

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ УСЛОВИИ В НОСИКЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТРЕЩИНЫ

Е. Н. Шер

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача теории упругости. Предполагается, что в окрестности носика произвольно движущегося разреза напряжения имеют особенность порядка $r^{-1/2}$. В этом предположении получено общее выражение для распределения в данной окрестности компонент тензора напряжения. Это распределение определяется двумя параметрами N и P . В случае симметричных относительно линии разреза напряжений ($P = 0$) их угловое распределение не зависит от коэффициента интенсивности N и определяется только скоростью разреза в данный момент и скоростями поперечных и продольных волн материала.

В тех же предположениях показано, что энергетическое условие, полученное Крэггом для частного случая стационарно движущейся трещины, будет необходимым условием для произвольно движущейся трещины. В квазистатическом приближении затрагиваемые вопросы рассмотрены Ирвином [1] и Черепановым [2].

1. Об особенностях в носике движущего разреза. Известно, что в статическом случае в носике разреза существует особенность для напряжений порядка $r^{-1/2}$, где r — расстояние от носика разреза. Аналогичный результат получен и в ряде динамических задач. Предполагая такой же порядок особенности, найдем угловое распределение напряжений вокруг носика произвольно движущегося разреза.

Движение будем описывать потенциалами Φ и Ψ , которые удовлетворяют уравнениям

$$c_1^2 \Delta \Phi = \partial^2 \Phi / \partial t^2, \quad c_2^2 \Delta \Psi = \partial^2 \Psi / \partial t^2 \quad (1.1)$$

Здесь c_1, c_2 — скорости продольных и поперечных волн. Будем искать потенциалы в окрестности носика разреза в следующем виде:

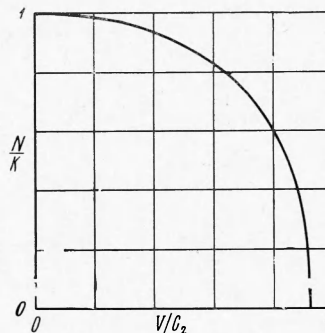
$$\Phi = r^{3/2} \varphi(\vartheta, t), \quad \Psi = r^{1/2} \psi(\vartheta, t) \\ r = \sqrt{[x - l(t)]^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x - l(t)} \quad (1.2)$$

Здесь x, y — система координат с осью, направленной вдоль разреза: $l(t)$ — координата носика разреза. Введем переменную $X = x - l(t)$, тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} (-l') + o(r^{1/2}) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + l'' + o(r^{-1/2}) \quad (1.3)$$

Здесь точка означает производную по времени. Подставляя (1.2) в (1.1), используя (1.3), получаем

$$\left(1 - \frac{l'^2}{c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = o(r^{-1/2}) \\ \left(1 - \frac{l'^2}{c_2^2}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = o(r^{-1/2})$$



Фиг. 1

Пренебрегая членами низшего порядка, отсюда приходим к системе, в точности совпадающей с той, которая получается в задаче о стационарном распределении разреза с постоянной скоростью $V = l'$ (Крэггс [3])

$$\left(1 - \frac{V^2}{c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

Следуя Крэггсу, введем

$$z_1 = X + i(1 - V^2/c_1^2)^{1/2}y, \quad z_2 = X + i(1 - V^2/c_2^2)^{1/2}y \quad (1.5)$$

Решение системы (1.4), удовлетворяющее условиям (1.2), имеет вид

$$\Phi = \operatorname{Re} [a_1 z_1^{3/2} + i a_2 z_1^{3/2}] \\ \Psi = \operatorname{Re} [b_1 z_2^{1/2} + i b_2 z_2^{1/2}] \quad (1.6)$$

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 — константы. Две из них определяются из граничных условий на берегах разреза. Ограничиваясь случаем конечных внешних сил в области носика разреза, потребуем

$$\tau_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \text{ при } \vartheta = \pi \quad (1.7)$$

В качестве двух оставшихся параметров выберем коэффициенты интенсивности для σ_{yy} и σ_{xy} на оси разреза при подходе извне

$$\sigma_{yy} = N / \pi \sqrt{X}, \quad \sigma_{xy} = P / \pi \sqrt{X} \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (1.8)$$

Чтобы выписать соотношение (1.7), (1.8) через потенциалы (1.6), воспользуемся выражениями для компонент тензора напряжений, приведенными в работе Крэггса

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \sigma_{xx} &= \left(2 + \frac{V^2}{c_2^2} - 2 \frac{V^2}{c_1^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - 2 \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} \\ \mu^{-1} \sigma_{xy} &= -2 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \\ \mu^{-1} \sigma_{yy} &= - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + 2 \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 X}{\partial X^2} &= \frac{3}{4} (a_1 z_1^{-1/2} + i a_2 z_1^{-1/2}) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} &= \frac{3}{4} (b_1 z_2^{-1/2} + i b_2 z_2^{-1/2}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь μ — второй коэффициент Ляме.

Эти формулы получаются подстановкой в закон Гука перемещений, выраженных через потенциалы (1.6), используя уравнения (1.4).

Подставив (1.9), (1.10) в (1.7), (1.8) и решив получившуюся линейную относительно a_1, a_2, b_1, b_2 систему, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{3} \frac{N (2 - V^2 / c_2^2)}{\pi \mu D(V)}, \quad b_1 = \frac{4}{3} \frac{P (2 - V^2 / c_2^2)}{\pi \mu D(V)} \\ a_2 &= -\frac{8}{3} \frac{P (1 - V^2 / c_2^2)^{1/2}}{\pi \mu D(V)}, \quad b_2 = \frac{8}{3} \frac{N (1 - V^2 / c_1^2)^{1/2}}{\pi \mu D(V)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$D(V) = 4 (1 - V^2 / c_1^2)^{1/2} (1 - V^2 / c_2^2)^{1/2} - (2 - V^2 / c_2^2)^2$$

Объединяя (1.9), (1.10), (1.11), получаем для компонент тензора напряжений следующие выражения:

$$\begin{aligned} \pi \mu D(V) \sigma_{xx} &= r^{-1/2} \left\{ \left(2 + \frac{V^2}{c_2^2} - 2 \frac{V^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[N \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \cos \frac{\lambda_1}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2P \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\lambda_1}{2} \right] - 2 \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[2N \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \cos \frac{\lambda_2}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - P \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \sin \frac{\lambda_2}{2} \right] \right\} \\ \pi \mu D(V) \sigma_{xy} &= r^{-1/2} \left\{ -2 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[-N \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \sin \frac{\lambda_1}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2P \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \cos \frac{\lambda_1}{2} \right] - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[2N \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\lambda_2}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \cos \frac{\lambda_2}{2} \right] \right\} \\ \pi \mu D(V) \sigma_{yy} &= r^{-1/2} \left\{ - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[N \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \cos \frac{\lambda_1}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2P \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\lambda_1}{2} \right] + 2 \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \sin^2 \vartheta \right)^{-1/4} \left[2N \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \cos \frac{\lambda_2}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - P \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right) \sin \frac{\lambda_2}{2} \right] \right\} \\ \lambda_n &= \arctg (1 - V^2 / c_n^2)^{1/2} \operatorname{tg} \nu \quad (n = 1, 2) \end{aligned}$$

Следует отметить, что в случае симметричных относительно линии разреза напряжений ($P = 0$) величина N входит в формулы (1.12) в качестве множителя. Угловое распределение напряжений, таким образом, не зависит от коэффициента интенсивности и имеет один и тот же вид для всех движений разреза.

Естественно, что оно совпадает с результатами, полученными в работах [3-6]. Найденное свойство позволяет перенести результаты исследований особенности, проведенных различными авторами в случае частных задач, на произвольно движущийся разрез с $P = 0$. Сюда относится обнаруженная Иоффе [6] возможность ветвления разреза при некоторой критической скорости. Отсюда следует, что вид изохром, рассчитанный Бэккером [5] в его задаче, является общим для всех задач с симметричным распределением напряжений.

2. Энергетическое условие в носике трещины. Аналогично тому, как это сделано в работе Черепанова [2], выпишем уравнение сохранения энергии для процесса деформирования идеального упругого тела с развивающейся трещиной. Относительно трещины предположим, что на образование единицы длины трещины требуется энергия T . Величина T определяется физическими свойствами тела и, вообще говоря, может быть функцией параметров движения трещины. Выделим вокруг носика в момент t_0 круговую область G радиуса ε с границей γ . Для области тела, внешней к γ , сохранение энергии гарантируется уравнениями движения идеально упругого тела. Для области G имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\varepsilon \left(P_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + P_y \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) dx + \int_\gamma \left(X_n \frac{\partial u_x}{\partial t} + Y_n \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) d\gamma = \\ = \frac{d}{dt} \int_G \left\{ W + \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dG + 2lT \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь P_x, P_y — вектор внешних сил, приложенных к берегам разреза изнутри трещины; u_x, u_y — вектор смещения; X_n, Y_n — вектор упругих сил на границе; W — упругий потенциал; ρ — плотность.

В этом уравнении первый член есть мощность внешних сил, приложенных в самой трещине; второй член — мощность упругих сил на границе области γ ; третий — скорость изменения упругой и кинетической энергии в области G ; четвертый — энергия, идущая на образование трещины в единицу времени.

Для достаточно малой области G можно воспользоваться найденным в предыдущем пункте видом особенности в носике произвольно движущегося разреза; при этом первым членом в (2.1) можно пренебречь (при бесконечном уменьшении области G он стремится к нулю).

Проделав все вычисления, получаем

$$N^2 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} + P^2 \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} = 2\pi\mu D(V) \frac{c_2^2}{V^2} \quad (2.2)$$

Это выражение является аналогом энергетического условия Гриффитса [7] для нестационарно движущейся трещины. Такое же выражение получено в частной задаче Крэггсом [3]. Вместо T введем параметр K , часто используемый в теории хрупкого разрушения

$$K = \sqrt{2\pi\mu T / (1 - \nu)} \quad (\nu - \text{коэффициент Пуассона})$$

График $N^2(V) / K^2$ при $P = 0$ и $\nu = 0.25$ приведен на фиг. 1, где c_R — скорость волн Рэлея. Из графика видно, что при $V \rightarrow 0$ условие (2.2) переходит в статическое условие для предельно равновесной трещины [8] $N = K$.

Уравнение (2.2) может быть использовано для решения следующей задачи.

В начальный момент времени к телу с покоящей трещиной прикладываются внешние силы; требуется найти движение трещины.

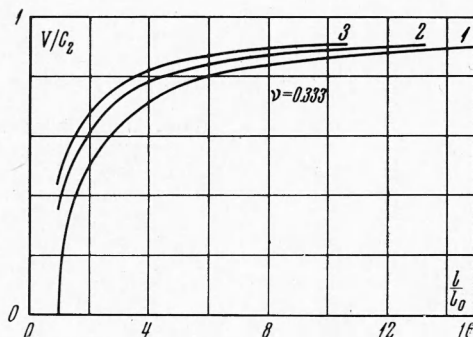
Задачу следует решать в два этапа:

1) Определяем параметры N и P для заданных внешних сил и произвольного закона движения разреза, положение которого совпадает в начальный момент времени с покоящейся трещиной;

2) Отбираем с помощью уравнения (2.2) из всей совокупности траекторий разрез такую, которая соответствует движению трещины.

К сожалению, решение первой задачи даже простейших областей и типов нагрузок встречает значительные трудности. В литературе по нестационарному движению разреза имеются лишь работы Броберга [4] об автомодельном расширении трещины из нуля с постоянной скоростью и Беккера [5] о движении с постоянной скоростью полубесконечного разреза, покоящегося в начальный момент времени. Результат Броберга можно использовать для приближенного решения поставленной выше задачи в случае

прямолинейной изолированной трещины в бесконечном пространстве. Пусть в начальный момент в трещине возникает давление $p \geq p_0$, где p_0 — критическое давление, соответствующее равновесному состоянию трещины. Параметр N при $t > 0$ увеличивается и тогда, когда он становится равным K ; трещина сдвигается с места. Пусть в момент t она имеет размер l и скорость V . Предположим, что N в этот момент будет такой же,



Фиг. 2

как и для трещины Броберга, развившейся из нуля со скоростью V до размера l , под действием той же нагрузки p

$$N = \frac{Q\pi}{V^4 c_2^2} \left(\frac{l}{2c_1} \right)^{1/2} \frac{D(V)}{(1 - V^2/c_1^2)^{1/2}}$$

$$Q = p \frac{\beta^2(1 - \beta^2)}{J(\beta)}, \quad \beta = \frac{V}{c_1}, \quad k = \frac{c_2}{c_1} \quad (2.3)$$

$$J(\beta) = [(1 - 4k^2)\beta^2 + 4k^4] K(\sqrt{1 - \beta^2}) - \beta^2 [\beta^4 - 4k^2(1 + k^2)\beta^2 + 8k^4] E(\sqrt{1 - \beta^2}) -$$

$$- 4k^2(1 - \beta^2) K(\sqrt{1 - (\beta/k)^2}) + 8k^4\beta^{-2}(1 - \beta^2) E(\sqrt{1 - (\beta/k)^2})$$

где $K(x)$, $E(x)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Параметр P в этой задаче равен нулю.

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем зависимость $V(l)$, график которой приведен на фиг. 2 для различных значений p . Кривые 1, 2, 3 соответствуют $p = p_0$, $p = 2p_0$, $p = 3p_0$. Энергия трещинообразования T принимается постоянной. Относительно кривой $V(l)$ априори известно, что она начинается в точке $(l_0, 0)$, соответствующей начальному положению трещины, и выходит на ту же асимптоту $V = c_R$. Наибольшее отклонение от точного решения будет, по-видимому, в начальной стадии движения, поскольку здесь сильнее сказывается расхождение в начальных данных поставленной задачи и задачи Броберга и, кроме того, здесь же находится максимум ускорения dV/dt , влияние которого в данной модели не учитывается.

Поступила 23 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
2. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
3. Craggs J. W. On the propagation of a crack in an elastic brittle material. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 1.
4. Broberg K. B. The propagation of a brittle crack. Arkiv fys., 1960, vol. 18, No. 2.
5. Baker B. R. Dynamic stresses created by a moving crack. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ., Сер. E, 1962, т. 28, № 3).
6. Yoffe F. H. The moving Griffith crack. Philos. Mag., 1951, vol. 42, No. 330.
7. Griffith A. A. The theory of rupture. Proc. 1-st Intern. Congr. Appl. Mech. Delft., 1924, pp. 55—63.
8. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.