

Если теперь (5.8) подставить в (5.2), (5.3), то получим

$$(5.9) \quad \bar{\varepsilon}^2 = -h_1 \sqrt{\bar{\omega}_0} \frac{\cos \chi_1}{\cos \chi_2};$$

$$(5.10) \quad \sqrt{\bar{\omega}_0} \left[1 - h_2 \left(\frac{\cos \chi_1}{\cos \chi_2} \right)^2 \right] = h_3 \frac{\sin (\chi_1 - \chi_2)}{\cos \chi_2},$$

где h_n — некоторые функции параметров $c, \bar{\Gamma}_0$. Далее, принимая во внимание, что γ_k не зависит от $\bar{\omega}_0$, с помощью (5.2) и (5.6)–(5.8) найдем

$$(5.11) \quad \chi_1 - \chi_2 = \chi_0 + \kappa_2 - (\bar{\Gamma}_0/2) \ln \bar{\omega}_0,$$

где χ_0 — некоторая ограниченная функция параметров $c, \bar{\Gamma}_0$.

Из (5.11) следует, что решение системы (5.9), (5.10) существует в широком диапазоне значений исходных параметров $c, \bar{\Gamma}_0, \alpha_1$ и ξ , за исключением, быть может, некоторого дискретного их множества. Однако диапазон значений этих параметров ограничивается условием устойчивости предельного цикла, которое следует из (4.13) с учетом (5.1) и имеет вид $\cos \chi_1 < 0$.

Поступила 15 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. Полн. собр. соч. Т. 6. М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.
2. Пухлий В. А., Беляновский Е. С., Хвоццевский И. Я. О математической модели обтекания решетки профилей центробежного вентилятора нестационарным дозвуковым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Деп. ВНИИС. Библиогр. указ. депон. рукоп., № 3, 1981. № регистр. 2346.
3. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

УДК 532.529.5

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КВАЗИОДНОМЕРНОЕ НЕРАВНОВЕСНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

A. B. Федоров, B. M. Фомин, E. P. Чиркашенко
(Новосибирск)

Качественное исследование системы дифференциальных уравнений квазиодномерного неравновесного течения газов в каналах при установившемся режиме позволяет описать возможные типы движения, имеющие место при различном задании образующей канала и кинетического уравнения, описывающего релаксационный процесс. Полезность такого рассмотрения заключается в возможности применения результатов этого анализа при численном решении задач о течении неравновесного газа. Исследование осложняется тем обстоятельством, что физическая модель описывается неавтономной системой уравнений. В [1, 2] приводится метод анализа фазового портрета такого рода систем. Ниже воспользуемся данным способом для решения задачи о течении смеси газа и жидких частиц с учетом неравновесной кристаллизации в каналах переменной площади сечения.

1. Физическая постановка задачи. Сведение к системе, записанной в нормальной форме. Получение характеристического уравнения. Уравнения квазиодномерного течения с учетом одного неравновесного процесса в канале переменной площади сечения имеют вид

$$(1.1) \quad uy = C_1 v, \quad C_1 = u_0 y_0 / v_0, \quad u du + v dp = 0, \quad T dS = -e_\xi d\xi, \\ d\xi = (\chi/u) dx.$$

Система (1.1) дополняется уравнениями состояния

$$(1.2) \quad p = -e_v(S, v, \xi), \quad T = e_S(S, v, \xi),$$

где $\rho = 1/v$ — плотность; v — удельный объем; u — скорость; p — давление; T — температура; S — энтропия; e — внутренняя энергия газа; ξ — релаксационный параметр; κ — функция источников для ξ ; $y = y(x)$ — уравнение, описывающее образующую сопла. Выберем в качестве искомых функций M^2 , v , S , ξ (M^2 — «замороженное» число Маха) и запишем (1.1), (1.2) в виде

$$(1.3) \quad \frac{\dot{M}^2}{M^2} = \frac{af - bc + d\Delta M^2}{\Delta M^2} \equiv \frac{P}{\Delta M^2}, \quad \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{M}^2}{f} - \frac{2b}{f} - \frac{M^2}{f}d, \quad \dot{S} = -\frac{e_\xi}{e_S}\dot{\xi}, \quad \dot{\xi} = \frac{\kappa}{u},$$

где $a = y/y$; $b = (e, p)\xi/(ve_S p_v)$; для любых φ, ψ обозначим $(\varphi, \psi) = \partial(\varphi, \psi)/\partial(S, \xi)$; $c = vp_{vv}/p_v$; $d = -(e, p_v)\xi/(e_S p_v p_v)$; $f = -2\Delta M^2 - cM^2$; $\Delta M^2 = M^2 - 1$; точка означает дифференцирование по x .

Для существования непрерывного решения системы (1.3), принимающего значение $M^2 = 1$, необходимо потребовать, чтобы одновременно с обращением в нуль знаменателя $M^2 - 1 = 0$ обращался в нуль и числитель в первом из уравнений (1.3). Можно видеть, что оставшиеся уравнения будут в окрестности особой точки также иметь конечные производные. Таким образом, характер особенностей, возникающих в (1.3) при $M^2 = 1$, можно анализировать (аналогично [1]) на основе метода, применяемого для исследования систем на плоскости. Уравнение особой поверхности в области изменения переменных M^2, v, S, x, ξ имеет вид $a + b = \dot{y}/y + (e, p)\dot{\xi}/ve_S p_v = 0$, $M^2 - 1 = 0$, а уравнение для определения особых направлений будет следующим:

$$(1.4) \quad K^2 - AK + B = 0,$$

где

$$A = \frac{\partial P}{\partial M^2} - \frac{v}{c} \frac{\partial P}{\partial v}; \quad -B = \frac{\partial P}{\partial v} \frac{(2b + d)v}{c} + \frac{\partial P}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial P}{\partial x}$$

(здесь переменные взяты на особой поверхности).

Характер особых точек определяется в зависимости от знаков корней уравнения $K_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$, причем коэффициенты A, B после некоторых преобразований примут вид

$$A = -bv \frac{\partial}{\partial v} \ln \left[-\frac{\Delta \xi}{e_S} \right], \quad \Delta \xi = \xi - \xi_{e_i}$$

$$B = b^2 v^2 \left[\frac{p_{vv}}{(e, p)} (\ln[-b], e) + \frac{\partial}{\partial v} \left[\ln \frac{v^2}{(e, p)} \right] \frac{\partial}{\partial v} \ln[-b] \right] + ac.$$

В зависимости от знаков K_i возможен различный характер особых точек. При $B < 0$ особая точка типа седла; при $B > 0$ и $A^2 - 4B > 0$ особая точка типа узла ($A < 0$ — узел с отрицательными собственными направлениями, $A > 0$ — узел с положительными собственными направлениями); при $A^2 - 4B < 0$ особенность типа фокуса [1]. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

2. Исследование течения смеси газа и жидкких (твердых) частиц с учетом их кристаллизации (плавления) в каналах переменной площади сечения. Уравнения, описывающие указанные выше течения в случае различия температур диспергированной и непрерывной фаз, имеют вид [3]

$$(2.1) \quad \rho u y = C_1, \quad e = c_V T + c_2 T_2 - L\xi,$$

$$udu + vdp = 0, \quad p = \bar{\alpha}T/W, \quad W = v - \beta - \delta\xi,$$

$$e + pv + u^2/2 = C_3, \rho_{22} = r, \rho_{33} = s, r, s = \text{const},$$

$$ud\xi = -(1/\tau)\Delta\xi dx, \xi_e = \xi_0 \exp(\zeta - \zeta_0), \zeta = (L - \delta p)/T,$$

$$udT_2 = -(1/\tau_1)(T_2 - T)dx,$$

где ρ, u, p, e — величины, определенные для смеси; $\rho = \sum_i^3 \rho_i$, $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ — средняя плотность фазы ($i = 1$ — газ, $i = 2$ — жидкость, $i = 3$ — твердая составляющая смеси); m_i — объемная концентрация; ρ_{ii} — истинная плотность; T, T_2 — температура непрерывной и диспергированной фаз; $\rho_1 = \bar{\alpha}\rho$; $\rho_2 = (\alpha - \xi)\rho$; $c_v = \alpha c_{v1}$; $\alpha = 1 - \xi$; $c_2 = \alpha c_2^*$; $\alpha = (\rho_{2,0} + \rho_{3,0})/\rho_0$; $\beta = \alpha/r$; $\delta = 1/r - 1/s$; τ, τ_1 — времена релаксации параметров ξ, T_2 ; c_{v1}, c_2^* — теплоемкости фаз; $\xi = \rho_3 v$ — относительная массовая концентрация твердой фазы; L — теплота фазового перехода. Индекс нуль относится к некоторому начальному состоянию, в котором определяются C_1, C_3 .

Можно получить такие предельные варианты модели (5).

1. Если $\tau_1 \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty$, тогда $T_2 \rightarrow \text{const}, \xi \rightarrow \text{const}$. Этот режим соответствует течению с замороженной кристаллизацией, когда газодинамические параметры непрерывной фазы изменяются гораздо быстрее по сравнению с термодинамическим параметром (T_2) дисперсной фазы. Назовем его вариантом $\Gamma(\infty, \infty)$, в [4] он соответствует режиму мгновенного замораживания.

2. Если $\tau_1 \rightarrow 0, \tau \neq 0, \infty$, то этот вариант обозначим $\Gamma(\tau, 0)$, он соответствует мгновенному реагированию температуры дисперсной фазы на изменения в газообразной $T_2 = T$ [3].

3. Если $\tau_1 \neq 0, \infty, \tau \rightarrow 0$, то здесь процесс кристаллизации является равновесным по концентрациям, т. е. $\xi = \xi_e(T, T_2, p)$, $T \neq T_2$, вариант $\Gamma(0, \tau_1)$.

Применим результаты качественного анализа, изложенного в п. 1, для общего релаксационного процесса к описанию течения смеси типа $\Gamma(\tau, 0)$. Будем также для простоты считать малой объемную концентрацию дисперсной фазы, т. е. $\beta \ll v$, и пренебрежем работой, затраченной на изменение объема при кристаллизации, т. е. примем $\delta = 0$.

В этом случае дискриминант, определяющий характер особых точек, имеет вид

$$A^2 - 4B = D(\chi) = b^2(\chi^2 + A_1\chi + A_2),$$

где

$$A_1 = 4\gamma \left(n + h \frac{L_1 - \dot{\varphi}}{L_1} \right); \quad A_2 = 4\gamma(\gamma - 1) \left[-\frac{n}{2} + h \frac{L_1 - \dot{\varphi}}{L_1} - \right.$$

$$\left. - h \frac{1,5L_1 - 1/\Delta\xi}{L_1} - h \frac{\gamma a T}{L_1^2 (\Delta\xi/\tau)^2} \right]; \quad \chi = \frac{v \xi_e v}{\Delta\xi} - (\gamma - 1); \quad L_1 = \frac{L}{c_v T};$$

$$n = \frac{\gamma + 2}{\gamma}; \quad h = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}; \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{c_v} \ln \left[\frac{\xi}{\xi_0} e^{-\xi_0} \right].$$

При малых теплотах фазового перехода L величины χ и $(L_1 - \dot{\varphi})/L_1$ являются конечными, величина $1/\Delta\xi \sim 0(L)$, а знак $D(\chi)$ определяется главным членом в A_2 вида $A_3 a/L^4$. Если предположить, что переход через особую точку происходит в окрестности точки $x = x_*$ такой, что $y(x_*) = 0$, то имеем для $a(x)$ представление $a \simeq mk(k-1)\Delta x^{k-2}/y_*$, где $\Delta x = x - x_*$, $y_* = y(x_*)$. Тогда при $x > x_*$, $a > 0$ с учетом, что $A_3 > 0$, $A/b = \chi \sim 0(1)$, можно сформулировать следующее.

Утверждение 1. При течении смеси газа и кристаллизующихся частиц в сопле Лаваля уравнения, описывающие движение типа $\Gamma(\tau, 0)$ при малых теплотах фазового перехода, имеют в звуковой точке седловидную особенность.

В качестве второго примера рассмотрим течение типа $\Gamma(\infty, \tau_1)$. В этом случае возможно некоторое упрощение общего подхода, изложенного в п. 1. Выбирая в качестве искомых функций M^2 , u и имея связь между производными искомых функций типа второго уравнения из (1.3), можно убедиться, что характер возникающих особенностей при $M^2 = 1$ можно аналогично п. 1 исследовать на основе метода, применяемого для исследования систем на плоскости. Уравнение нулевой особой линии при этом имеет вид

$$M^2 - 1 = 0, \quad a + c_2 \bar{\gamma} (T_2 - T) / u^2 \tau_1 = 0$$

или

$$(2.2) \quad \tau_1 a u^3 + B_1 u^2 + D_1 = 0.$$

Здесь $B_1 = [(1 + \gamma)\gamma - 2\bar{\gamma}c_2]/2\gamma > 0$; $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$; $D_1 = C_3 \bar{\gamma} < 0$. Изучим поведение корней $u = u(x)$ этого уравнения. Элементарный анализ показал, что при $a \in [-a_1, a_1] = J$, $a_1 = -(2D_1/\tau_1)\sqrt{-(B_1/3D_1)^3}$ уравнение нулевой линии обладает тремя действительными корнями; вне этого интервала, т. е. при $a \notin J$ имеются один вещественный и два мнимых корня. Причем, если $a < 0$ и лежит в области J , корни являются двумя положительными и отрицательным, если же $a < 0$ и лежит в R/J , то единственный вещественный корень является отрицательным. Рассмотрение $a > 0$ и $a \notin J$ показывает, что здесь имеются два отрицательных и один положительный корень; $a > 0$, $a \in R/J$ — два комплексных и один действительный положительный корень.

Вблизи точки минимального сечения сопла можно выписать решения в явном виде с точностью до $o(a^2)$:

$$(2.3) \quad u_{1,2}(x) = \pm \sqrt{-\frac{D_1}{B_1} + a \frac{\tau_1 D_1}{2B_1^2} + \dots}, \quad u_3(x) = -\frac{B_1}{\tau_1 a} + \dots,$$

т. е. вблизи точки минимального сечения сопла $x = x_*$ решения $u_{1,2}(x)$ остаются непрерывными, $u_3(x)$ имеет разрыв второго ряда. В отличие от равновесного и замороженного течений газа в сопле Лаваля здесь переход через скорость звука осуществляется не при $x = x_*$, а, как известно, в случае выделения тепла ниже этого течения. Используя разложения $u = u_f + \tau_1^{-1} u_1 + \dots$, $x = x_* + \tau_1^{-(k-1)} x_1 + \dots$, и известную уже асимптотику образующей сопла ($k = 2n$), найдем из (2.2) первый член разложения координаты критического сечения

$$x_{kp} - x_* = \left(-\frac{B_1 u_f^2 + D_1}{k a_1 u_f^2 \tau_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} + \dots = \left[\frac{c_2 (\gamma - 1)}{a_1 k u_f^3 \tau_1} (T_{2,0} - T_f) \right]^{\frac{1}{k-1}} + \dots,$$

где

$$a_1 = km/y_*; \quad u_f^2 = \frac{2(c_3 - c_2 T_{2,0})(\gamma - 1)}{\gamma + 1}; \quad T_f = \frac{2(c_3 - c_2 T_{2,0})(\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)}.$$

Отсюда, так как $T_{2,0} > T_f$, критическое сечение в неравновесном (околозамороженном) течении находится вниз по потоку от x_* . После определения x_{kp} по формуле (2.3) находим единственное положительное решение уравнения (2.2). Таким образом, мы показали, что существует решение для течения типа $\Gamma(\infty, \tau_1)$, обращающее числитель и знаменатель в нуль. Дальнейший анализ, аналогичный приведенному в п. 1, позволил сформулировать следующее.

Утверждение 2. При течении смеси газа и кристаллизующихся частиц в сопле Лаваля уравнения, описывающие движения типа $\Gamma(\infty, \tau_1)$, имеют в звуковой точке особенность типа узел при

$$\begin{aligned} U &> U_4, \quad t \in [0, t_3], \quad U \in [U_5, U_3], \quad t \in [0, t_3], \\ U &\in (U_2, U_4), \quad t \in (0, 1), \quad U \in [U_1, U_2], \quad t \in (0, 1), \\ U &\in [U_5, U_1], \quad t \in (0, t_1); \quad U < U_5, \quad t \in [t_2, t_3], \end{aligned}$$

где $a_2 = \gamma(1 + \gamma - \bar{\gamma}c_2)$; $a_3 = a_2 + d_1U$; $b_1 = -\gamma(1 + \gamma) + 2\bar{\gamma}c_2$; $c_1 = \bar{\gamma}^3c_2/4$; $d_1 = (1 - \gamma^2)c_2$; $U = (y/y)/(y/y)^2$; $U_1 = (\gamma - 2)/(1 + \gamma)$; $U_2 = -a_2/d_1$;

$$U_3 = U_2 + b_1^2/4d_1c_1; \quad U_4 = U_2 + b_1/d_1; \quad U_5 = U_2 - 2b_1^2/d_1c_1;$$

$$t_{1,2} = \left(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_3c_1} \right)/2a_1; \quad t_3 = b_1/a_3; \quad t = 1 - T/T_2;$$

особенность типа седло при

$$U > U_3, \quad t < 0, \quad U \in (U_2, U_3), \quad t < t_2, \quad t \in (t_1, 0), \quad U > U_5, \quad t \in (t_3, 1),$$

$$U \in (U_5, U_2), \quad t \in (t_2, 0), \quad U < U_5, \quad t \in (t_3, t_1);$$

особенность типа фокус при

$$U \in (U_2, U_3), \quad t \in (t_2, t_1), \quad U \in [U_5, U_2], \quad t < t_2;$$

$$U < U_1, \quad t \in [t_1, 1].$$

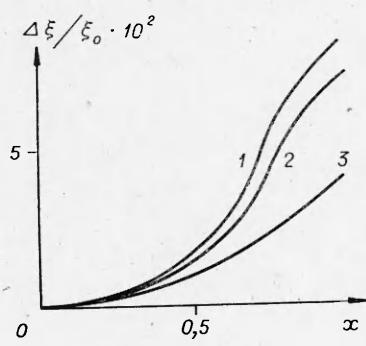
З а м е ч а н и е 1. Существование особой точки типа узел с положительными корнями невозможно.

3. Пример численного расчета. Качественный анализ систем уравнений, описывающих квазидономерное неравновесное течение в соплах, показал, что в случае $\Gamma(\tau, 0)$ особая точка при малых L является седлом. Это позволяет разыскивать решение, в котором значение скорости газа проходит через скорость звука с помощью подбора некоторого начального параметра, например u_0 . Решая численно задачу Коши, доходим до точки сопла, в которой $M = 1 - \varepsilon_1$. Затем проверяется отличие $K_1 > 0$ (производная к решению вблизи особой точки), вычисленного по формуле из п. 1, от $K_1 > 0$, полученного численным методом. Если отличие значительно, то меняется u_0 и расчет проводится снова. В случае удовлетворительного совпадения производится экстраполяция до $M = 1 + \varepsilon_2$, и далее расчет проводится до конца сопла.

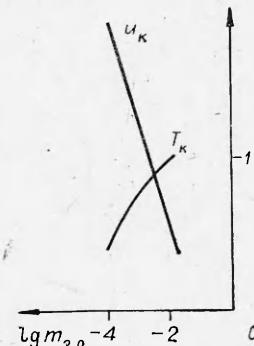
По описанному алгоритму проведены расчеты. В качестве метода решения использовалась схема с весами. Полученные нелинейные алгебраические уравнения решались итерациями методом Ньютона.

Обезразмеривание проводилось стандартным образом, в качестве характерных масштабов параметров принимались T_0, p_0 — температура (равная температуре плавления), давление газа в конце предсоплового объема; $u_0^2 = RT_0$, R — для теплоемкостей фаз; RT_0 — для теплоты фазового перехода. Уравнение, описывающее равновесную кристаллизацию, бралось в виде $\xi_e = \xi_0 \exp [K_3(\zeta - \zeta_0)]$.

При проведении численных расчетов исследовалось влияние времени релаксации на картину течения. Оказалось, что при $\tau \rightarrow 0$ значения параметров смеси повышаются в фиксированных точках сопла, что изображено на фиг. 1 для $\Delta\xi/\xi_0$ при различных начальных концентрациях ($\tau = 0,01; 0,1; 0,5$ — линии 1—3). Здесь видно также, что с ростом объемной концентрации жидкой фазы $m_{2,0}$ $\Delta\xi$ изменяется слабее. Это связано с



Фиг. 1



Фиг. 2

замораживанием процесса расширения при больших концентрациях жидких частиц, что в свою очередь обусловлено большой теплоемкостью частиц, которые поддерживают температуру высокой, так как не успевают остыть за время пролета по тракту сопла.

Получен также естественный факт уменьшения скорости потока в канале с ростом $m_{2,0}$, обусловленный затратами энергии на перенос частиц. Причем поступление тепла за счет фазового перехода не может компенсировать этих потерь, что изображено на фиг. 2 в виде зависимости скорости и температуры на срезе сопла u_k , T_k от $\lg m_{2,0}$.

Исследовалось влияние теплоты фазового перехода L на распределение параметров течения на оси сопла. С ростом теплоты фазового перехода происходило возрастание u , T , обусловленное подводом добавочного тепла. Возрастание L на порядок дает изменение в u , p , T порядка.

Расчеты, описанные выше, проведены при $K_3 = 1$, $L = 0,34$ для Al_2O_3 .

С целью проверки правильности работы программы рассчитан вариант с $m_{2,0} = m_{3,0} = 10^{-10}$, $\tau = 10^{10}$ и проведено сравнение с аналитическим решением, описывающим течение идеального газа в сопле Лаваля. Совпадение численного и аналитического решений имело место с точностью до сотых долей процента. Проводился также контроль точности по балансовым соотношениям, указывающий на достаточную точность расчетов.

Таким образом, проведен качественный анализ системы уравнений, описывающих неравновесное течение смеси. На основе этого рассмотрения построен численный алгоритм, реализация которого позволила рассчитать параметры движения конденсированных продуктов горения в сопле Лаваля с учетом кристаллизации.

Поступила 15 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА *

1. Слободкина Ф. А. Качественное исследование уравнений квазидинамического течения в каналах. — ПМТФ, 1966, № 3.
2. Неуважаев А. Е. Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные решения). — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1975, т. СХХ, ч. 2.
3. Федоров А. В., Фомин В. М., Охунов М. М. Математическое описание течения смеси газа и жидкого (твердых) частиц с учетом кристаллизации (плавления). — В кн.: Тезисы конф. по МСС. Ташкент, 1979.
4. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.

УДК 532.526.5 : 533.6.011.5

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С САМОИНДУЦИРОВАННЫМ ДАВЛЕНИЕМ ОКОЛО БЫСТРО НАГРЕВАЕМОГО УЧАСТКА ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

A. B. Казаков

(Москва)

Исследование нестационарных течений в пограничном слое с самоиндуцированным давлением представляет большой теоретический и практический интерес для задач современной аэродинамики. Использование метода сращиваемых асимптотических разложений для анализа таких течений [1—8] позволило установить асимптотическую картину течения при стремлении характерного числа Рейнольдса к бесконечности, законы подобия, а также количественные закономерности, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными при больших докритических значениях числа Рейнольдса Re . Как и в чисто стационарных течениях [9, 10], взаимодействие нестационарного пограничного слоя и внешнего невязкого потока оказывает существенное влияние на картину течения в основном только в некоторых локальных областях потока с продольными размерами порядка $lRe^{-3/8}$ [1—10]. Для интервалов времени $\Delta t \sim (U/u_\infty)Re^{-1/4}$ течение в двух областях потока с поперечными масштабами порядка