УДК 532.529,6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОГО ЭЛЛИПСОИДА

О. М. ЛАВРЕНТЬЕВА

(Новосибирск)

Рассматривается движение конечной массы идеальной жидкости, целиком ограниченной свободной поверхностью, при котором вектор скорости есть линейная функция координат. Поверхностное натяжение и массовые силы отсутствуют. Следует отметить, что движение с линейным полем скоростей возможно и в более общем случае, когда частицы жидкости могут притягиваться по закону Ньютона (см., например, [1]). Область, занятая жидкостью, необходимо имеет форму эллипсоида. Движение жидкого эллипсоида в отсутствие массовых сил исследовал Л. В. Овсянников в [2], где, в частности, были найдены точные решения, описывающие деформацию эллипсоида вращения и показана неустойчивость потенциальных движений относительно вихревых возмущений. Для всех решений, построенных в [2], направления постоянных векторов момента импульса и циркуляции совпадают с направлением одной из осей эллипсоида. В данной работе исследуются все движения, обладающие этим свойством. Доказана неустойчивость полученных в [2] точных решений относительно возмущений, сохраняющих момент импульса и циркуляцию. При некоторых дополнительных условиях получены точные асимптотики изменения длин полуосей эллипсоида при больших значениях времени.

1. Постановка задачи. Пусть при $t = 0$ направления осей координат совпадают с направлениями осей эллипсоида, начало координат — с центром масс эллипсоида. Тогда для рассматриваемого класса движений поле скоростей u и давлений p может быть представлено в виде [2—4]

$$u(x, t) = A'(t)A^{-1}x,\ p(x, t) = -(\rho/2)a(t)(xA^{-1}A^{*-1}x - 2c).$$

Здесь ρ — плотность жидкости; c — произвольная положительная постоянная; $A(t)$ и $a(t)$ — неизвестные матрица и скалярная функция, удовлетворяющие системе уравнений

$$A'' = a(t)A^{*-1}; \tag{1.1}$$

$$\det A = n^3 \tag{1.2}$$

и начальным данным

$$A(0) = N, \quad A'(0) = A'_0 \tag{1.3}$$

где N — диагональная положительная матрица, A'_0 — произвольная матрица, удовлетворяющие условиям согласования с уравнением (1.2) $\det N = n^3$, $\mathrm{Sp}(N^{-1}A'_0) = 0$, штрих обозначает дифференцирование по времени, $*$ — транспонирование матрицы.

Уравнение свободной поверхности имеет вид $xA^{-1}A^{*-1}x = 2c$.

Заметим, что преобразование $t \to n^2t$, $A \to nA$ оставляет уравнение (1.1) неизменным, а уравнение (1.2) приводит к виду $\det A = 1$. Ниже всюду предполагается, что это преобразование уже сделано.

В [3] была доказана однозначная разрешимость задачи (1.1)—(1.3) для всех $t > 0$. В [4] установлены некоторые достаточные условия неограниченного возрастания одной из полуосей эллипсоида и показано, что решение системы (1.1), (1.2) описывает движение точки по геодезической на поверхности $\det A = n^3$ в R^9 с постоянной скоростью, что позволило найти в этой задаче новый класс точных решений с линейной по t матрицей A.

Следуя [2, 3], можно привести систему (1.1), (1.2) к нормальной форме:

$$A'' = [\mathrm{Sp}(A^{-1}A')^2/\mathrm{Sp}(A^{-1}A^{*-1})]A^{*-1}. \tag{1.4}$$

Равенство (1.2) представляет собой интеграл нулевого порядка системы (1.4). Кроме того, эта система имеет еще 7 интегралов первого порядка, соответствующих физическим законам сохранения энергии

$$(1/2)\mathrm{Sp}(A'A'^*) = E, \tag{1.5}$$

момента количества движения

$$A'A^* - AA'^* = \mathbf{C} \tag{1.6}$$

и циркуляции

$$A'^*A - A^*A' = \mathbf{L}, \tag{1.7}$$

где E — положительная константа; $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}$ — постоянные антисимметричные матрицы.

Пусть теперь матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}$ имеют вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

т. е. направление векторов момента импульса и циркуляции совпадает с направлением оси x_3. Решение задачи (1.4), (1.3) в этом случае имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Если сделать замену переменных $A(t) = Q_1 Z Q_2$, где $Z = \operatorname{diag}(z_1, z_2, z_3)$,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то уравнение (1.2) запишется в форме

(1.9) $$z_1 z_2 z_3 = 1,$$

а система (1.1) после умножения на Q_1^{-1} слева и на Q_2^{-1} справа примет вид

(1.10) $$z_1'' = a(t)\, z_1^{-1} + z_1 (\varphi'^2 + \psi'^2) - 2 z_2 \varphi' \psi',$$
$$z_2'' = a(t)\, z_2^{-1} + z_2 (\varphi'^2 + \psi'^2) - 2 z_1 \varphi' \psi',$$
$$z_3'' = a(t)\, z_3^{-1};$$

(1.11) $$\varphi'' z_1 - \psi'' z_2 + 2\varphi' z_1' - 2\psi' z_2' = 0,$$
$$\varphi'' z_2 - \psi'' z_1 + 2\varphi' z_2' - 2\psi' z_1' = 0.$$

Из уравнений (1.11) следуют тождества

(1.12) $$2\psi' z_1 z_2 - \varphi' \left(z_1^2 + z_2^2\right) = c,$$
$$2\varphi' z_1 z_2 - \psi' \left(z_1^2 + z_2^2\right) = l,$$

эквивалентные интегралам (1.6), (1.7), если матрицы **L** и **C** имеют вид (1.8).

Если выразить φ' и ψ' из (1.12) и подставить в (1.10), получится

(1.13) $$z_1'' = a(t)\, z_1^{-1} + \left[(c^2 + l^2)\, z_1 \left(z_1^4 - 3z_2^4 + 2z_1^2 z_2^2\right) - 2cl z_2 \left(z_2^4 - 3z_1^4 + 2z_1^2 z_2^2\right)\right] \left(z_1^2 - z_2^2\right)^{-4},$$
$$z_2'' = a(t)\, z_2^{-1} + \left[(c^2 + l^2)\, z_2 \left(z_2^4 - 3z_1^4 + 2z_1^2 z_2^2\right) - 2cl z_1 \left(z_1^4 - 3z_2^4 + 2z_1^2 z_2^2\right)\right] \left(z_1^2 - z_2^2\right)^{-4}, \quad z_3'' = a(t)\, z_3^{-1}.$$

Систему (1.13) можно записать в более компактной форме

(1.14) $$z_1'' = a(t)\, z_1^{-1} + c_1^2 (z_1 + z_2)^{-3} + c_2^2 (z_1 - z_2)^{-3},$$
$$z_2'' = a(t)\, z_2^{-1} + c_1^2 (z_1 + z_2)^{-3} - c_2^2 (z_1 - z_2)^{-3},$$
$$z_3'' = a(t)\, z_3^{-1},$$

положив $c_1 = (l - c)/\sqrt{2}$, $c_2 = (l + c)/\sqrt{2}$.

Если продифференцировать (1.9) 2 раза и использовать (1.14), то можно получить выражение $a(t)$ через z_i, z_i':

(1.15) $$a(t) = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{z_i^2}\right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{z_i'^2}{z_i^2} - \frac{c_1^2}{z_1 z_2 (z_1 + z_2)^2} + \frac{c_2^2}{z_1 z_2 (z_1 - z_2)^2}\right].$$

Интеграл энергии (1.5) в терминах c_i, z_i имеет вид

(1.16) $$\sum_{i=1}^{3} z_i'^2 + \frac{c_1^2}{(z_1 + z_2)^2} + \frac{c_2^2}{(z_1 - z_2)^2} = E.$$

В [4] было показано, что для любого решения системы (1.14), (1.15) верно, по крайней мере, одно из следующих равенств:

(1.17) $$\lim_{t \to \infty} z_i(t) = \infty.$$

Причем равенство (1.17) при $i = 3$ возможно только в случае $c_1 = c_2 = 0$. Без ограничения общности можно полагать, что выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} z_1(t) = \infty$.

Принимая z_1 за новую независимую переменную, пользуясь тождеством (1.16) и выражая z_3 из (1.9), можно свести систему (1.14), (1.15) к одному неавтономному уравнению второго порядка:

$$(1.18)\quad d^2z_2/dz_1^2 = 2z_1^{-1}z_2^{-1}\left(z_1^2+z_2^2+z_1^4z_2^4\right)^{-1}\left[z_1z_2^2+\left(z_1^2z_2-z_2^3\right)dz_2/dz_1+\left(z_1^3-\right.\right.$$
$$\left.\left.-z_1z_2^2\right)(dz_2/dz_1)^2-z_1^2z_2(dz_2/dz_1)^3\right]+E^{-1}\left[1+z_1^{-4}z_2^{-2}+2z_1^{-3}z_2^{-3}dz_2/dz_1+\right.$$
$$\left.+\left(1+z_1^{-2}z_2^{-4}\right)(dz_2/dz_1)^2\right]\left\{c_1^2\left(z_1+z_2^{-2}(1-dz_2/dz_1)\left[(z_1+z_2)^{-1}-z_1z_2\left(z_1^2+z_2^2+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+z_1^4z_2^4\right)^{-1}\right]+c_2^2\left(z_1-z_2\right)^{-2}\left[(z_1-z_2)^{-1}(1+dz_2/dz_1)+z_1z_2\left(z_1^2+z_2^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z_1^4z_2^4\right)^{-1}(1-dz_2/dz_1)\right]\Big\}.$$

2. Асимптотика решений при $t\to\infty$. Рассмотрим сначала решения, для которых матрица A диагональна, $A = \operatorname{diag}(z_1, z_2, z_3)$. В [1] показано, что условие $\mathbf{L} = \mathbf{C} = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы в некоторой системе координат матрица A была диагональна. Величины z_1, z_2, z_3, очевидно, должны удовлетворять системе (1.14), (1.15) с $c_1 = c_2 = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае правые части уравнения (1.14) неотрицательны, поэтому

$$(2.1)\qquad z_i'' \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

откуда заключаем, что если $z_i'(t^*) > 0$ для некоторого t^*, то выполнены неравенства

$$(2.2)\qquad z_i(t^*) + (t-t^*)\,z_i'(t^*) \leqslant z_i(t) \leqslant z_i(t^*) + (t-t^*)\sqrt{E}$$

при всех $t > t^*$. Оценка сверху в (2.2) следует из (1.16). Из (2.1) следует также, что если $z_i(t)$ ограничено, то существует c такое, что

$$(2.3)\qquad -ct^{-1} < z_i'(t) < 0.$$

Оценивая в (1.14) правую часть с использованием (2.2) и (2.3), можно получить детальную асимптотику $z_i(t)$ при больших t.

Рассмотрим сначала режим движения, когда при $t\to\infty$ неограниченно возрастают две полуоси эллипсоида z_1 и z_2. Достаточное условие его реализации: $z_1'(0) > 0$, $z_2'(0) > 0$. Из оценки (2.2) следует существование b_i, d_i таких, что

$$(2.4)\qquad b_it \leqslant z_i(t) \leqslant d_it, \quad b_i \leqslant z_i'(t) \leqslant d_i$$

при достаточно больших t. Пользуясь (2.4), оценим величину $a(t)$ при больших t. В силу (1.9) имеем

$$a(t) = 2\left(z_1{}^{2}+z_2^{-2}+z_1^2z_2^2\right)^{-1}\left(z_1'^2z_1^{-2}+z_2'^2z_2^{-2}+z_1'z_2'z_1^{-1}z_2^{-1}\right) \leqslant 2\left(b_1^{-2}t^{-2}+\right.$$
$$\left.+b_2^{-2}t^{-2}+d_1^2d_2^2t^4\right)^{-1}\left(d_1^2b_1^{-2}t^{-2}+d_2^2b_2^{-2}t^{-2}+d_1d_2b_1^{-1}b_2^{-1}t^{-2}\right) \leqslant \gamma t^{-6}.$$

Точно так же получается и оценка снизу. В итоге имеем

$$(2.5)\qquad \delta t^{-6} \leqslant a(t) \leqslant \gamma t^{-6}.$$

Подставляя оценки (2.4), (2.5) в уравнения (1.14) и интегрируя полученные дифференциальные неравенства, заключаем, что существуют постоянные $\alpha_i > 0$, β_i, $\gamma_i > 0$, $\delta_i > 0$ такие, что при больших t выполнено

$$(2.6)\qquad \alpha_it + \beta_i + \gamma_it^{-5} \leqslant z_i(t) \leqslant \alpha_it + \beta_i + \delta_it^{-5}.$$

Оценка $z_3(t)$ следует из оценок (2.6) и интеграла (1.9) и имеет вид $z_3(t) = O(t^{-2})$ при $t\to\infty$.

Кроме только что описанного, возможны и два другие режима расширения эллипсоида при $t\to\infty$.

1. Одна полуось z_1 стремится к бесконечности при $t\to\infty$, другая z_3 — к нулю, третья z_2 — к некоторой, отличной от нуля постоянной α_3. При этом существуют положительные α_1, β_1, γ_1, γ_2, γ_3 такие, что

$$(2.7)\qquad \alpha_1t + \beta_1 + \gamma_1t^{-3} \leqslant z_1(t) \leqslant \alpha_1t + \beta_1 + \gamma_2t^{-3},$$
$$\alpha_3 \leqslant z_2 \leqslant \alpha_3 + \gamma_3t^{-1}.$$

2. Одна полуось z_1 стремится к бесконечности при $t\to\infty$, две другие — к нулю. В этом случае выполнены следующие неравенства:

$$(2.8)\qquad \alpha_1t + \beta_1 \leqslant z_1(t) \leqslant \alpha_1t + \beta_1 + \gamma_1t^{-1}$$

с некоторыми β_1, $\alpha_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$.

Рассмотрим теперь общую систему (1.14) в случае $c_1^2 \leqslant c_2^2$. Из формулы (1.15) видно, что в этом случае $a(t) > 0$ и, следовательно, выполнены неравенства $z_1'' \geqslant 0$, $z_3'' \geqslant 0$, если $z_1(0) > z_2(0)$.

Действуя так же, как в случае $c_1 = c_2 = 0$, можно показать, что для бесконечно возрастающей полуоси эллипсоида выполнены оценки типа (2.8).

3. Об устойчивости точных решений. Уравнение (1.18) при $c_2 = 0$ имеет решение $z_2 = z_1$, а при $c_1 = c_2 = 0$ оно, кроме того, имеет решение $z_2 = z_1^{-1/2}$. Соответствующие решения системы (1.1), (1.2) описывают деформацию жидкого эллипсоида вращения, причем в первом случае при $t \to \infty$ у этого эллипсоида неограниченно возрастают две полуоси, а во втором — одна. Оба эти решения были найдены Л. В. Овсянниковым. Им же было показано, что второе решение, описывающее потенциальное движение жидкости, неустойчиво относительно вихревых возмущений (для уравнения (1.18) это означает, что его решение $z_2 = z_1^{-1/2}$ неустойчиво относительно возмущений параметра c_1), причем сколь угодно малые вихревые возмущения приводят к тому, что при $t \to \infty$ неограниченно возрастают две полуоси эллипсоида, а не одна, как в исходном решении. Ниже показано, что к тому же результату приводят и сколь угодно малые потенциальные возмущения этого движения. Показана также неустойчивость первого движения относительно возмущений, сохраняющих момент импульса и циркуляции, т. е. доказана неустойчивость точных решений уравнений (1.18) $z_2 = z_1^{-1/2}$ и $z_2 = z_1$ относительно возмущений начальных данных.

Пусть $c_2 = 0$. Введем обозначение $z_1 = y$ и рассмотрим для уравнения (1.18) задачу Коши

$$z_2(y_0) = y_0, \quad dz_2/dy = 1 + \dot{z}_0 \text{ при } y = y_0.$$

Решение $z_2(y)$ ищется в виде $z_2(y) = y + z(y)$. В переменных y и z уравнение (1.18) принимает вид

$$\begin{gathered}\ddot{z} = -2y^{-1}(y+z)^{-1}[2y^2 + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4]^{-1}[3y^2z + \\ + 3yz^2 + z^3 + \dot{z}(3y^3 + 9y^2z + 5yz^2 + z^3) + \dot{z}^2(3y^3 + 5y^2z + yz^2) + \\ + \dot{z}^3(y^3 + y^2z)] - cz(2y+z)^{-2}\{(2y+z)^{-1} - (y^2 + yz)[2y^2 + \\ + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4]^{-1}\}[1 + y^{-4}(y+z)^{-2} + 2(1+\dot{z})y^{-3}(y+z)^{-3} + (1+\dot{z})^2 \times \\ \times y^{-2}(y+z)^{-4} + (1+\dot{z})^2],\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\dot{z} = dz/dy$, $\ddot{z} = d^2z/dy^2$, $c = c_1^2/E$. Пусть теперь $y_0 \geqslant 2$ и на некотором интервале (y_0, y_1) выполнено неравенство

$$\max(|\dot{z}|, |z/y|) \leqslant 1/16. \tag{3.2}$$

Умножая обе части уравнения (3.1) на $2\dot{z}$ и оценивая правую часть при условии (3.2), можно получить

$$d(\dot{z}^2)/dy \leqslant (3/4)y^{-7},$$

откуда следует, что

$$\dot{z}^2 \leqslant \dot{z}_0^2 + 2^{-3}y_0^{-6} \leqslant \dot{z}_0^2 + 2^{-9}$$

и, значит, условие (3.2) выполнено для всех y, если только

$$\dot{z}_0^2 < 2^{-9}. \tag{3.3}$$

Пусть теперь (3.3) выполнено. Умножим обе части уравнения (3.1) на $\dot{z}y^{-8}(y + z)[2y^2 + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4]$ и оценим правую часть с помощью неравенства (3.2). После несложных преобразований получим, что если $y > y_0 \geqslant \max(2, c^{1/3})$, то

$$\frac{d}{dy}\left\{\dot{z}^2 \frac{y+z}{y^8}[2y^2 + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4] - \frac{z^2}{2y}\right\} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\dot{z}^2 y^{-8}(y+z)[2y^2 + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4] - z^2y^{-1}/2 \geqslant \dot{z}_0^2(y_0 + 2y_0^{-5}). \tag{3.4}$$

Пользуясь неравенствами (3.2), (3.4), получаем

$$\dot{z}^2 \geqslant \dot{z}_0^2 y_0 / (4y),$$

откуда следует

$$|z| \geqslant |\dot{z}_0| y_0^{1/2}\left(y^{1/2} - y_0^{1/2}\right).$$

Таким образом, показано, что решение $z_2 = z_1$ уравнения (1.18) неустойчиво при $z_1 \geqslant \max(2, c^{1/3})$.

Верно также следующее утверждение: для любого положительного $\alpha < 1$ найдутся такие y_1, δ, что решение задачи Коши $z(y_0) = 0$, $\dot{z}(y_0) = \dot{z}_0$ для уравнения (3.1) удовлетворяет неравенству

$$|z(y)| \geqslant |\dot{z}_0| y_0^{1-\alpha}\left(y^{\alpha} - y_0^{\alpha}\right)$$

при всех $y > y_0$, если только $|\dot{z}_0| < \delta$, $y_0 > y_1$.

Для доказательства этого утверждения нужно умножить обе части уравнения (3.1) на $\dot{z}(y+z)^{-2\alpha-7}[2y^2 + 2yz + z^2 + y^4(y+z)^4]$ и провести рассуждения, аналогичные проведенным выше в случае $\alpha = 1/2$.

Пусть теперь $c_1 = c_2 = 0$. В этом случае для неограниченно возрастающих полуосей эллипсоида z_1 и z_2 выполнены неравенства (2.6). В силу доказанного выше, если при некотором t_0

$$z_1(t_0) = z_2(t_0), \quad z_1'(t_0) \neq z_2'(t_0),$$

в неравенствах (2.6) $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и, следовательно, при больших t величина $|z| = |z_1 - z_2|$ возрастает как линейная функция t.

Уравнение (1.18) при $c_1 = c_2 = 0$ имеет, кроме рассмотренного выше, точное решение $z_2 = z_1^{-1/2}$. Ниже будет показано, что соответствующее ему решение системы (1.14), (1.15) является в случае $c_1 = c_2 = 0$ единственным решением этой системы, когда длины двух полуосей эллипсоида стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Заметим, что при $c_1 = c_2 = 0$ для решения задачи (1.14), (1.9) имеют место неравенства (2.1), (2.2) и интеграл энергии

$$z_1'^2\left(1 + z_1^{-4}z_2^{-2}\right) + 2z_1'z_2'z_1^{-3}z_2^{-3} + z_2'^2\left(1 + z_1^{-2}z_2^{-4}\right) = E.$$

Отсюда следует, что если $\dot{z}_2(y_1) > 0$ для некоторого y_1, то при всех $y > y_1$ выполнено неравенство

$$\dot{z}_2(y) \geqslant \dot{z}_2(y_1)\left[1 + y_1^{-4}z_2^{-2}(y_1) + 2\dot{z}_2(y_1)y_1^{-3}z_2^{-3}(y_1) + \dot{z}_2^2(y_1) + \right.$$
$$\left. + \dot{z}_2^2(y_1)y_1^{-2}z_2^{-4}(y_1)\right]^{-1/2}. \tag{3.5}$$

Предположим теперь, что существует решение уравнения (1.18) при $c_1 = c_2 = 0$ отличное от $z_2 = z_1^{-1/2}$, такое, что

$$\lim_{y\to\infty} z_2(y) = \lim_{y\to\infty}[yz_2(y)]^{-1} = 0. \tag{3.6}$$

В силу отмеченного выше свойства решения (3.5) полуоси z_2 и $z_3 = (yz_2)^{-1}$ должны убывать с ростом y:

$$\dot{z}_2 < 0, \quad y^{-1} + \dot{z}_2 z_2^{-1} > 0. \tag{3.7}$$

Из (3.6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $y_2(\varepsilon)$ такое, что при $y > y_2(\varepsilon)$ $(\varepsilon y)^{-1} \leqslant z_2 \leqslant \varepsilon$.

Предположим, что существует $y_0 > y_2$ (0,04) такое, что

$$2\dot{z}_2(y_0) > -y_0^{-3/2}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим для уравнения (1.18) задачу Коши с начальными данными в точке y_0:

$$z_2(y_0) = z_0 + y_0^{-1/2}, \quad \dot{z}_2(y_0) = \dot{z}_0 - y_0^{-3/2}/2.$$

В силу неравенств (3.7), (3.8)

$$0 < \dot{z}_0 < y_0^{-3/2}/2. \tag{3.9}$$

Пусть $z = z_2 - y^{-1/2}$. Из непрерывности решения (1.18) следует, что (3.9) выполнено и на некотором интервале (y_0, y_1). Умножая обе части уравнения на $2\dot{z}y$, прибавляя к ним величину $\dot{z}^2 + z^2y^{-2}/9 - 2z\dot{z}y^{-1}/9 - zy^{-3/2}/3$ и оценивая правую часть получившегося равенства, можно показать, что на интервале (y_0, y_1) выполнено неравенство

$$d(\dot{z}y - z^2y^{-1}/9)/dy \geqslant 0, \tag{3.10}$$

откуда следует, что если

$$\dot{z}_0 > |z_0| y_0^{-1}/3, \tag{3.11}$$

то существует y_1 такое, что $2\dot{z}(y_1) > y_1^{-3/2}$. Таким образом, доказана неустойчивость решения $z_2 = y^{-1/2}$ уравнения (1.18).

Для доказательства того, что $z_2 = y^{-1/2}$ является единственным решением (1.18), удовлетворяющим (3.6) в случае $c_1 = c_2 = 0$, достаточно показать теперь, что для любого решения (1.18) со свойствами (3.6), (3.7), отличного от $z = y^{-1/2}$, найдется $y_0 > y_2$ (0,04) такое, что при $y = y_0$ для одной из функций z, $\bar{z} = (yz_2)^{-1} - y^{-1/2}$ выполнены неравенства (3.9), (3.11). Очевидно, что $\bar{z} = z_3 - y^{-1/2}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и z, если $c_1 = c_2 = 0$, и для $\bar{z}$ верны все утверждения, доказанные выше для z.

Для любой непрерывной функции $z_2(y)$ верно одно из следующих трех утверждений:

1) для любого y_1 найдется $y_0 > y_1$ такое, что $z_2(y_0) = y_0^{-1/2}$;
2) существует y_1 такое, что $z_2 < y^{-1/2}$ при всех $y > y_1$;
3) существует y_1 такое, что $z_2 > y^{-1/2}$ при всех $y > y_1$.

В случае 1 условие (3.11) выполнено, если $\dot{z}(y_0) > 0$, так как $z(y_0) = 0$, а $|\dot{z}(y_0)| > 0$, поскольку в противном случае решение совпадало бы с $z_2 = y^{-1/2}$. Если $\dot{z}(y_0) < 0$, то неравенства (3.9), (3.11) выполнены для $\bar{z}$.

Рассмотрим теперь случай 2. Предположим, что для всех $y > y_1 > y_2$ (0,04) выполнено

$$\dot{z} \leqslant zy^{-1}/3, \tag{3.12}$$

тогда, интегрируя (3.12) и учитывая, что $z < 0$, получаем

$$z(y) \leqslant z(y_1) y_1^{1/3} y^{-1/3},$$

что противоречит положительности величины $z_2 = z + y^{-1/2}$ при достаточно больших y. Таким образом, показано, что существует $y_0 > y_2$ (0,04) такое, что

$$\dot{z}(y_0) > z(y_0) y_0^{-1}/3,$$

откуда следует (3.11) и первое из неравенств (3.9). Второе неравенство (3.9) вытекает из предположения $\dot{z}_2 < 0$.

Случай 3 сводится к 2, если вместо z_2 рассмотреть z_3.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
2. **Овсянников Л. В.** Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости.— В кн.: Труды пятой сессии Ученого Совета по народнохозяйственному использованию взрыва. Фрунзе: ИЛИМ, 1965.
3. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: НГУ, 1975.
4. **Лаврентьева О. М.** О движении жидкого эллипсоида.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 4.

Поступила 10/III 1983 г.

УДК 539.374

ОДНО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. СЕНАШОВ

(Красноярск)

Пусть $r\theta z$ — цилиндрическая система координат, σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений, u, v, w — компоненты вектора скорости, k — предел текучести при чистом сдвиге.

Уравнения идеальной пластичности с условием текучести Мизеса имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{1}$$