится вне области, то траектория заканчивается.

Если \bar{X}_{s_i} , $\bar{X}_{s_{i+1}}$ находятся в заданной окрестности границы, то разыгрывается выход X согласно формуле (49). В случае если выход произошел, то траектория заканчивается. В противном случае вычисления продолжаются.

В [21] доказан первый порядок точности этого алгоритма. В расчетах для сотовой панели, которые представлены в следующем пункте, был использован описанный выше алгоритм.

4. Расчет теплообмена в сотовой теплозащитной панели

Сотовая теплозащитная панель представляет собой конструкцию, состоящую из двух тонких пластин, между которыми заключен каркас в виде пчелиных сот, заполненных некоторой субстанцией с низкой теплопроводностью, см. рис. 1.

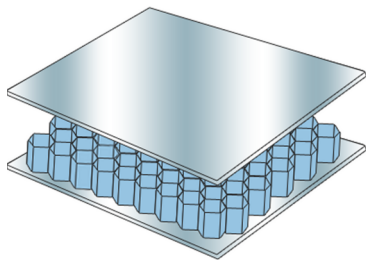


Рис. 1. Сотовая панель

Для расчета рассматривалась сотовая панель, каркас которой изготовлен из углепластика, а наполнителем служит воздух. Основные характеристики панели следующие: общая толщина панели — 0.035 м; толщина каждой из граничных пластин панели — 0.001 м; толщина стенок сотового каркаса — $6.0 \cdot 10^{-5}$ м; сотовыми ячейками являются правильные шестиугольники одинакового размера с длиной стороны, равной 0.006 м; коэффициенты температуропроводности углепластика и воздуха равны соответственно $8.0 \cdot 10^{-4}$ м²/с и $2.36 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

С использованием методики инженерных расчетов, применяемой для определения эффективной теплопроводности неоднородных материалов [10], была определена эффективная теплопроводность рассматриваемой панели при условии, что тепловой поток внутри пластины параллелен сотовому каркасу. Эффективная теплопроводность оказалась равной $4.11 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К). В данном случае объемные теплоемкости воздуха и углепластика совпадают, и это значение равно 10³ Дж/(м³ · К). Таким образом, усредненное значение температуропроводности панели равно $4.11 \cdot 10^{-5}$ м²/с. В работе [22] проводился расчет температуры для сотовой панели с граничными условиями третьего рода. При этом были использованы входные данные, полученные на основе измерений реального полета самолета.

В процессе эксперимента в данной статье решалась следующая трехмерная задача. В качестве начального распределения температуры бралось одинаковое во всех точках

панели значение температуры, равное 283К. Затем одну из сторон (назовем ее верхней) панели стали охлаждать. График изменения температуры верхней стороны пластины приведен на рис. 2.

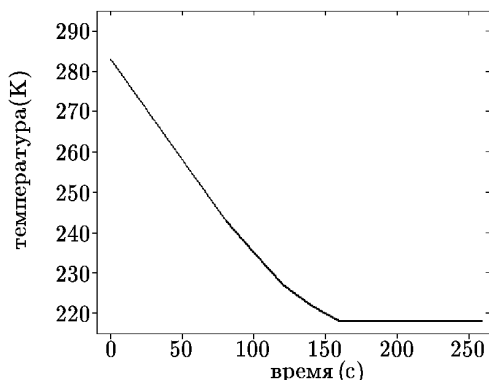


Рис. 2. Температура на верхней границе

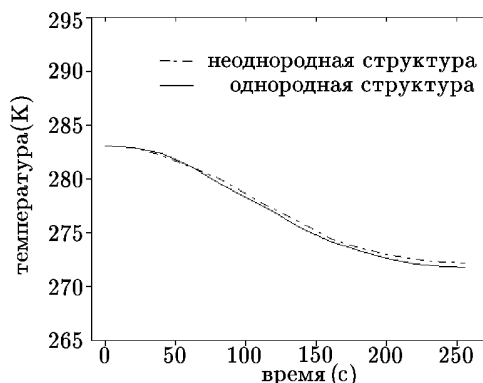


Рис. 3. Расчет температуры внутри пластины

Был проведен расчет с использованием СДУ значений температуры в точке, находящейся в центре шестиугольника и на одинаковом расстоянии от верхней и нижней границ панели, на интервале времени от 0 до 250 секунд. При этом панель рассматривалась как неоднородный материал. Для сравнения был проведен расчет значений температуры в той же самой точке, но при этом пластина считалась однородной с усредненным значением температуропроводности, полученным на основе инженерных расчетов. Полученные результаты этих расчетов приведены в виде графиков на рис. 3.

Отметим, что в программу расчета была заложена декартова система координат с началом в центре границы нижней стороны панели, ось Z направлена перпендикулярно панели, а оси X и Y — параллельно панели. Границы шестиугольных сот образованы сетью параллельных оси X прямых и прямых под углом $\pi/3$ к оси X на расстоянии друг от друга, которое определяется размером сот. В ходе расчетов благодаря циклической структуре расположения прямых, образующих соты, на каждом шаге определяется расстояние до ближайшей прямой. Таким образом определяется ориентация траектории относительно расположения сот.

В процессе вычислений использовалось усредняющее ядро $\gamma_d(1 - |x|^2)$, где γ_d — нормирующий коэффициент. Величина шага в методе Эйлера бралась равной 10^{-6} с таким расчетом, чтобы вероятность попасть за один шаг из одной соты в другую была мала; радиус ядра усреднения был задан равным 10^{-5} . Моделировалось 4000 траекторий случайного процесса. При этом объеме выборки ширина 95% доверительного интервала не превышала 1% от значений температуры во всех точках интервала времени, для которого проводился расчет.

Из графика на рис. 3 видно хорошее совпадение значений температур, полученных в результате вычислений с использованием СДУ с результатами расчета соответствующих значений как для однородного материала.

Литература

1. Seepersad C.C., Dempsey B.M., Allen J.K., Mistree F., and McDowell D.L. Design of multifunctional honeycomb materials // J. AIAA. — 2004. — Vol. 42, № 5. — P. 1025–1032.
2. Diwan G.C., Mohamed M.S., Seaid M., Trevelyan J., and Laghrouche O. Mixed enrichment for the finite element method in heterogeneous media // Int. J. Numer. Meth.

- Engng. — 2014. — Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com). DOI: 10.1002/nme.4795.
3. **Zhang X., Zhang P.** Heterogeneous heat conduction problems by an improved element-free Galerkin method // Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals. An Int. J. of Comput. and Methodology. — 2014. — Vol. 65, iss. 4. — P. 359–375.
 4. **Xiao-qi Liu.** Multiscale finite element methods for heat equation in three dimension honeycomb structure // Artificial Intelligence and Computational Intelligence. — 2011. — Vol. 7004. — P. 186–194. — (Lecture Notes in Computer Science).
 5. **Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.** Усреднение параболических операторов // Тр. Московского математического общества. — 1982. — Т. 45. — С. 182–236. (Znikov V.V., Kozlov S.M., Olejnik O.A. Usrednenie parabolicheskikh operatorov // Tr. Moskovskogo matematicheskogo obshchestva. — 1982. — Т. 45. — С. 182–236.)
 6. **Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.** Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. (Znikov V.V., Kozlov S.M., Olejnik O.A. Usrednenie differentsial'nykh operatorov. — М.: Fizmatlit, 1993.)
 7. **Власов А.Н., Саваторова В.Л., Талонов А.В.** Асимптотическое усреднение для решения задач теплопроводности с фазовыми переходами в слоистых средах // Прикладная механика и техническая физика. — 1995. — Т. 36, № 5. — С. 155–163. (Vlasov A.N., Savatorova V.L., Talonov A.V. Asimptoticheskoe usrednenie dlya resheniya zadach teploprovodnosti s fazovymi perekhodami v sloistykh sredakh // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 1995. — Т. 36, № 5. — С. 155–163.)
 8. **Саваторова В.Л., Талонов А.В., Волков-Богородский Д.Б., Власов А.Н.** Математическое моделирование процесса теплопроводности в периодической среде с цилиндрическими включениями, отделенными от матрицы тонким слоем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2010. — № 6. — С. 168–179. (Savatorova V.L., Talonov A.V., Volkov-Bogorodskij D.B., Vlasov A.N. Matematicheskoe modelirovanie protsesssa teploprovodnosti v periodicheskoy srede s tsilindrisheskimi vklyuchenyami, otdelennymi ot matritsy tonkim sloem // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. — 2010. — № 6. — С. 168–179.)
 9. **Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А.** Комбинированная MPI+THREADS параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11. — С. 127–136. (Volkov-Bogorodskij D.B., Sushko G.B., Kharchenko S.A. Kombinirovannaya MPI+THREADS parallel'naya realizatsiya metoda blokov dlya modelirovaniya teplovykh protsessov v strukturno-neodnorodnykh sredakh // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. — 2010. — Т. 11. — С. 127–136.)
 10. **Миснар А.** Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их составляющих. — М.: Мир, 1968. (Misnar A. Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkostej, gazov i ikh sostavlyayushchikh. — М.: Mir, 1968.)
 11. **Олейник О.А.** Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // УМН. — 1959. — Т. 14, № 5(89). — С. 164–166. (Olejnik O.A. Ob uravneniyakh ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami // UMN. — 1959. — Т. 14, № 5(89). — С. 164–166.)
 12. **Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я., Уральцева Н.Н.** О классической разрешимости задач дифракции // Краевые задачи математической физики. 4. // Тр. МИАН СССР. — 1966. — Т. 92. — С. 116–146. (Ladyzhenskaya O.A., Rivkind V.YA., Ural'tseva N.N. O klassicheskoy razreshimosti zadach difraktsii // Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki. 4. // Tr. MIAN SSSR. — 1966. — Т. 92. — С. 116–146.)

13. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. (Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa. — М.: Nauka, 1967.)
14. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издание третье. — М.: Наука, 1988. (Sobolev S.L. Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike. Izdanie tret'e. — М.: Nauka, 1988.)
15. **Никольский С.М.** Курс математического анализа. Т. II, издание третье, перераб. и доп. — М.: Наука, 1983. (Nicol'skij S.M. Kurs matematicheskogo analiza. T. II, izdanie tret'e, pererab. i dop. — М.: Nauka, 1983.)
16. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. (Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsij i funktsional'nogo analiza. — М.: Nauka, 1976.)
17. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. (Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Vvedenie v teoriyu sluchajnykh protsessov. — М.: Nauka, 1977.)
18. **Gobet E.** Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // Stochastic Processes and their Applications. — 2000. — Vol. 87. — P. 167–197.
19. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
20. **Lépingle D.** Un schéma d'Euler pour équations différentiels stochastiques réfléchies // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1993. — Série I Math. 316. — P. 601–605.
21. **Gobet E.** Euler schemes and half-space approximation for the simulation of diffusion in a domain // ESAIM Probability and Statistics. — 2001. — Vol. 5. — P. 261–297.
22. **Gusev S.A., Nikolaev V.N.** Calculation of heat transfer in heterogeneous structures such as honeycomb by using numerical solution of stochastic differential equations // Advanced Materials Research. — 2014. — Vol. 1016. — P. 758–763.

*Поступила в редакцию 16 сентября 2014 г.,
в окончательном варианте 30 октября 2014 г.*

