ЛИТЕРАТУРА

1. **Жигулев В. Н.** Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.— В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
2. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П.** Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя.— Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 2.
3. **Довгаль А. В., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Экспериментальное исследование реакции пограничного слоя на внешние периодические возмущения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
4. **Айзин Л. Б., Поляков Н. Ф.** Генерация волны Толлмина — Шлихтинга звуком на отдельной неровности поверхности, обтекаемой потоком.— Препринт № 17. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
5. **Fasel H.** Reaktion von zweidimensional laminaren, inkompressiblen Grenzchichten auf periodische Störungen in der Aussenströmung.— ZAMM, 1977, Bd 57, H. 5.
6. **Максимов В. П.** Возникновение волн Толлмина — Шлихтинга в осциллирующих пограничных слоях.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
7. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
8. **Жигулев В. Н., Сидоренко Н. В., Тумин А. М.** О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью.— ПМТФ, 1980, № 6.
9. **Salwen H., Grosh C. E.** The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansions.— J. Fluid Mech., 1981, vol. 104, pt 1.
10. **Сидоренко Н. В., Тумин А. М.** Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа.— В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
11. **Тумин А. М., Шепелев В. Е.** Численный анализ развития возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине.— Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 3.
12. **Евграфов М. А.** Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Гапонов С. А., Маслов А. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
14. **Терентьев Е. Д.** Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.

УДК 534.2 : 532, 532 : 526

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА ПРИ РАССЕЯНИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. А. Завольский, В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

(*Горький*)

Как известно, возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга акустическими и вихревыми полями может существенно влиять на переход к турбулентному течению в пограничном слое. Большое число работ посвящено исследованию процесса возбуждения волн Толлмина — Шлихтинга (ТШ-волн) в пограничном слое на пластине с гладкой поверхностью (см. [1, 2]). Лабораторные и численные эксперименты показали, что волны пограничного слоя возникают в окрестности передней кромки пластины [1, 3, 4]. Появление ТШ-волн можно рассматривать как результат рассеяния внешнего поля на сосредоточенной неоднородности — передней кромке пластины. Распределенное возбуждение на самой пластине не было обнаружено [3]. Причина состоит в том, что распределенное возбуждение на гладкой пластине может быть вызвано только линейным взаимодействием внешних возмущений с волнами пограничного слоя, которое неэффективно ввиду большого различия фазовых скоростей.

Ниже исследуется возбуждение ТШ-волн при рассеянии акустических и вихревых возмущений в пограничном слое на поверхности с распределенной волнистостью, характерный масштаб которой в направлении течения меньше или порядка длины ТШ-волны. Суть процесса рассеяния сводится к комбинационному сложению гармоник пространственного спектра неоднородности с гармониками внешнего поля. При этом в объеме пограничного слоя и на поверхности пластины возникают комбинационные «силы», которые могут быть в резонансе с индуцированной волной, несмотря на отсутствие резонанса этой волны с внешним полем. В случае распределенной неоднородности происходит пространственное накопление эффекта рассеяния (распределенная генерация). Интерес к данному механизму вызван рядом причин. Во-первых, после возникновения волны на передней кромке пластины она успевает сильно затухнуть на пассивном участке пограничного слоя [4]. При рассеянии на распределенной неоднородности возмущения вносятся непосредственно в активную область пограничного слоя, что создает преимущества в смысле эффективности возбуждения. Во-вторых, генерация вблизи передней кромки отсутствует при наложении продольного акустического поля или вихревых возмущений, локализованных за пределами пограничного слоя [1]. Распределенный механизм не обладает такой «чувствительностью» к виду возмущения. Именно для этих двух типов внешних возмущений ниже оценивается эффективность рассеяния. Расчеты приводятся для одномерной синусоидальной и случайной волнистости.

1. Рассмотрим пограничный слой Блазиуса на поверхности с малой волнистостью, которая описывается однозначной функцией $y = \eta(x, z)$. Воспользуемся квазипараллельной моделью течения в пограничном слое, представляя поле скорости в виде $\mathbf{v} = U(y/\delta_*)\mathbf{i} + \mathbf{v}_\sim$, где U — профиль скорости в пограничном слое на плоской поверхности $y = 0$; $\delta_*(x)$ — толщина вытеснения; $\mathbf{v}_\sim$ — возмущение первичного течения. Используя разложение в ряд по малому η, граничное условие $v = 0\ |_{y=\eta}$ можно свести к следующим соотношениям на плоскости $y = 0$:

$$v + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \ldots = 0, \quad u + \frac{\partial U}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \ldots = 0, \tag{1.1}$$

$$w + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \ldots = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

где u, v, w — компоненты $\mathbf{v}_\sim$ по осям x, y, z соответственно. Граничные условия в виде (1.1) позволяют учесть неоднородность как внешнюю «силу» в рамках модели пограничного слоя на плоской поверхности.

Вызванные волнистостью возмущения скорости $\mathbf{v}_i$ и давления p_i представим в виде разложений по степеням η. Полные возмущения скорости и давления будем искать в виде разложений по кратности рассеяния [5]:

$$\mathbf{v}_\sim = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \ldots, \quad p_\sim = p_i + p^{(0)} + p^{(1)} + \ldots,$$

где $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(0)}$ — поле в пограничном слое на гладкой поверхности; $\mathbf{v}^{(n)}$, $p^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — составляющие рассеянного поля $\sim\eta^n$. Далее ограничимся анализом однократного рассеяния, когда основной вклад в рассеянное поле дают $\mathbf{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$. Границы применимости приближения однократного рассеяния будут определены в п. 3. Зададим акустические и вихревые возмущения в виде синусоидальных волн $\sim\mathrm{Re}\,[\exp\,(ik_\omega x - i\omega t)]$ (ω и k_ω — частота и волновое число соответственно). Взаимодействуя с гармониками распределенной неоднородности $\sim\exp\,(ik_x x + ik_z z)$, они порождают волны пограничного слоя $\sim\exp\,(i\alpha x + ik_z z - i\omega t)$ (α — волновое число трехмерной ТШ-волны (ω, k_z)). Наиболее эффективно рассеивают гармоники неоднородности, удовлетворяющие условию резонанса

$$k_x = \mathrm{Re}\,\alpha - k_\omega. \tag{1.2}$$

Если спектр неоднородности непрерывен и двумерен, условие (1.2) может выполняться в широком диапазоне значений k_z. Из (1.2) следует, что рассеяние звука в дозвуковом пограничном слое происходит на компонентах спектра неоднородности $k_x \approx \mathrm{Re}\,\alpha$.

Обозначим через $x_c = x_c(\omega, k_z)$ нейтральную точку индуцированной волны. В области $x < x_c$ генерируемые возмущения затухают и поэтому не способны конкурировать с порожденными при $x \approx x_c$. Те же возмущения, которые рождаются в области неустойчивости, уступают нейтральным в длине пути усиления. Отсюда следует, что область пограничного слоя, прилегающая к нейтральной точке, наиболее чувствительна к распределенному воздействию.

2. Рассмотрим рассеяние звука на одномерной волнистости $\eta = \eta(x)$, приводящее к возбуждению двумерных ТШ-волн. В качестве исходных воспользуемся уравнениями баротропной вязкой жидкости. Поле скоростей, возникающее при обтекании волнистости, будем описывать функцией тока $\psi(x, y) = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \ldots$ $(\psi^{(n)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ — составляющие

$\sim\eta^n$). Пренебрегая зависимостью δ_* от x и переходя к спектральному представлению по формуле

$$\hat{\psi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y)\, e^{-ikx} dx,$$

получим для $\bar{\psi} = -\hat{\psi}^{(1)}/\hat{\eta}(\partial U/\partial y)_0$ ($\hat{\eta}(k)$ — спектр $\eta(x)$) уравнение вида

$$\bar{u}(y_N)(\bar{\psi}'' - k_N^2\bar{\psi}) - \bar{u}''\bar{\psi} + \frac{i}{k_N \mathrm{R}}(\bar{\psi}^{\mathrm{IV}} - 2k_N^2\bar{\psi}'' + k_N^4\bar{\psi}) = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{R} = u_\infty\delta_*/\nu$ — локальное число Рейнольдса (u_∞ — скорость набегающего потока, ν — кинематическая вязкость); $\bar{u} = U/u_\infty$; $y_N = y/\delta_*$; $k_N = k\delta_*$ (здесь и далее индексом N обозначены переменные, нормированные через толщину вытеснения, а штрихами — производные по y_N. Переменная $\bar{\psi}$ не зависит от η, так как из (1.1) следуют граничные условия $\bar{\psi} = 0$, $\bar{\psi}' = 1|_{y_N=0}$; при $y_N \to \infty$, как обычно, накладывается условие $\bar{\psi} \to 0$. Уравнение (2.1) является частным случаем уравнения Орра — Зоммерфельда, хорошо известного в теории гидродинамической неустойчивости [6]. В данном случае это уравнение порождает неоднородную краевую задачу для профиля возмущения, фазовая скорость которого равна нулю.

Акустическое поле зададим в виде главной моды плоского волновода, одна из стенок которого является обтекаемой поверхностью, а другая — вынесена далеко за пределы пограничного слоя. Пренебрегая движением жидкости и затуханием звука на длине генерации волны, напишем акустическое поле в виде

$$(u, v, p) = \frac{1}{2} s(e_1, e_2, e_3)\, e^{ik_\omega x - i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{2.2}$$

где $e_1 = 1 - \exp(\beta y)$; $e_2 = -(ik_\omega/\beta)[1 - \exp(\beta y)]$; $e_3 = \pm c/\rho$ (ρ — плотность среды); $k_\omega = \pm\omega/c$; c — скорость звука, знаки $\pm$ относятся к волнам, распространяющимся вниз и вверх по потоку соответственно; $\beta = (i-1)\sqrt{\omega/2\nu}$. Толщина вязкого пристеночного слоя в акустическом поле $l_w = \sqrt{2\nu/\omega}$ при возбуждении ТШ-волн обычно удовлетворяет соотношению $l_w \ll \delta_*$.

Уравнения для рассеянного поля принимают вид

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + U\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}v^{(1)} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2}\right) = f_1, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + U\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2}\right) = f_2, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = f_3,$$

где

$$f_1 = -\frac{\tilde{p}}{c^2\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}; \quad f_2 = -\frac{\tilde{p}}{c^2\rho}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} - \tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} - \tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}; \tag{2.4}$$

$$f_3 = \frac{(n-1)}{c^2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{p}^2 - \frac{1}{c^2\rho}\left(\frac{\partial\widetilde{p}\widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{p}\widetilde{v}}{\partial y}\right)$$

($n \sim 1$ — нелинейный параметр среды [7]). Переменные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{p}$ в (2.4) представляют собой суперпозицию акустической волны (2.2) и поля обтекания волнистости; в соответствии с процедурой вывода (2.3) из f_i следует исключить члены, зависящие только от $\mathbf{v}_i$, p_i. Граничные условия при $y = 0$ имеют вид $v^{(1)} = -(\partial v^{(0)}/\partial y)\eta$, $u^{(1)} = -(\partial u^{(0)}/\partial y)\eta$.

Рассмотрим распределенное возбуждение ТШ-волны с частотой звука ω (размер области возбуждения $L_* \gg 1/\mathrm{Re}\,\alpha$). Следуя модели квазипараллельного течения, будем всюду пренебрегать производными δ_* по

x. Переходя от системы (2.3) к одному уравнению для $v^{(1)}$, представим его решение в виде

$$v^{(1)} = \frac{1}{2} a(x) \varphi(y_N) e^{i\theta - i\omega t} + \text{к. с.} + \delta v, \tag{2.5}$$

где $\theta = \int \mathrm{Re}\, \alpha dx$; $a(x)$ — комплексная амплитуда волны (изменение $a(x)$ мало при изменении θ на 2π); δv — добавка порядка $(L_* \mathrm{Re}\, \alpha)^{-1} \ll 1$; α и φ — собственное значение и собственная функция краевой задачи

$$\left(\bar{u} - \frac{\omega_N}{\alpha_N}\right)(\varphi'' - \alpha_N^2 \varphi) - \bar{u}''\varphi + \frac{i}{\alpha_N \mathrm{R}}(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha_N^2 \varphi'' + \alpha_N^4 \varphi) = 0, \tag{2.6}$$

$$\varphi = \varphi' = 0 |_{y_N = 0}, \quad \varphi \to 0 |_{y_N \to \infty},$$

где $\alpha_N = \omega\delta_*$, $\omega_N = \omega\delta_*/u_\infty$. Производную da/dx ищем в виде

$$da/dx = \gamma a + F^{(1)}, \tag{2.7}$$

где $\gamma = -\mathrm{Im}\, \alpha$ — инкремент пространственного усиления волны; $F^{(1)}$ — неизвестная функция, которая находится из условия ограниченности δv. Используя стандартные процедуры [8], получим

$$F^{(1)} = \frac{1}{2\pi} s\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\eta}(k)\, e^{i(k + k_\omega)x - i\theta}, \tag{2.8}$$

где $\sigma = \sigma_N/\delta_*^2$; $\sigma_N = \sigma_S + \sigma_V$; $\sigma_V = \frac{1}{q}\int_0^\infty Q\chi dy_N$; $\sigma_S = \frac{i\alpha_N \beta_N}{q\mathrm{R}} \chi''(0)$;

$$Q = \alpha_N^2 \bar{u}_0' \left[(1 - e^{\beta_N y_N})(\bar{\psi}'' - \bar{k}_N^2 \bar{\psi}) - i\omega_N \mathrm{R} \bar{\psi} e^{\beta_N y_N}\right], \tag{2.9}$$

$$q = \int_0^\infty \left[\left(\bar{u} - \frac{4i\alpha_N}{\mathrm{R}}\right)\varphi'' + \left(2\omega_N \alpha_N - 3\alpha_N^2 \bar{u} - \bar{u}'' + \frac{4i\alpha_N^3}{\mathrm{R}}\right)\varphi\right] \chi dy_N.$$

Здесь $\beta_N = (i - 1)\sqrt{\omega_N \mathrm{R}/2}$; $\chi(y_N)$ — собственная функция сопряженной с (2.6) краевой задачи [9]; $\bar{\psi}$ — решение (2.1) для резонансной компоненты спектра неоднородности $\bar{k} = \mathrm{Re}\, \alpha - k_\omega$ $(\bar{k}_N = \bar{k}\delta_*)$*. При вычислении коэффициента рассеяния σ число Маха $\mathrm{M} = u_\infty/c$ считалось достаточно малым и отбрасывались величины $O(\mathrm{M})$. Слагаемые σ_V и σ_S описывают объемное и поверхностное рассеяния соответственно. Следует отметить, что в рассматриваемом приближении σ зависит только от продольной составляющей скорости в акустическом поле и не зависит от направления распространения звука.

Задача о возбуждении ТШ-волн вихревыми возмущениями также сводится к уравнениям (2.3). Рассмотрим рассеяние слабых вихревых возмущений, дрейфующих в области однородного течения ($y > 3$). Их функцию тока представим в виде

$$\bar{\psi} = \begin{cases} \frac{1}{2} s\Phi(y)\, e^{ik_\omega x - i\omega t} + \text{к. с.}, & y > 3, \\ 0, & 0 \leqslant y \leqslant 3, \end{cases} \tag{2.10}$$

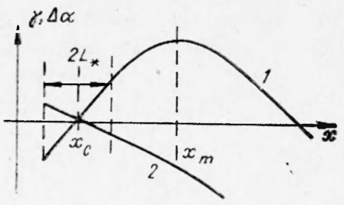
где $k_\omega = \omega/u_\infty$; Φ и s — профиль и амплитуда вихревой волны соответственно. Пренебрегая вязкой диффузией вихря на длинах $2L_*$, профиль Φ можно задавать произвольно. Рассеяние возмущений (2.10) на поверхности отсутствует ($\sigma_S = 0$), а объемное рассеяние определяется коэффициентом σ_V, при вычислении которого в (2.9) следует положить

$$Q = \bar{k}_N \bar{u}_0' \left\{\omega_N \left[\bar{\psi}'(\Phi'' - \omega_N^2 \Phi) - \Phi \frac{\partial}{\partial y_N}(\bar{\psi}'' - \bar{k}_N^2 \bar{\psi})\right] - \right.$$
$$\left. - \bar{k}_N \left[\bar{\psi} \frac{\partial}{\partial y_N}(\Phi'' - \omega_N^2 \Phi) - \Phi'(\bar{\psi}'' - \bar{k}_N^2 \bar{\psi})\right]\right\}.$$

---

* Резонансу соответствует точка стационарной фазы экспоненциального множителя в (2.8).

Поскольку в области $y > 3$ поле скорости обтекания близко к потенциальному, рассеяние определяется завихренностью возмущений (2.10).



Фиг. 1

3. Рассмотрим на основе уравнений (2.7), (2.8) процесс возбуждения ТШ-волн при рассеянии на неоднородности. Зависимость инкремента ТШ-волны γ (кривая *1*) и приращения волнового числа $\Delta\alpha = \operatorname{Re}\alpha - \alpha_c$ (кривая *2*) от x схематически показана на фиг. 1. Решая (2.7) с граничным условием $a(x_0) = 0$ (x_0 выбирается в области затухания достаточно далеко от нейтральной точки x_c), получим

$$
(3.1) \qquad a = a_{\text{эфф}}(x)\,K(x)\ \left(K = \exp\left[\int\limits_{x_c}^{x} \gamma dx\right]\right),
$$

$$
a_{\text{эфф}} = \int\limits_{x_0}^{x} F^{(1)}\,(1/K)\,dx.
$$

Здесь $K(x)$ — коэффициент усиления пограничного слоя, множитель $a_{\text{эфф}}$ представляет собой эффективную (приведенную к нейтральной точке) амплитуду индуцированной волны. Функция $1/K$, стоящая под интегралом в (3.1), имеет максимум при $x = x_c$, что формально подтверждает качественные соображения о формировании индуцированного поля, приведенные в п. **1**.

Рассмотрим рассеяние на синусоидальной волнистости $\eta = \sin k_g x$. В этом случае формула (2.8) верна в достаточно малой окрестности той точки, где выполнены условия резонанса. Учитывая преобладание вклада области, прилегающей к нейтральной точке, ограничимся случаем малых отклонений от резонанса в этой точке ($|\Delta k| \ll \alpha_c$, $\Delta k = k_g - k_\omega - \alpha_c$). Воспользуемся вблизи от $x = x_c$ линейной аппроксимацией $\gamma = \mu_r(x - x_c)$, $\Delta\alpha = \mu_i(x - x_c)$, где введено $\mu = \mu_r + \mu_i i = i(\partial\alpha/\partial x_c)$. Пренебрегая изменением σ в области возбуждения волны и используя (3.1), (2.8), получим

$$
(3.2) \qquad a_{\text{эфф}} = \frac{1}{2i}\, s\sigma_c d \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu\xi^2}{2} + i\Delta k\xi}\, d\xi = -i\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{1/2} s\sigma_c d \exp\left[-\frac{(\Delta k)^2}{2\mu}\right],
$$

где $\sigma_c = \sigma|_{x=x_c}$; $\xi = x - x_c$. Поскольку при $x - x_c > L_*$, $x_c - x_0 > L_*$ интеграл слабо зависит от x и x_0, пределы интегрирования в (3.1) расширены до бесконечности. Формула (3.2) показывает, что индуцированное поле максимально при выполнении условий резонанса в нейтральной точке ($\Delta k = 0$). Размер области генерации, определенный из условия, что $a_{\text{эфф}}$ составляет 0,84 от предельного значения (3.2), равен $L_* = (2/|\mu|)^{1/2}$. Присутствие μ_i в L_* отражает тот факт, что длина области генерации уменьшается вследствие выхода волн из резонанса. Решение (3.2) получено для малых отношений $L_*/(x_m - x_c)$. Используя оценки $\mu_r \sim \gamma(x_m)/(x_m - x_c)$, $\mu_i \sim \Delta\alpha(x_m)/(x_m - x_c)$, можно видеть, что это отношение тем меньше, чем больше усиление волны и набег фазы в активной области пограничного слоя. На частотах, представляющих практический интерес, это отношение не очень мало. Например, при $\omega_N|_{x=x_c} = 0{,}038$ получим $L_*/(x_m - x_c) \approx 0{,}35$. Можно показать, что линейная аппроксимация γ и $\Delta\alpha$ является хорошим приближением вплоть до $L_* \sim 0{,}5(x_m - x_c)$. Если при переходе к (3.2) принять $\sigma = \sigma_c + \sigma_x'(x - x_c)$, член $\sim\sigma_x'$ при $\Delta k = 0$ не даст вклада в $a_{\text{эфф}}$. Поскольку характерным масштабом изменения σ является $x_m - x_c$, последнее означает, что точность формулы (3.2) характеризуется квадратом отношения $L_*/(x_m - x_c)$.

Рассмотрим кратко рассеяние на хаотической одномерной неоднородности, которая описывается пространственно-однородной случайной функцией $\eta(x)$ (среднее по ансамблю $\langle\eta\rangle = 0$). Используя (2.8), (3.1), в приближении узкой области генерации получим

$$\langle |a|^2\rangle^{1/2} = K(x)A_{\text{эфф}},$$

где $A^2_{\text{эфф}} = \frac{2\pi}{|\mu|}|\sigma_c|^2 s^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varkappa G(\varkappa + \alpha_c - k_\omega)\exp\left(-\frac{\mu_r \varkappa^2}{|\mu|^2}\right)$ ($G(k)$ — спектральная плотность $\langle\eta^2\rangle$). Если G мало меняется на масштабе $|\mu|/\sqrt{\mu_r}$ в окрестности резонанса, выражение для $A_{\text{эфф}}$ принимает вид

$$A^2_{\text{эфф}} = \frac{2\pi^{3/2}}{\mu_r^{1/2}} s^2 |\sigma_c|^2 G(\alpha_c - k_\omega).$$

Величина $A_{\text{эфф}}$ не зависит от μ_i, что согласуется с известным в теории волн результатом о независимости случайного взаимодействия от фазовых соотношений. По этой же причине размер области возбуждения в данном случае полностью определяется поведением инкремента: $L_* \approx \approx (1/\mu_r)^{1/2}$. Интенсивность индуцированной волны пропорциональна спектральной мощности $\langle\eta^2\rangle$. При фиксированном $\langle\eta^2\rangle$ наибольший эффект достигается при рассеянии на волнистой поверхности с характерным масштабом неоднородности порядка $1/\mathrm{Re}\,\alpha$.

В рамках данной выше процедуры вывода (2.7), (2.8) можно учесть слабую непараллельность течения, если сохранить производную δ_* по x и малую поперечную компоненту скорости потока. Основываясь на результатах работы [8], можно показать, что непараллельность течения дает в (2.7) малую (порядка 1/R) комплексную добавку к инкременту γ квазипараллельной теории. При этом $F^{(1)}$ практически не изменится, так как профиль φ и поле обтекания волнистости с точностью до поправок $\sim 1/\mathrm{R}$ удовлетворяют уравнениям квазипараллельной теории. Добавка к γ зависит от нормировки профиля φ. В дальнейшем при вычислении σ_N воспользуемся нормировкой $\max|(1/\alpha_N)\varphi'| = 1$, которая определяет $|a|$ как максимальную амплитуду пульсаций продольной скорости на профиле ТШ-волны. Добавка к γ слабо смещает нейтральную точку и в узкой области возбуждения волны приводит к малым изменениям коэффициента усиления K квазипараллельной теории. В результате малыми будут изменения амплитуды $a_{\text{эфф}}$, которую теперь следует рассматривать как эффективную амплитуду, приведенную к нейтральной точке непараллельного течения. При этом нейтральной является та точка, в которой начинается рост максимальной амплитуды продольной скорости. Известно, что нейтральная кривая в пограничном слое на поверхности с малой волнистостью смещена относительно своего положения в случае гладкой пластины [10]. Этот эффект можно описать в (2.7), если учесть двукратное рассеяние ТШ-волны на неоднородности. Ввиду малости соответствующей добавки к γ изменение $a_{\text{эфф}}$ также будет малым.

Обсудим кратко вопрос о границах применимости приближения однократного рассеяния. Поскольку прилипание на поверхности приводит к образованию вблизи нее тонких вязких областей, ограничение на высоту волнистости оказывается значительно сильнее, чем просто условие малости по сравнению с толщиной вытеснения. Необходимо потребовать, чтобы вертикальный масштаб поля скорости вблизи поверхности H был больше высоты волнистости $h = \max|\eta|$. В акустическом поле и в ТШ-волне вблизи поверхности возникают вязкие области, масштабы которых одинаковы и равны $l_w \ll \delta_*$ [6, 11]. Отсюда следует ограничение на высоту волнистости вида $h/l_w \ll 1$. В случае неоднородностей с характерной длиной $l \lesssim h$ нельзя ограничиться линейным членом в разложении поля обтекания по η, так как $H \lesssim h$. В случае плавных неоднородностей ($h \ll l \lesssim 1/\mathrm{Re}\,\alpha$), сравнивая вязкие и невязкие члены уравнения (2.1), можно ввести поперечный масштаб поля обтекания $l_1 = [l\nu/(\partial U/\partial y)_0]^{1/3}$ *. Можно показать, что $H \sim l_1$ при $h \lesssim l_1 \lesssim l$ и $H \sim l$, если $l_1 \gtrsim l$ **. Таким образом, ограничение на высоту неоднородности, связанное с ее обтеканием, принимает вид $h/l_1 \ll 1$.

4. Для вычисления $a_{\text{эфф}}$ необходимо найти μ и построить функции $\bar{\psi}$, φ, χ. Обозначим «текущие» частоту и волновое число волны пограничного слоя соответственно через $\Omega_N = \Omega\delta_*/u_\infty$ и $K_N = k\delta_*$. Линеаризуя дисперсионное уравнение квазипараллельной теории $\Omega_N = \Omega_N(K_N, R)$ в окрестности нейтральной точки и учитывая соотношение $\mathrm{R} - \mathrm{R}_c \approx$ $\approx (3/2)\xi/\delta_c$, можно получить

$$\bar{\mu} = \delta_c^2\mu \approx \frac{3}{2}\frac{i}{\mathrm{R}_c}\left[\frac{\Omega_N - (\partial\Omega_N/\partial\mathrm{R})\mathrm{R}}{(\partial\Omega_N/\partial K_N)} - K_N\right]_c,$$

где индекс c означает, что выражение берется в нейтральной точке; $\delta_c = \delta_*(x_c)$.

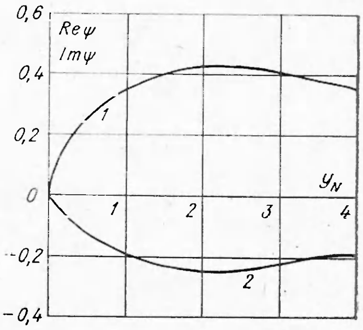
Функция $\bar{\psi}$ строится в виде суммы «вязкого» и «невязкого» решений (см. аналогично [6]). «Вязкое» решение имеет характерный масштаб $l_{1N} = (\bar{u}_0'\bar{k}_N\mathrm{R})^{-1/3}$ и локализовано вблизи поверхности $y_N = 0$, а невязкое — находится в приближении идеальной среды ($\mathrm{R} = \infty$). На фиг. 2 приведены результаты расчета $\bar{\psi}$ в точке $\bar{k}_N = 0{,}134$, $\mathrm{R} = 1620$ (кривые *1* и *2* для $\mathrm{Re}\,\bar{\psi}$ и $\mathrm{Im}\,\bar{\psi}$ соответственно).

Уравнения для φ и χ решались методом Рунге — Кутта с использованием процедуры ортогонализации. Искалась эффективная амплитуда ТШ-волны, индуцированной на поверхности с синусоидальной волнистостью при точном резонансе в нейтральной точке $\mathrm{R}_c = 1620$, где $\alpha_N =$ $= 0{,}134$, $\omega_N = 0{,}038$, $\bar{\mu} = (2{,}9 - 1{,}46i)\cdot 10^{-5}$. Для рассеяния звука вычисления дают $\sigma_S = 0{,}32 + 0{,}1i$, $\sigma_V = 0{,}1 - 0{,}16i$. Для оценки эффективности вихревого рассеяния профиль возмущений задавался в виде

$$\Phi = \frac{b_1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{(y_N - b_0)^2}{b_1^2} + \frac{1}{2}\right].$$

При этом s в формуле (2.10) — амплитуда максимальных пульсаций продольной скорости, а профиль продольной скорости $|\Phi'|$ качественно согласуется с реализованным в работе [1]. При $b_0 = 5$, $b_1 = 1$ для резонансной волнистости с волновым числом $\bar{k}_N = 0{,}1$ коэффициент рассеяния равен $\sigma_N = (4{,}86 + 0{,}32i)\cdot 10^{-5}$.

Воздействие индуцированной волны на переход к турбулентному течению зависит от ее амплитуды, коэффициента усиления и от шумового фона, вызывающего переход в отсутствие индуцированной волны. По данным [13] максимальное усиление при $\mathrm{R}_c =$ $= 1620$ равно e^{10}. Будем считать шумовой фон таким, что в точке «естественного» перехода коэффициент усиления достигает e^6. Для смещения точки перехода необходимо, чтобы индуцированное поле при $K = e^6$ достигло уровня сильной нелинейности u_{tr}. В соответствии с измерениями [14] примем $u_{tr} = 0{,}02u_\infty$. Для возбуждения такой волны при рассеянии на волнистости с параметрами $d/\delta_c = 0{,}5l_w/\delta_c = 0{,}09$, $k_g\delta_c =$ $= 0{,}134$ необходим звук с амплитудой $s =$ $= 0{,}5\cdot 10^{-5}$. Вихревая волна должна иметь амплитуду $s = 0{,}05$ при $k_g\delta_c = 0{,}1$. В част-



Фиг. 2

* Для неоднородностей с $l = 1/\mathrm{Re}\alpha$ масштаб $l_1 \ll \delta_*$ и совпадает с масштабом вязкого критического слоя ТШ-волны [6].

** При $l_1 \lesssim h$ величина H оценивается по известной формуле для толщины пограничного слоя [12]: $H \sim l/\sqrt{\mathrm{R}l}$ ($\mathrm{R}l = hl(\partial U/\partial y)_0/\nu$ — число Рейнольдса неоднородности).

ности, если на пластину набегает поток воздуха со скоростью $u_\infty = 25$ м/с, для возбуждения волны с частотой 156 Гц при рассеянии на волнистости с $d = 0{,}09$ мм и периодом 4,55 см требуется звук силой 41 дБ. В случае вихревых возмущений резонансная волнистость имеет период 6,35 см.

Таким образом, рассеяние акустических и вихревых возмущений в пограничном слое на волнистой поверхности может приводить к распределенному возбуждению волн Толлмина — Шлихтинга. Расчет показывает, что даже при весьма слабой волнистости, высота которой удовлетворяет условиям однократного рассеяния, можно достигнуть интенсивности индуцированной волны, достаточной для смещения точки перехода к турбулентности. При рассеянии на синусоидальной волнистости наиболее эффективно генерируются те волны, для которых выполнены условия резонанса в нейтральной точке (при фиксированном периоде волнистости условиям резонанса можно удовлетворить, варьируя частоту внешних возмущений). Рассеяние на хаотической волнистости определяется резонансными гармониками ее спектра.

Поступила 12 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левченко В. Я., Козлов В. В.** Возникновение и развитие возмущений в пограничном слое.— В кн.: Модели в механике сплошной среды. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
2. **Поляков Н. Ф.** Ламинарный пограничный слой в условиях «естественного» перехода к турбулентному течению.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
3. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
4. **Качанов Ю. С., Левченко В. Я. и др.** Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя.— ЧММСС, 1978, т. 9, № 2.
5. **Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
6. **Бетчов Р., Криминалле В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
7. **Зарембо Л. К., Красильников В. А.** Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
8. **Saric W. S., Nayfeh A. H.** Nonparallel stability of boundary layer flows.— Phys. Fruids, 1975, vol. 18, N 8.
9. **Craik A. D. D.** Nonlinear resonant instability in boundary layers.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, N 2.
10. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Экспериментальное исследование устойчивости пограничного слоя на волнистой поверхности.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
11. **Блохинцев Д. И.** Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
12. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
13. **Jaffe N. A., Okamara T. T., Smith A. M. O.** Determination of spatial amplification factors and their application to predicting transition.— AIAA J., 1970, vol. 8, N 2.
14. **Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. H.** The three-dimensional nature of boundary layer instability.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 1.

УДК 532.593 : 532.529

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ПАРА

В. Г. Гасенко, В. Е. Накоряков, З. М. Оренбах, И. Р. Шрейбер

(Новосибирск)

В данной работе на основе модельного уравнения для распространения волн в жидкости с пузырьками пара проведено исследование структуры и динамики волн в парожидкостной среде. Результаты расчетов сравнены с экспериментальными профилями давления.

1. В [1] предложена двухтемпературная модель распространения возмущений в жидкости, находящейся вблизи линии насыщения и содер-